УДК 517.2

А. В. Плотников (Одес. акад. стр-ва и архитектуры)

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ МНОГОЗНАЧНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ. T-ПРОИЗВОДНАЯ

We consider some approaches to the differentiation of multivalued maps and introduce a new definition of derivative (T-derivative) generalizing the Hukuhara derivative.

Розглядаються деякі підходи до диференціювання багатозначних відображень та вводиться нове означення похідної (T-похідна), що узагальнює похідну Хукухари.

1. Определение разности множеств. Пусть R^n — n-мерное вещественное евклидово пространство с нормой

$$\|x\| = \left(x_1^2 + \cdots + x_n^2\right)^{1/2}, \qquad x = (x_1, \cdots, x_n) \in R^n.$$

Через $\mathrm{Comp}(R^n)$ ($\mathrm{Conv}(R^n)$) обозначим пространство, состоящее из всех непустых компактных (выпуклых) подмножеств из R^n с метрикой Хаусдорфа:

$$h(A,B) = \min\{r \geq 0 \mid A \subset B + S_r(0),\, B \subset A + S_r(0)\},$$

где $S_r(A)$ — шар в R^n радиуса $r \geq 0$ с центром в точке $a \in R^n$. Кроме обычных теоретико-множественных операций рассмотрим в пространстве $\mathrm{Comp}(R^n)$ еще две: операции суммы и умножения на скаляр.

Суммой $A + B$ двух множеств $A, B \in \mathrm{Comp}(R^n)$ называется множество

$$C = A + B = \{c = a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Произведением λA скаляра $\lambda \in R^1$ на множество $A \in \mathrm{Comp}(R^n)$ называется множество

$$C = \lambda A = \{c = \lambda a \mid a \in A\}.$$

Если $A, B, C \in \mathrm{Comp}(R^n)$, $\alpha, \beta \in R^1$, то справедливы равенства: 1) $(A + B) + C = A + (B + C)$; 2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$; 3) $\alpha(\beta A) = \alpha\beta(A)$; 4) $1 \cdot A = A$.

Однако $\mathrm{Comp}(R^n)$ ($\mathrm{Conv}(R^n)$) не является линейным пространством относительно приведенных операций, так как нельзя ввести понятие противоположного для $A \in \mathrm{Comp}(R^n)$ ($\mathrm{Conv}(R^n)$) элемента и не выполняется следующее свойство линейных пространств:

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A.$$

Вместо него в общем случае справедливо лишь включение

$$(\alpha + \beta)A \subset \alpha A + \beta A.$$

Однако в случае, когда $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и множество $A \in \mathrm{Conv}(R^n)$, равенство справедливо.

Итак, пространства $\mathrm{Comp}(R^n)$ и $\mathrm{Conv}(R^n)$ не являются линейными, не содержат противоположный элемент и, тем самым, операцию вычитания. Но поскольку операция вычитания во многих случаях необходима, существует несколько подходов для ее определения. Одним из них есть разность Хукухары [1].

Определение 1 [1]. *Пусть* $X, Y \in \mathrm{Conv}(R^n)$. *Множество* $Z \in \mathrm{Conv}(R^n)$ *такое, что* $X = Y + Z$, *называется разностью множеств* X *и* Y *и обозначается* $X \overset{h}{-} Y$.

Замечание **1.** Разность, если она существует, определяется единственным образом.

Справедливы следующие свойства [2]:

1) $(X+Y)\overset{h}{-}(U+V) = \left(X\overset{h}{-}U\right)+\left(Y\overset{h}{-}V\right)$, если разности $X\overset{h}{-}U$ и $Y\overset{h}{-}V$ существуют;

2) $\left(X\overset{h}{-}U\right)\overset{h}{-}\left(Y\overset{h}{-}V\right) = \left(X\overset{h}{-}Y\right)+\left(V\overset{h}{-}U\right)$, если разности $X\overset{h}{-}Y$, $V\overset{h}{-}U$ и $Y\overset{h}{-}V$ существуют;

3) $\left(X\overset{h}{-}U\right)\overset{h}{-}\left(Y\overset{h}{-}V\right) = \left(X\overset{h}{-}Y\right)\overset{h}{-}\left(U\overset{h}{-}V\right)$, если разности $\left(X\overset{h}{-}Y\right)\overset{h}{-}\left(U\overset{h}{-}V\right)$ и $Y\overset{h}{-}V$ существуют;

