УДК 517.956, 519.21

А. Ф. Турбин, И. В. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ С ВЕЩЕСТВЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

We propose a method of construction of analytical solution of the Cauchy problem for the telegraph equation which is based on its modelling by one-dimensional Markov random evolution.

Запропоновано метод побудови аналітичного розв'язку задачі Коші для телеграфного рівняння, що базується на його моделюванні одновимірною марковською випадковою еволюцією.

Введение. Решение задачи Коши для телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}U(t,x) + 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}U(t,x) = V^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(t,x),$$
$$U(0,x) = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}U(t,x)\Big|_{t=0} = g(x), \tag{1}$$

построенное Б. Риманом, имеет вид (см., например, [1, 2])

$$U(t,x) = \frac{1}{2}e^{-\lambda t}\Bigg[\big(f(x+vt) + f(x-vt)\big) + $$
$$+ \; v\int_{x-vt}^{x+vt} f(y)\frac{\partial}{\partial t}I_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{v}(t^2 - v^2(x-y)^2)}\right)dy \; + $$
$$+ \; v\int_{x-vt}^{x+vt}[f(y)+\lambda g(y)]\,I_0\left(\sqrt{\frac{\lambda}{v}(t^2 - v^2(x-y)^2)}\right)dy\Bigg]. \tag{2}$$

В [3] для специальных начальных условий предложен алгоритм построения решения задачи Коши (1), основанный на вычислении моментов процесса одномерного броуновского движения

$$\beta_{r,x}^{\lambda,v}(t) = x + v\int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)}\,ds, \tag{3}$$

где $v > 0$, $\xi_r^\lambda(t)$ — цепь Маркова со значениями в $\{0,1\}$, с инфинитезимальной матрицей

$$Q_\lambda = \lambda \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

и начальным распределением $\mathrm{P}\left\{\xi_r^\lambda(t)=0\right\} = p$, $\mathrm{P}\left\{\xi_r^\lambda(t)=1\right\} = q$, $r = p - q$. В настоящей работе мы развиваем алгоритм из [3] для вещественно-аналитических начальных условий:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k, \quad x \in R, \\ g(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k, \quad x \in R. \end{aligned} \tag{4}$$

Теоретически найденный нами вид решения (1) с условиями (4) может быть получен из (2) подстановкой правых частей (4) в (2), перестановкой операторов суммирования и интегрирования с использованием интегральных представлений для функций Бесселя. Предлагаемый вероятностный подход, основанный на явном вычислении произвольных моментов случайного процесса $\beta_{r,x}^{\lambda,\nu}(t)$, дает возможность обойти аналитические трудности и, кроме того, получить новые интегральные формулы для функций Бесселя.

Еще один мотив построения нового представления решения задачи Коши (1) состоит в следующем. Положим $\varepsilon = 1/(2\lambda)$ и запишем уравнение (1) в виде

$$\varepsilon \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t,x) = \left(\frac{V^2}{2\lambda} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t} \right) U(t,x). \tag{5}$$

В гидродинамическом пределе [3], когда $\nu \to \infty$, $\lambda \to \infty$ так, что $\nu^2/\lambda \to \sigma^2$, уравнение (5) имеет вид сингулярно возмущенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной по t. В теории сингулярно возмущенных эволюционных уравнений во многих случаях оказывается, что решение содержит регулярную (по ε) составляющую и погранслойную составляющую, содержащую функцию вида $\exp(-t/\varepsilon)$ (в нашем случае $\exp(-2\lambda t) = \exp(-t/\varepsilon)$). В решении (2) погранслойные функции в явном виде не содержатся, что связано с аналитико-геометрическим подходом к построению (2). В решениях, которые мы строим, регулярная и погранслойная составляющие выделяются в явном виде.

