УДК 512.553.1

О. М. Хоменко (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

α-ПРИМІТИВНІ ЕЛЕМЕНТИ УЗАГАЛЬНЕНИХ МОДУЛІВ ВЕРМА

Explicit formulae for α-primitive elements in the generalized Verma module are presented, which generalize the known formulae for primitive elements in the Verma modules.

Наведено явні формули для α-примітивних елементів в узагальненому модулі Верма, що узагальнюють відомі формули для примітивних елементів модулів Верма.

1. Позначення та попередні відомості. Нехай $\mathbb{C}$ — множина комплексних чисел; $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел; $\mathfrak{G}$ — алгебра Лі з системою коренів Δ, в якій вибрано деякий базис π; $\Delta = \Delta^+ \bigcup \Delta^-$ — стандартне розбиття системи Δ та W — її група Вейля. Для $\beta \in \Delta$ позначимо через $\mathfrak{G}_\beta$ відповідний кореневий підпростір. Зафіксуємо $\alpha \in \pi$; нехай $\mathfrak{G}^\alpha \simeq \mathrm{sl}(2)$ — підалгебра, породжена $\mathfrak{G}_{\pm\alpha}$. Позначимо

$$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\gamma \in \Delta^+} \gamma, \quad \mathfrak{N}_\pm = \sum_{\gamma \in \Delta^+} \mathfrak{G}_{\pm\gamma}, \quad \mathfrak{N}^\alpha_\pm = \sum_{\gamma \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}} \mathfrak{G}_{\pm\gamma},$$

$$\mathfrak{H}^\alpha = \{ h \in \mathfrak{H} \mid \alpha(h) = 0 \}.$$

Тоді маємо $\mathfrak{G} = \mathfrak{N}_- \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{N}_+ = \mathfrak{G}^\alpha \oplus \mathfrak{N}^\alpha_- \oplus \mathfrak{H}^\alpha \oplus \mathfrak{N}^\alpha_+$. Нехай також $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{G}^\alpha \bigcap \mathfrak{H}$, тоді $\mathfrak{G}^\alpha = \mathfrak{G}_\alpha \oplus \mathfrak{H}_\alpha \oplus \mathfrak{G}_{-\alpha}$. Зафіксуємо деяку базу Шевалле $\{X_\alpha, \alpha \in \Delta\} \bigcup \{H_\alpha, \alpha \in \pi\}$ алгебри $\mathfrak{G}$. Для алгебри Лі $\mathfrak{A}$ позначимо через $U(\mathfrak{A})$ її універсальну обвідну алгебру.

$\mathfrak{G}$-модуль V називається ваговим, якщо $V = \oplus_{\lambda \in \mathfrak{H}^*} V_\lambda$, де $V_\lambda = \{ v \in V \mid \forall h \in \mathfrak{H};\, hv = \lambda(h) v \}$. Нехай V — ваговий $\mathfrak{G}$-модуль. Ненульовий елемент $v \in V$ називається примітивним (відносно π), якщо $v \in V_\lambda$ для деякого $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ та $\mathfrak{N}_+ v = 0$. Ненульовий елемент $v \in V$ називається α-примітивним (відносно π), якщо $v \in V_\lambda$ для деякого $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ та $\mathfrak{N}^\alpha_+ v = 0$. Модуль називається α-розшарованим, якщо елементи $X_{\pm\alpha}$ діють ін'єктивно на V.

Нагадаємо деякі факти із структури систем коренів (див. [1], §1.4). Група W породжена відбиттями s_β, $\beta \in \pi$, тобто кожний елемент $\omega \in W$ має вигляд

$$\omega = s_1 \ldots s_j, \tag{1}$$

де $s_i = s_{\beta_i}$, β_i, $i = 1, \ldots, j$, — скінченна система (можливо з повтореннями) елементів з π. Через $l(\omega)$ позначимо довжину найкоротшого (зведеного) розкладу ω вигляду (1).

Для кожного $\omega \in W$ покладемо $\Delta_\omega = \{ \beta \in \Delta^+ \mid \omega^{-1}\beta \in \Delta^- \}$.

Твердження ([1], твердження 1.4.2). $\Delta_\omega = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_j\}$, *де корені* $\gamma_i \in \Delta^+$, $i = 1, \ldots, j$, *визначаються рівностями*

$$\gamma_i = \omega_{i-1}\beta_i, \quad \omega_i = s_1 \ldots s_i, \quad \omega_0 = 1, \tag{2}$$

відносно розкладу (1). *Зокрема,* $l(\omega) = \mathrm{card}\,\Delta_\omega$.

Група W містить єдиний елемент $\overline{\omega} = s_1 \ldots s_m$ максимальної довжини

$l(\overline{\omega}) = m = \operatorname{card}\Delta^+$. Крім того, $\Delta^+ = \Delta_{\overline{\omega}} = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$, де корені γ_i визначаються рівностями (2) при $j = m$. В цьому випадку покладемо $\gamma_i < \gamma_j$ при $i < j$. Будемо говорити, що порядок $<$ множини Δ^+ індукований (зведеним) розкладом (1) елемента $\overline{\omega}$.