4) $(\lambda X+\mu Y)\overset{h}{-}(\beta U+\sigma V) = (\lambda-\beta)X + \beta\left(X\overset{h}{-}U\right) + (\mu-\sigma)Y + \sigma\left(Y\overset{h}{-}V\right)$, если $\lambda-\beta\geq 0$, $\mu-\sigma\geq 0$, разности $X\overset{h}{-}U$ и $Y\overset{h}{-}V$ существуют;

5) $X\overset{h}{-}U = \left(X\overset{h}{-}V\right) + \left(V\overset{h}{-}U\right)$, если разности $X\overset{h}{-}V$ и $V\overset{h}{-}U$ существуют;

6) $h\left(X\overset{h}{-}U, Y\overset{h}{-}V\right) \leq h(X, Y) + h(U, V)$, если разности $X\overset{h}{-}U$ и $Y\overset{h}{-}V$ существуют;

7) $h(\lambda X, \lambda Y) = \lambda h(X\overset{h}{-}Y, 0)$, если разность $X\overset{h}{-}Y$ существует;

8) $h(\lambda X, \lambda Y) \leq \beta h(X, Y) + |\lambda-\mu|(h(X,0)+h(Y,0))$, если $\beta=\max\{\lambda,\mu\}$.

Определение 2 [3]. *Последовательность* $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A_n \in \operatorname{Comp}(R^n)$, $n=\overline{1,\infty}$, *сходится к* $A\in\operatorname{Comp}(R^n)$, *если последовательность* $\{h(A_n, A)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится к нулю.*

Теорема 1 [3]. *Метрическое пространство* $\operatorname{Comp}(R^n)$ *является полным пространством.*

Теперь приведем еще одно свойство:

9) если последовательности $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходятся к X и Y и разности $X_n\overset{h}{-}Y_n$ существуют при любых $n\in N$, то разность $X\overset{h}{-}Y$ существует и последовательность $\left\{X_n\overset{h}{-}Y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $X\overset{h}{-}Y$. (Операция разности непрерывна относительно метрики Хаусдорфа.)

Замечание **2.** Очевидно, что $A\overset{h}{-}B \not\equiv A + (-1)B$ и разность $A\overset{h}{-}B$ существует только тогда, когда некоторый сдвиг B содержится в A, т. е. если $\operatorname{diam}(A)\geq\operatorname{diam}(B)$.

2. Производная Хукухары и ее некоторые свойства. Как было отмечено, пространство $\operatorname{Comp}(R^n)$ не является линейным, поэтому возникают существенные трудности при введении понятия производной для многозначных отображений. Поскольку существует несколько подходов к определению разности, то существует не меньшее число подходов к определению производной [1, 4, 5], которые имеют как положительные, так и отрицательные стороны. Рассмотрим подход, предложенный Хукухарой в работе [1].

Определение 3 [1]. *Многозначное отображение* $X(\cdot)\colon R^1\to\operatorname{Conv}\left(R^n\right)$ *дифференцируемо по Хукухаре в точке* $t_0\in R^1$, *если существует* $D_hX(t_0)\in$ $\in\operatorname{Conv}\left(R^n\right)$ *такое, что пределы*

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{X(t_0+\Delta t)\overset{h}{-}X(t_0)}{\Delta t},\qquad \lim_{\Delta t\to 0+}\frac{X(t_0)\overset{h}{-}X(t_0-\Delta t)}{\Delta t} \tag{1}$$

существуют и равны $D_hX(t_0)$.

В данном определении подразумевается, что разности $X(t_0+\Delta t)\overset{h}{-}X(t_0)$, $X(t_0)\overset{h}{-}X(t_0-\Delta t)$ существуют для всех достаточно малых $\Delta t>0$ и отношение приращений в (1) не эквивалентно отношению приращений в

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{X(t_0-\Delta t)\overset{h}{-}X(t_0)}{\Delta t}, \tag{2}$$

так как, вообще говоря, из $A\overset{h}{-}B$, $A, B\in \operatorname{Conv}(R^n)$, не следует существование $B\overset{h}{-}A$.

Очевидно, что если отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре на сегменте $[a,b]$, то функция $t\to \operatorname{diam}(X(t))$, $t\in[a,b]$, не убывает на этом сегменте.