1. Аналитическая структура решения. Положим

$$b_r^{\lambda,\nu}(t,x;n) = \mathrm{M}\left(\beta_{r,x}^{\lambda,\nu}(t)\right)^n.$$

Тогда функция $b_r^{\lambda,\nu}(t,x;n)$ является решением телеграфного уравнения (1) с начальными условиями

$$f(x) = x^n, \quad g(x) = r\nu n x^{n-1}. \tag{6}$$

Если в (4) $g(x) = 0$, то решение $u(t,x)$ задачи Коши (1) с вещественно-аналитической функцией $f(x)$ имеет вид

$$u_0(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k b_{0,x}^{\lambda,\nu}(t,x;k). \tag{7}$$

Если $r \neq 0$, то функция $(r\nu m)^{-1}\left[b_{r,x}^{\lambda,\nu}(t,x;m) - b_{0,x}^{\lambda,\nu}(t,x;m)\right]$, $m \geq 1$, является решением телеграфного уравнения (1) с начальными условиями

$$f(x) = 0, \quad g(x) = x^m$$

и в этом случае функция

$$u_r(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g_m}{r\nu m}\Big[b_{r,x}^{\lambda,\nu}(t, x; m) - b_{0,x}^{\lambda,\nu}(t, x; m)\Big] \tag{8}$$

— решение уравнения (1) с начальными условиями

$$f(x) = 0, \quad g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m x^m. \tag{9}$$

Отсюда функция

$$u_0(t, x) + u_r(t, x) = f_0 b_{0,x}^{\lambda,\nu}(t, x; 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[f_k b_{0,x}^{\lambda,\nu}(t, x; k) +$$

$$+ \frac{g_k}{r\nu k}\Big(b_{r,x}^{\lambda,\nu}(t, x; k) - b_{0,x}^{\lambda,\nu}(t, x; k)\Big)\Bigg]$$

есть решение (1) с начальными условиями $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k x^k$, $g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k x^k$. Заметив теперь, что функция $(g_0/(2\lambda))(1 - \exp(-2\lambda t))$ — решение (1) с начальными условиями $f(x) = 0$, $g(x) = g_0$, получим следующий результат.

Теорема 1. *Пусть* $b_r^{\lambda,\nu}(t, x; n)$ *— решение телеграфного уравнения* (1) *с начальными условиями* (6). *Тогда решение* $u(x, t)$ *задачи Коши* (1) *с вещественно-аналитическими условиями* (4) *имеет вид*

$$u(t, x) = f_0 + \frac{g_0}{2\lambda}\Big(1 - e^{-2\lambda t}\Big) + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigg[f_k b_{0,x}^{\lambda,\nu}(t, x; k) +$$

$$+ \frac{g_k}{r\nu k}\Big(b_{r,x}^{\lambda,\nu}(t, x; k) - b_{0,x}^{\lambda,\nu}(t, x; k)\Big)\Bigg]. \tag{10}$$

Задача построения решения сведена таким образом к вычислению моментов $b_{r,x}^{\lambda,\nu}(t, x; k)$ процесса одномерного броуновского движения.

2. Моменты процесса $\beta_{r,x}^{\lambda,\nu}(t)$.

Лемма. *Справедливы предельные соотношения*

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty \\ \nu\to\infty \\ \nu^2/\lambda\to\sigma^2}} b_{r,x}^{\lambda,\nu}(t, x; n) = \sum_{i=0}^{[n/2]} \binom{n}{2i} x^{n-2i} \mu_{2i} \left(\frac{\nu^2}{\lambda} t\right)^i, \tag{11}$$

где $[p]$ *— целая часть числа* p,

$$\mu_{2j} = \begin{cases} 1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2j-1), & \text{если } j \text{ — четное число;} \\ 0, & \text{если } j \text{ — нечетное число.} \end{cases}$$

Доказательство. По определению

$$b_{r,x}^{\lambda,\nu} = \mathrm{M}\left(x+\nu\int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)}ds\right)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i}\mathrm{M}\left(\nu\int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)}ds\right)^i.$$

Из слабой сходимости процесса $\nu\int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)}ds$ при $\lambda\to\infty$, $\nu\to\infty$, $\nu^2/\lambda\to\sigma^2$, к винеровому процессу $\sigma w(t)$, $\mathrm{D}w(t)=1$ [4], следует

$$\lim_{\substack{\lambda\to\infty\\ \nu\to\infty\\ \nu^2/\lambda\to\sigma^2}} \mathrm{M}\left[x+\nu\int_0^t (-1)^{\xi_r^\lambda(s)}ds\right]^n = \mu_n\left(\frac{\nu^2}{\lambda}t\right)^n,$$

откуда имеем (11). Лемма доказана.