Деякий порядок $<$ на Δ^+ називається нормальним, якщо для кожного розкладу $\gamma_j = \gamma_i + \gamma_k$ виконується $\gamma_i < \gamma_j < \gamma_k$ або $\gamma_k < \gamma_j < \gamma_i$.

З теореми модулів Верма (див. [1, 2]) випливає, що кожний ненульовий гомоморфізм $M(\mu) \to M(\nu)$ є композицією вкладень $M(\lambda - n\gamma) \to M(\lambda)$, визначених при $\gamma \in \Delta^+$, $\lambda(H_\gamma) = n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. При цьому кожне таке вкладення однократне, крім того, старший вектор v_γ модуля $M(\lambda - n\gamma)$ отримується із старшого вектора v_0 модуля $M(\lambda)$ за допомогою елемента $\theta_{\lambda,\gamma,n} \in U(\mathfrak{G})$, визначеного з точністю до константи. В [1] було обчислено елементи $\theta_{\lambda,\gamma,n}$ в явному вигляді.

Теорема 1 ([1], теорема 7.1.4). *Для кожного нормального порядку справедлива рівність*

$$\theta_{\lambda,\gamma,n} = \operatorname{const} X_{-\beta_1}^{k_1} \ldots X_{-\beta_j}^{k_j} X_{-\beta_{j+1}}^{n} X_{-\beta_j}^{n_j} \ldots X_{-\beta_1}^{n_1},$$

де $\gamma = \gamma_{j+1}$, β_i *— прості корені, пов'язані з коренями* γ_i, $i = 1, \ldots, j+1$, *співвідношеннями* (2), $\nu_i = \omega_{i-1}^{-1}\lambda$, $v_i = \nu_i(H_{\beta_i})$ $(n_{j+1} = n)$, $k_i + n_i = \mu_i(H_{\beta_i})$, *де* μ_i *— вага елемента*

$$\theta_i = X_{-\beta_{i+1}}^{k_{i+1}} \ldots X_{-\beta_j}^{k_j} X_{-\beta_{j+1}}^{n} X_{-\beta_j}^{n_j} \ldots X_{-\beta_{i+1}}^{n_{i+1}} \in U(\mathfrak{G}).$$

Природним узагальненням модулів Верма є так звані узагальнені модулі Верма (див., наприклад, [3]). В даній роботі ми отримаємо аналог теореми 1 у випадку α-розшарованих узагальнених модулів Верма.

Відомо, що $c = (H_\alpha + 1)^2 + 4X_{-\alpha}X_\alpha$ породжує центр $\mathfrak{G}^\alpha$. Довільна пара a, $b \in \mathbb{C}$ задає єдиний нерозкладний ваговий $\mathfrak{G}^\alpha$-модуль $N(a, b)$, на якому $X_{-\alpha}$ діє бієктивно, a є власним значенням H_α, b — власним значенням c та кожен ваговий підпростір $N(a, b)$ одновимірний.

Оскільки $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_\alpha \oplus \mathfrak{H}^\alpha$, то довільний елемент $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ можна однозначно записати у вигляді $\lambda = \lambda_\alpha + \lambda^\alpha$, де $\lambda_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$, $\lambda^\alpha \in \mathfrak{H}^\alpha$. Нехай $a, b \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ такі, що $(\lambda - \rho)(H_\alpha) = (\lambda_\alpha - 1)(H_\alpha) = \alpha$. Визначимо структуру $\mathfrak{H}$-модуля на $N(a, b)$, поклавши $hv = \lambda^\alpha(h)v$ для довільних $h \in \mathfrak{H}^\alpha$ та $v \in N(a, b)$. Далі ми можемо розглядати $N(a, b)$ як $D = \mathfrak{H} + \mathfrak{G}^\alpha \oplus \mathfrak{N}_+^\alpha$-модуль, поклавши $nv = 0$ для довільних $n \in \mathfrak{N}_+^\alpha$ та $v \in N(a, b)$.

Визначимо $\mathfrak{G}$-модуль

$$M_\alpha(\lambda, b) = U(\mathfrak{G}) \underset{U(D)}{\otimes} N(a, b),$$

асоційований з π, α, λ, b. Він називається узагальненим модулем Верма (у випадку індукування з $\mathrm{sl}(2, \mathbb{C})$-підалгебри). Зауважимо, що іноді узагальненим модулем Верма називають модуль, індукований з незвідного $N(a, b)$ (див. [4]). Для зручності знехтуємо цією умовою.