Некоторые свойства производной по Хукухаре можно найти в работах [1, 2, 5].

Теорема 2. *Если многозначное отображение* $X(\cdot)\colon R^1\to \operatorname{Conv}(R^n)$ *абсолютно непрерывно и для любых* $t_1, t_2\in R^1$ *таких, что* $t_1<t_2$, *существует множество* $K(t_1,t_2)$ *такое, что* $X(t_2)=X(t_1)+K(t_1,t_2)$, *то многозначное отображение* $X(\cdot)$ *дифференцируемо по Хукухаре почти всюду на* R^1.

Доказательство. Выберем любую точку $\tau\in R^1$. Из [6] и условий теоремы следует, что многозначное отображение $X(\cdot)$ представимо в виде неопределенного интеграла

$$X(t) = X(\tau)+\int_\tau^t F(s)\,ds,$$

где $t>\tau$; $F(\cdot)\colon R^1\to \operatorname{Conv}(R^n)$ — интегрируемое по Хукухаре многозначное отображение. Поскольку для всех $t\ge\tau$ существует множество $K(t,\tau)\in$ $\in \operatorname{Conv}(R^n)$ такое, что $X(t)=X(\tau)+K(t,\tau)$, то для всех $t\ge\tau$ существует разность Хукухары $X(t)\overset{h}{-}X(\tau)$ и

$$X(t)\overset{h}{-}X(\tau) = \int_\tau^t F(s)\,ds.$$

Домножим обе части этого равенства на $(t-\tau)^{-1}>0$ и перейдем к пределу при $t\to\tau$. Из [7] следует, что предел

$$\lim_{t\to\tau+}(t-\tau)^{-1}\int_\tau^t F(s)\,ds$$

существует почти всюду и равен $F(\tau)$. Следовательно, для почти всех $\tau\in R^1$ предел

$$\lim_{t\to\tau+}(t-\tau)^{-1}\Big(X(t)\overset{h}{-}X(\tau)\Big)$$

существует и равен $F(\tau)$.

Аналогично можно показать, что для почти всех $\tau \in R^1$ предел

$$\lim_{t \to \tau -} (\tau - t)^{-1} \left(X(\tau) \overset{h}{-} X(t) \right)$$

существует и равен $F(\tau)$.

Отсюда следует, что многозначное отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре почти всюду на R^1. Теорема доказана.

Свойство 1 [2]. *Если* $\lambda(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ — *скалярные, неотрицательные, неубывающие и дифференцируемые функции и многозначные отображения* $X(\cdot)$, $Y(\cdot)$ *дифференцируемы по Хукухаре, то* $\lambda(t)X(t) + \mu(t)Y(t)$ *и* $\lambda(t)X(t) \overset{h}{-} \mu(t)Y(t)$ *также дифференцируемы по Хукухаре (если все необходимые разности существуют), причем*

$$D_h(\lambda(t)X(t) + \mu(t)Y(t)) = \lambda'(t)X(t) + \mu'(t)Y(t) + \lambda(t)D_hX(t) + \mu(t)D_hY(t),$$

$$D_h\left(\lambda(t)X(t) \overset{h}{-} \mu(t)Y(t)\right) = (\lambda'(t)X(t) + \lambda(t)D_hX(t)) \overset{h}{-} (\mu'(t)Y(t) + \mu(t)D_hY(t)).$$

3. *T*-дифференцируемость многозначных отображений. Пусть $X(\cdot)\colon R^1 \to \operatorname{Conv}\left(R^n\right)$ — многозначное отображение; $(t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$ — Δ-окрестность точки $t_0 \in R^1$; $\Delta > 0$.

Рассмотрим для любого $t \in (t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$ следующие разности Хукухары (если они существуют):

$$X(t) \overset{h}{-} X(t_0), \qquad t \ge t_0, \tag{3}$$

$$X(t_0) \overset{h}{-} X(t), \qquad t \ge t_0, \tag{4}$$

$$X(t_0) \overset{h}{-} X(t), \qquad t \le t_0, \tag{5}$$

$$X(t) \overset{h}{-} X(t_0), \qquad t \le t_0. \tag{6}$$

Определение 4. *Разности* (3) *и* (4) ((5) *и* (6)) *будем называть правыми (левыми) разностями.*

***Замечание* 3.** Из свойств разности Хукухары следует, что обе односторонние разности существуют только тогда, когда $X(t) = A$ для $t > t_0$ или $t < t_0$. Если существуют все разности, то $X(t) = A$ во всей Δ-окрестности точки t_0.