Лемма дает возможность искать решение уравнения (1) с начальными условиями (6) в виде

$$b_r^{\lambda,\nu}(t,x;n) = x^n + \frac{r\nu n x^{n-1}}{2\lambda}\left(1-e^{-2\lambda t}\right) + \sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n}{2i} x^{n-2i}\mu_{2i}\left(\frac{\nu^2}{\lambda}\right)^i +$$

$$+ a_n(t,x) + c_n(t,x)\left(1-e^{-2\lambda t}\right), \tag{12}$$

где неизвестные функции $a_n(t,x)$ и $c_n(t,x)$ являются многочленами по x (при фиксированном t) и по t (при фиксированном x) степени не выше $n-2$. Поскольку $b_r^{\lambda,\nu}(0,x;n)=x^n$, то с необходимостью выполняется условие

$$a(0,x) = 0. \tag{13}$$

Дифференцируя (12) по t, находим

$$\frac{\partial}{\partial t}b_r^{\lambda,\nu}(t,x;n) = r\nu n x^{n-1}e^{-2\lambda t} + \sum_{i=0}^{[n/2]}\binom{n}{2i} x^{n-2i}\, i\mu_{2i}\left(\frac{\nu^2}{\lambda}\right)^i t^{i-1} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}a(t,x) + \left(\frac{\partial}{\partial t}c(t,x)\right)\left(1-e^{-2\lambda t}\right) - 2\lambda c(t,x)e^{-2\lambda t}.$$

Из того, что $\frac{\partial}{\partial t}b_r^{\lambda,\nu}(t,x;n)\Big|_{t=0} = r\nu x^{n-1}$, получаем еще одно условие на $a_n(t,x)$ и $c_n(t,x)$:

$$\binom{n}{2}x^{n-2}\mu_2\left(\frac{\nu^2}{\lambda}\right)^2 + \frac{\partial}{\partial t}a_n(t,x)\Big|_{t=0} = 2\lambda c_n(0,x). \tag{14}$$

Теорема 2. *Функции* $a_n(t,x)$ *и* $c_n(t,x)$ *имеют вид*

$$a_n(t,x) = \sum_{j=1}^{n/2-1}\sum_{i=1}^{n/2-j} b_j^{(i)}x^{n-2(i+j)}t^i + \sum_{j=0}^{n/2-2}\sum_{i=1}^{n/2-j-1} d_j^{(i)}x^{n-2(i+j)-1}t^i,$$

$$c_n(t,x) = \sum_{j=0}^{n/2-1}\sum_{i=1}^{n/2-j} e_j^{(i)}x^{n-2(i+j)}t^{i-1} + \sum_{j=1}^{n/2-1}\sum_{i=1}^{n/2-j} f_j^{(i)}x^{n-2(i+j)+1}t^{i-1} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n/2} f_0^{(i)}x^{n-2i+1}\,t^{i-1},$$

если n — *четное, и*

$$a_n(t,x) = \sum_{j=1}^{[n/2]-1} \sum_{i=1}^{[n/2]-j} b_j^{(i)} x^{n-2(i+j)} t^i + \sum_{j=0}^{[n/2]-2} \sum_{i=1}^{[n/2]-j-1} d_j^{(i)} x^{n-2(i+j)-1} t^i,$$

$$c_n(t,x) = \sum_{j=0}^{[n/2]-1} \sum_{i=1}^{[n/2]-j} e_j^{(i)} x^{n-2(i+j)} t^{i-1} + \sum_{j=1}^{[n/2]-1} \sum_{i=1}^{[n/2]-j+1} f_j^{(i)} x^{n-2(i+j)+1} t^{i-1} +$$

$$+ \sum_{i=2}^{[n/2]+1} f_0^{(i)} x^{n-2i+1} t^{i-1},$$

если n — нечетное. Здесь

$$e_j^{(1)} = \frac{b_j^{(1)}}{2\lambda}; \quad e_j^{(i)} = \frac{1}{2\lambda(i-1)} \big(e_{j-1}^{(i+1)} i(i-1) -$$

$$- \nu^2 e_j^{(i-1)} (k - 2(i+j-1))(k - 2(i+j-1) - 1) \big), \quad i \neq 1;$$

$$b_j^{(i)} = \frac{1}{2\lambda i} \big(2\lambda e_{j-1}^{(i+1)} i - b_{j-1}^{(i+1)} (i+1) i + a_{j-2}^{(i+1)} (i+1) i +$$