Если для всех $t \in (t_0 - \Delta, t_0)$ $(t \in (t_0, t_0 + \Delta))$ существует только одна из односторонних разностей, то из свойств разности Хукухары следует, что отображение $\operatorname{diam}(X(\cdot))\colon R^1_+ \to R^1_+$ в Δ-окрестности точки t_0 может быть одним из следующих:

1) неубывающим на $(t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$;
2) невозрастающим на $(t_0 - \Delta, t_0 + \Delta)$;
3) неубывающим на $(t_0 - \Delta, t_0)$ и невозрастающим на $(t_0, t_0 + \Delta)$;
4) невозрастающим на $(t_0 - \Delta, t_0)$ и неубывающим на $(t_0, t_0 + \Delta)$.

Следовательно, для каждого из указанных случаев возможна только одна из комбинаций разностей: 1) (3) и (5); 2) (4) и (6); 3) (5) и (4); 4) (6) и (3).

Предположение 1. *В случае, когда существуют две односторонние разности, будем выбирать только одну из них, причем будем выбирать ту, которая соответствует одной из предыдущих комбинаций. Если таких комбинаций две, то будем выбирать ту, которая имеет меньший порядковый номер.*

Теперь рассмотрим четыре типа пределов, каждый из которых соответствует одному из типов разностей:

$$\lim_{t \to t_0+} \frac{X(t) \stackrel{h}{-} X(t_0)}{t - t_0}, \tag{7}$$

$$\lim_{t \to t_0+} \frac{X(t_0) \stackrel{h}{-} X(t)}{t - t_0}, \tag{8}$$

$$\lim_{t \to t_0-} \frac{X(t_0) \stackrel{h}{-} X(t)}{t_0 - t}, \tag{9}$$

$$\lim_{t \to t_0-} \frac{X(t) \stackrel{h}{-} X(t_0)}{t_0 - t}. \tag{10}$$

Учитывая предположение 1, можем говорить, что в точке t_0 могут существовать не более двух пределов, поскольку мы предполагали, что существуют только две из четырех используемых в пределах разностей Хукухары. Обозначим значения этих пределов соответственно через T_1, T_2, T_3 и T_4, причем если предел существует, то его значение будет выпуклым компактным подмножеством из R^n; а если предел не существует, то будем считать, что он равен пустому множеству.

Замечание **4.** Из изложенного выше следует, что могут существовать только комбинации пределов: 1) (7) и (9); 2) (8) и (10); 3) (9) и (8); 4) (10) и (7).

Определение 5. *Если соответствующие два предела существуют и равны между собой, то будем говорить, что отображение* $X(\cdot)$ *T-дифференцируемо в точке* t_0 *и T-производная равна паре*

$$\mathcal{T}X(t_0) = \langle A, B \rangle,$$

где: 1) $A = T_1 = T_3$, $B = \varnothing$; 2) $A = \varnothing$, $B = T_2 = T_4$; 3) $A = T_3$, $B = T_2$, $T_2 = T_3$; 4) $A = T_4$, $B = T_1$, $T_1 = T_4$.

Определение 6. *Если многозначное отображение* $X(\cdot)\colon R^1 \to \mathrm{Conv}(R^n)$ *T-дифференцируемо в каждой точке интервала* (t_1, t_2), *то будем говорить, что оно T-дифференцируемо на интервале* (t_1, t_2).

Свойство 2. *Если многозначное отображение* $X(\cdot)\colon R^1 \to \mathrm{Conv}(R^n)$ *T-дифференцируемо и* $\mathrm{diam}(X(\cdot))$ *— неубывающая функция на* R^1, *то многозначное отображение* $X(\cdot)$ *также дифференцируемо по Хукухаре и* $\mathcal{T}X(\cdot)$ *имеет вид* $\langle D_h X(\cdot), \varnothing \rangle$.

Доказательство. Так как многозначное отображение $X(\cdot)\colon R^1 \to \mathrm{Conv}(R^n)$ *T*-дифференцируемо и $\mathrm{diam}(X(\cdot))$ — неубывающая функция на R^1, то пределы (7) и (9) существуют и равны между собой.

Следовательно, отображение $X(\cdot)$ дифференцируемо по Хукухаре согласно определению, что и требовалось доказать.

Свойство 3. *Если многозначное отображение* $X(\cdot)\colon R^1 \to \mathrm{Conv}(R^n)$ *дифференцируемо по Хукухаре, то оно T-дифференцируемо и* $\mathcal{T}X(\cdot) = \langle D_h X(\cdot), \varnothing \rangle$.

Доказательство. Из определения производной Хукухары следует, что пределы (7) и (9) существуют и равны между собой. Следовательно, по определению это отображение *T*-дифференцируемо.

Замечание **5.** Существуют многозначные отображения, которые *T*-дифференцируемы, но не дифференцируемы по Хукухаре.

$$\lim_{t\to\tau+}\frac{1}{t-\tau}\Big(X(t)\overset{h}{-}X(\tau)\Big)$$

существует и равен $F(\tau)$.

Аналогично можно доказать, что для почти всех $\tau\in(t_0, T)$ существует предел

$$\lim_{t\to\tau-}\frac{1}{\tau-t}\Big(X(\tau)\overset{h}{-}X(t)\Big)$$

и равен также $F(\tau)$.

Следовательно, многозначное отображение T-дифференцируемо на (t_0, T) почти всюду. Теорема доказана.

Следствие. Пусть многозначное отображение $X(\cdot)$ *не удовлетворяет условиям теоремы на всем отрезке* $[t_0, T]$, *но существует система подотрезков такая, что:*

1) $[t_0, t_1]\cup[t_1, t_2]\cup\ldots\cup[t_{n-1}, T]=[t_0, T]$;

2) *на каждом* $[t_i, t_{i+1}]$, $i=\overline{0, n-1}$, *многозначное отображение* $X(\cdot)$ *удовлетворяет условиям теоремы.*

Тогда многозначное отображение $X(\cdot)$ T*-дифференцируемо почти всюду на* $[t_0, T]$.

4. T-интегрируемость многозначных отображений. Пусть многозначное отображение $\mathcal{F}\colon R^1\to\langle\operatorname{Conv}(R^n),\operatorname{Conv}(R^n)\rangle$, т. е. многозначное отображение $\mathcal{F}(\cdot)$ ставит в соответствие каждому $t\in R^1$ пару множеств $\langle F_1(t), F_2(t)\rangle$ таких, что $F_1(t), F_2(t)\in\operatorname{Conv}(R^n)$, удовлетворяет следующим условиям:

1) $F_1(t)$ и $F_2(t)$ никогда одновременно не равны $\varnothing$ для всех $t\in R^1$;

2) мера множества $G=\{t\in R^1 \mid F_1(t)\neq\varnothing$ и $F_2(t)\neq\varnothing\}$ равна 0;

3) если $t\in G$, то $F_1(t)=F_2(t)$.

Предположение 2. *Для любого отрезка* $[t_0, T]$ *множество* G *имеет конечное число элементов.*

Многозначному отображению $\mathcal{F}(\cdot)$ поставим в соответствие многозначное отображение $F(\cdot)\colon R^1\to\operatorname{Conv}(R^n)$ такое, что:

1) $F(t)\neq\varnothing$ для всех $t\in[t_0, T]$;

2) $F(t)=F_1(t)$ или $F(t)=F_2(t)$ для всех $t\in[t_0, T]$.

Определение 7. *Будем говорить, что многозначное отображение* $\mathcal{F}(\cdot)$ *непрерывно на* $[t_0, T]$, *если многозначное отображение* $F(t)$ *непрерывно на* $[t_0, T]$.

Свойство 4. *Из предположения 2 следует, что любой отрезок* $[t_0, T]$ *можно разбить на конечное число отрезков* $[t_i, t_{i+1}]$, $i=\overline{1, n}$, *таких, что* $F_1(t)=\varnothing$, $F_2(t)\neq\varnothing$ *или* $F_1(t)\neq\varnothing$, *а* $F_2(t)=\varnothing$ *для* $t\in(t_i, t_{i+1})$.

Предположение 3. *Будем предполагать, что на сегменте* $[t_0, t_1]$ *выполняется условие* $F_1(t)\neq\varnothing$ *для* $t\in[t_0, t_1]$, *а* $F_2(t)=\varnothing$ *для* $t\in(t_0, t_1)$.