$$+ \nu^2 b_j^{(i-1)} (k - 2(i+j-1))(k - 2(i+j-1) - 1) -$$

$$- \nu^2 e_{j-1}^{(i)} (k - 2(i+j-1))(k - 2(i+j-1) - 1) \big),$$

$$f_j^{(1)} = \frac{d_{j-1}^{(1)}}{2\lambda}; \quad f_j^{(i)} = \frac{1}{2\lambda(i-1)} \big(f_{j-1}^{(i+1)} i(i-1) -$$

$$- \nu^2 f_j^{(i-1)} (k - 2(i+j-1) + 1)(k - 2(i+j-1)) \big), \quad i \neq 1;$$

$$d_j^{(i)} = \frac{1}{2\lambda i} \big(2\lambda f_j^{(i+1)} i - d_{j-1}^{(i+1)} (i+1) i + f_{j-1}^{(i+2)} (i+1) i +$$

$$+ \nu^2 d_j^{(i-1)} (k - 2(i+j-1) - 1)(k - 2(i+j-1)) -$$

$$- \nu^2 f_j^{(i)} (k - 2(i+j) + 1)(k - 2(i+j)) \big).$$

При этом считаем $b_0^{(i)} = \binom{n}{2i} \mu_{2i} \left(\frac{\nu^2}{\lambda}\right)^i$, $i = 0, \ldots, [n/2]$ $f_0^{(1)} = -r\nu n/(2\lambda)$, *а в случае, когда i и j выходят за указанные пределы изменения, полагаем* $b_j^{(i)} = d_j^{(i)} = e_j^{(i)} = f_j^{(i)} = 0$.

Доказательство. Положим

$$\gamma_n(t,x) = \sum_{i=1}^{[n/2]} \binom{n}{2i} x^{n-2i} \mu_{2i} \left(\frac{\nu^2}{\lambda} t \right)^i + a_n(t,x),$$

тогда

$$b_r^{\lambda,\nu}(t,x;n) = x^n + \frac{r\nu n x^{n-1}}{2\lambda} \left(1 - e^{-2\lambda t}\right) + \gamma_n(t,x) + c_n(t,x) \left(1 - e^{-2\lambda t}\right).$$

Подставляя это выражение в уравнение (1), а затем группируя и приравнивая свободные члены и члены при $e^{-2\lambda t}$, получаем

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}c_n - 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}c_n = \nu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}c_n - \frac{k(k-1)(k-2)r\nu^3x^{k-3}}{2\lambda}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma_n - \frac{\partial^2}{\partial t^2}c_n + 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}\gamma_n - 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}c_n = \nu^2(k-1)kx^{k-2} +$$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)r\nu^3x^{k-3}}{2\lambda} + \nu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\gamma_n - \nu^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}c_n. \tag{16}$$

Теперь соотношение (14) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\gamma_n(t,x)\Big|_{t=0} = 2\lambda c_n(0,t). \tag{17}$$

Многочлен $\gamma_n(t,x)$ содержит сумму $\sum_{i=1}^{[n/2]}\binom{n}{2i}x^{n-2i}\mu_{2i}\left(\frac{\nu^2}{\lambda}t\right)^i$. Обозначим коэффициент при $x^{n-2i}t^i$ через $b_0^{(i)}$. Поскольку в соотношениях (15) и (16), связывающих многочлены γ_n и c_n, дифференцирование по x производится дважды, степень каждого следующего члена по x на 2 меньше, чем у предыдущего, поэтому коэффициент при $x^{n-2(i+j)}t^i$ обозначим $b_j^{(i)}$.

Из (17) видно, что многочлен $c_n(t,x)$ содержит член $b_0^{(1)}x^{n-2}/(2\lambda)$ (обозначим $e_0^{(1)} = b_0^{(1)}/(2\lambda)$). Аналогично предыдущему, коэффициент при $x^{n-2(i+j)}t^{i-1}$ обозначим через $e_j^{(i)}$. Если в соотношении (15) собрать коэффициенты при совпадающих после дифференцирования степенях x и t, то получим

$$e_{j-1}^{(i+1)}(i-1)i - 2\lambda(i-1)e_j^{(i)} = \nu^2e_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1).$$

Поскольку коэффициенты с меньшими индексами можно отыскать ранее, например уже известно $e_0^{(1)}$, при этом $e_{-1}^{(3)}$ полагаем равным 0 (j выходит за указанные пределы изменения), то можно найти $e_0^{(2)}$. Имеем

$$e_j^{(i)} = \frac{1}{2\lambda(i-1)}\Big(e_{j-1}^{(i+1)}i(i-1) -$$

$$- \nu^2e_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1)\Big).$$

Поскольку степень x при дифференцировании понижается на 2, член с x^{k-3} не появляется, и поэтому наличие выражения $k(k-1)(k-2)r\nu^3x^{k-3}\times$ $\times(2\lambda)^{-1}$ в соотношениях (15) и (16) учтено далее.

Аналогично, собирая коэффициенты в (16), получаем

$$b_{j-1}^{(i+1)}(i+1)i - e_{j-2}^{(i+1)}(i+1)i + 2\lambda b_j^{(i)}i - 2\lambda e_{j-1}^{(i+1)} =$$

$$= \nu^2b_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1) -$$

$$- \nu^2e_{j-1}^{(i)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1).$$

Так как нам известны коэффициенты более низких индексов, например, $b_0^{(i)}$ и $e_0^{(i)}$, то имеем

$$b_j^{(i)} = \frac{1}{2\lambda i}\big(2\lambda e_{j-1}^{(i+1)} i - b_{j-1}^{(i+1)}(i+1)i + a_{j-2}^{(i+1)}(i+1)i +$$
$$+ \nu^2 b_j^{(i-1)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1) -$$
$$- \nu^2 e_{j-1}^{(i)}(k-2(i+j-1))(k-2(i+j-1)-1)\big).$$

Затем из (17) находим $e_j^{(1)} = b_j^{(1)}/(2\lambda)$ и повторяем ту же процедуру. Границы изменения i и j могут быть найдены из тех соображений, что многочлены имеют степень не выше $n-2$ и переменные x и t не могут иметь степень ниже 0.

Однако соотношения (15) и (16) содержат также члены $k(k-1)(k-2)r \times \nu^3 x^{k-3}(2\lambda)^{-1}$. Обозначим через $f_0^{(1)} = -r\nu n/(2\lambda)$ коэффициент при $x^{n-1} \times (1-e^{-2\lambda t})$ и, вообще, $f_j^{(i)}$ — коэффициент при $x^{n-2(i+j)+1}t^{i-1}(1-e^{-2\lambda t})$, а $d_j^{(i)}$ — при $x^{n-2(i+j)-1}t^i$. Применяя описанную выше процедуру, получаем требуемые соотношения. Теорема доказана.

В заключение запишем уравнение (5) в виде сингулярно возмущенной задачи Коши:

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t,x) = \left(\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial t}\right) u(t,x),$$

$$u(0,x) = f(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(t,x)\Big|_{t=0} = r\frac{\sigma}{\sqrt{2}\varepsilon} f'(x), \quad r \in R.$$

Использовав теорему 2, приведем решения данной задачи Коши для имеющих самостоятельный интерес условий (в квадратных скобках выделена регулярная часть решения):

$$f(x) = x \,:\, u(t,x) = \left[x + \frac{r}{\sqrt{2}}\sigma\varepsilon\right] - \frac{r}{\sqrt{2}}\sigma\varepsilon e^{-t/\varepsilon^2},$$

$$f(x) = x^2 \,:\, u(t,x) = \left[x^2 + \sigma^2 t + r\sigma\sqrt{2}\varepsilon x - \sigma^2\varepsilon^2\right] + (\sigma^2\varepsilon^2 - r\sigma\sqrt{2}\varepsilon)\, e^{-t/\varepsilon^2},$$

$$f(x) = x^3 \,:\, u(t,x) = \left[x^3 + 3x\sigma^2 t - 3x\sigma^2\varepsilon^2 + \frac{3r}{\sqrt{2}}\sigma\varepsilon x^2 - \frac{3r}{\sqrt{2}}\sigma^3\varepsilon^3\right] +$$
$$+ \left(3x\sigma^2\varepsilon^2 - \frac{3r}{\sqrt{2}}\sigma\varepsilon x^2 + \frac{3r}{\sqrt{2}}\sigma^3\varepsilon t + \frac{3r}{\sqrt{2}}\sigma^3\varepsilon^3\right) e^{-t/\varepsilon^2},$$