Введем следующие обозначения:

$$G^+(a,t)=\int_a^t F(s)\,ds,\quad G^-(t,b)=\int_t^b F(s)\,ds,\qquad t\in[a,b],$$

где $F(\cdot)\colon[a,b]\to\operatorname{Conv}(R^n)$; интегралы будем понимать либо в смысле Ауманна [8], либо в смысле Хукухары [1].

Определение 8. *Будем говорить, что многозначное отображение $\mathcal{F}(\cdot)$, удовлетворяющее предположениям 2, 3, T-интегрируемо на отрезке $[t_0, T]$, если существует непрерывное многозначное отображение $G(\cdot)\colon [t_0, T] \to \to \mathrm{Conv}(R^n)$ такое, что:*

1) $G(t_0) = \{0\}$;

2) *если i — нечетное, то $G(t_i) = G^+(t_{i-1}, t_i) + G(t_{i-1})$, если i — четное, то $G(t_i)$ удовлетворяет условию $G(t_{i-1}) = G^-(t_{i-1}, t_i) + G(t_i)$, где t_i — концы отрезков из свойства, и будем считать, что*

$$(\mathcal{T})\int_{t_0}^{T} \mathcal{F}(t)\,dt = G(T).$$

Пример 2. Пусть многозначное отображение $\mathcal{F}(\cdot)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(t) = \begin{cases} \langle S_{\cos(t)}(0), \varnothing\rangle, & t \in (0, \pi/2) \cup (\pi, 3\pi/2); \\ \langle 0, 0\rangle, & t \in \{\pi/2, 3\pi/2\}; \\ \langle S_1(0), S_1(0)\rangle, & t \in \{0, 2\pi\}; \\ \langle \varnothing, S_{-\cos(t)}(0)\rangle, & t \in (\pi/2, \pi) \cup (3\pi/2, 2\pi). \end{cases}$$

Очевидно, что многозначное отображение $F(\cdot)$ имеет вид $F(t) = S_{|\cos t|}(0)$, $t \in \in [0, 2\pi]$. Легко можно показать, что $G(t) = S_{|\sin t|}(0)$, $t \in [0, 2\pi]$. Следовательно, многозначное отображение $\mathcal{F}(\cdot)$ T-интегрируемо на отрезке $[0, 2\pi]$ и

$$(\mathcal{T})\int_{0}^{2\pi} \mathcal{F}(t)\,dt = S_{|\sin t|}(0)\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Воспользовавшись определениями T-производной, T-интеграла и теоремой 3, легко можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть многозначное отображение $\mathcal{F}(\cdot)$ непрерывно на $[a, b]$. Тогда для почти всех $t \in (a, b)$ справедливо тождество*

$$\mathcal{T}\int_{a}^{t} \mathcal{F}(\tau)\,d\tau \equiv \mathcal{F}(t).$$

1. *Hukuhara M.* Integrations des applications measurables don't la valeur est un compact convexe // Funkc. ekvacioj. – 1967. – № 10. – P. 205–223.
2. *De Blasi F.S., Iervolino F.* Equazioni differential con solusioni a valore compatto convesso // Boll. Unione math. ital. – 1969. – **4**, №2. – P. 491–501.
3. *Половинкин Е.С.* Элементы теории многозначных отображений: Учеб. пособие. – М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 1982. – 127 с.
4. *Тюрин Ю.Н.* Математическая формулировка упрощенной модели производственного планирования // Эконом. и мат. методы. – 1965. – **1**, № 3. – С. 381–408.
5. *Banks H.T., Jacobs M.Q.* A differential calculus of multifunctions // J. Math. Anal. and Appl. – 1970. – **29**. – P. 246–272.
6. *Arstein Z.* On the calculus of closed set-valued functions // Indiana Univ. Math. J. – 1974. – **24**, № 67. – P. 433–441.
7. *Половинкин Е.С.* Теория многозначных отображений: Учеб. пособие. – М.: Моск. физ.-техн. ин-т, 1983. – 108 с.
8. *Aumann R.J.* Integral of set-valued functions // J. Math. Anal. and Appl. – 1965. – **12**. – P. 1–12.

Получено 22.06.98,
после доработки — 15.05.2000