$$f(x) = x^4 \,:\, u(t,x) = \big[x^4 + 1\cdot 3\cdot(\sigma^2 t)^2 + (6x^2\sigma^2 - 18\sigma^4\varepsilon^2)t -$$
$$- 6x^2\sigma^2\varepsilon^2 + 3t\sigma^4\varepsilon^2 + 18\sigma^4\varepsilon^4 + 2r\sigma\sqrt{2}\varepsilon x^3 + 6r\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon xt - 12r\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3 x\big] +$$
$$+ \big(6x^2\sigma^2\varepsilon^2 - 2r\sigma\sqrt{2}\varepsilon x^3 +$$
$$+ 12r\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3 x + 6r\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon xt - 6\sigma^4\varepsilon^2 t - 18\sigma^4\varepsilon^4\big) e^{-t/\varepsilon^2},$$

$$f(x) = x^5 \,:\, u(t,x) = \big[x^5 - 10x^3\sigma^2\varepsilon^2 + 90x\sigma^4\varepsilon^4 + 10x^3 t\sigma^2 +$$
$$+ 5\cdot 1\cdot 3x(\sigma^2 t)^2 - 60xt\sigma^4\varepsilon^2 + \frac{5r}{\sqrt{2}}x^4\sigma\varepsilon - 15rx^2 t\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon + \frac{15r}{\sqrt{2}}t^2\sigma^5\varepsilon -$$
$$- 30rx^2\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3 + 45rt\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^3 + 120r\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^5\big] + \big(10x^3\sigma^2\varepsilon^2 -$$

$$- 90x\sigma^4\varepsilon^4 - 30xt\sigma^4\varepsilon^2 - \frac{5r}{\sqrt{2}}x^4\sigma\varepsilon - 15rx^2t\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon - \frac{15r}{\sqrt{2}}t^2\sigma^5\varepsilon +$$

$$+ 30rx^2\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3 - 45rt\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^3 - 120r\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^5\Big) e^{-t/\varepsilon^2},$$

$$f(x) = x^6 \, : \, u(t,x) = \Big[x^6 - 15x^4\sigma^2\varepsilon^2 + 270x^2\sigma^4\varepsilon^4 +$$

$$+ (45x^2\sigma^4 - 135\sigma^6\varepsilon^2)t^2 + (15x^4\sigma^2 - 180x^2\sigma^4\varepsilon^2 + 540\sigma^6\varepsilon^4)t - 900\sigma^6\varepsilon^6 +$$

$$+ 3rx^5\sigma\sqrt{2}\varepsilon - 60x^3\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3 + 180x\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^5 + 30rx^3t\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon +$$

$$+ 90rxt\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^3 + 45rxt^2\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon\Big] + \Big(15x^4\sigma^2\varepsilon^2 - 270x^2\sigma^4\varepsilon^4 -$$

$$- 90x^2t\sigma^4\varepsilon^2 + 45t^2\sigma^6\varepsilon^2 + 360t\sigma^6\varepsilon^4 + 900\sigma^6\varepsilon^6 - 30rx^5\sigma\sqrt{2}\varepsilon +$$

$$+ 60x^3\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon^3 - 180x\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^5 + 30rx^3t\sigma^3\sqrt{2}\varepsilon - 270rxt\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon^3 -$$

$$- 45rxt^2\sigma^5\sqrt{2}\varepsilon\Big) e^{-t/\varepsilon^2}.$$

1. *Глиннер Э. Б., Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 712 с.
2. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики: В 2-х т. – М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951. – Т.1. – 476 с.
3. *Турбин А. Ф.* Одномерный процесс броуновского движения – альтернатива модели А. Эйнштейна – Н. Винера – П. Леви // Фрактальний аналіз та суміжні питання. – 1998. – № 2. – С. 47 – 60.
4. *Koroljuk V. S., Turbin A. F.* Mathematical foundation of state lumping of large systems. – Amsterdam: Kluver Acad. Press, 1990. – 280 p.

Получено 08.04.99