Змінимо параметризацію $M_\alpha(\lambda, b)$. Для p такого, що $p^2 = b$, покладемо $M(\lambda, p) = M_\alpha(\lambda, b)$. Тоді завжди $M(\lambda, p) = M(\lambda, -p)$. Позначимо через

$\Omega = \{ (\lambda, p) \mid \lambda \in \mathfrak{H}^*, \ p \in \mathbb{C} \}$ простір параметрів узагальнених модулів Верма.

Наведемо деякі факти з теорії узагальнених модулів Верма (див. [3]).

Лема 1 ([3], твердження 3.1). 1. *Як векторний простір* $M(\lambda, b) = U(\mathfrak{N}_-^\alpha) \otimes_{\mathbb{C}} N(a, b)$, *зокрема, це ваговий* $\mathfrak{N}_-^\alpha$*-вільний модуль із скінченновимірними ваговими підпросторами.*

2. $M(\lambda, p)$ *має єдиний максимальний підмодуль.*

3. $M(\lambda, p) \simeq M(\lambda + k\alpha, p)$ *для всіх* $k \in \mathbb{Z}$.

4. $M(\lambda, p)$ *є* α*-розшарованим тоді і лише тоді, коли* $p^2 \neq (\lambda(H_\alpha) + 2l + 1)^2$ *для всіх* $l \in \mathbb{Z}$.

5. *Якщо модуль* $M(\lambda, p)$ α*-розшарований, то довільний його підмодуль є* α*-розшарованим та для* $M(\mu, q) \subset M(\lambda, p)$ $\dim \hom (M(\mu, q), M(\lambda, p)) = 1$.

Позначимо $\Omega_r = \{(\lambda, p) \in \Omega \mid \lambda(H_\alpha) = r\}$. У [3] визначені вкладення $\eta_r : \Delta \to \Omega_r$ та білінійна форма $(\cdot, \cdot)_r : \Omega_r \times \Omega_r \to \mathbb{C}$ такі, що $\eta_r(\Delta)$ — система коренів типу Δ° (дуальна до Δ) у Ω_r відносно форми $(\cdot, \cdot)_r$. Для $\gamma \in \Delta$ та $(\lambda, p) \in \Omega_r$ визначимо відбиття $\tilde{s}_\gamma : \Omega_r \to \Omega_r$ відносно кореня $\eta_r(\gamma)$ таким чином:

$$\tilde{s}_\gamma(\lambda, p) = (\lambda, p) - 2\frac{((\lambda, p), \eta_r(\gamma))_r}{(\eta_r(\gamma), \eta_r(\gamma))_r}\eta_r(\gamma).$$

Група W_α, породжена $\tilde{s}_\gamma$, $\gamma \in \Delta$, ізоморфна до W.

Лема 2 ([3], лема 7.2). *Нехай* $(\lambda, p) \in \Omega$, $\gamma \in \Delta^+$, $\tilde{s}_\gamma \in W_\alpha$. *Якщо* $p = \lambda(H_\alpha)$, *то* $\tilde{s}_\gamma(\lambda, p) = \left(s_\gamma(\lambda), s_\gamma(\lambda)(H_\alpha)\right)$.

Теорема 2 ([3], теорема 7.6). *Для* $(\lambda, p) \in \Omega_r$, $(\mu, q) \in \Omega$ *вкладення* $M(\mu, q) \subset M(\lambda, p)$ *має місце тоді і лише тоді, коли існують* $k \in \mathbb{Z}$ *та послідовність коренів* $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ *такі, що* $\tilde{s}_{\gamma_1} \ldots \tilde{s}_{\gamma_m}(\lambda, p) = (\mu + k\alpha, q)$, *і справедливе наступне: для довільного* $1 \leq l \leq m$, *якщо* $\gamma_1 \neq \alpha$, *то* $\left(\tilde{s}_{\gamma_{l+1}} \ldots \tilde{s}_{\gamma_m}(\lambda, p), \eta(\gamma_l)\right)_r \in \mathbb{N}$.

Таким чином, щоб знайти α-примітивний елемент довільного підмодуля $M(\mu, q) \subset M(\nu, t)$, досить знайти його для підмодулів вигляду $M\left(\tilde{s}_\gamma(\lambda, p)\right) \subset M(\lambda, p)$ у випадку $((\lambda, p), \eta(\gamma))_r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Метою даної роботи є обчислення цих елементів.

2. Основні результати. Для формулювання основної теореми нам потрібні такі леми.

Лема 3. *Якщо* $p^2 = (\lambda(H_\alpha))^2$, *то в модулі* $M(\lambda, p)$ *є підмодуль, ізоморфний модулю Верма* $M(\lambda)$, *що породжений довільним ненульовим вектором* $v \in M(\lambda, p)_{\lambda - p}$.

Доведення. Зауважимо, що $\dim M(\lambda, p)_{\lambda - p} = 1$. Виберемо довільний ненульовий елемент $v \in M(\lambda, p)_{\lambda - p}$. Модуль $M(\lambda, p)$ є $\mathfrak{N}^\alpha$-вільним. З конструкції $M(\lambda, p)$ випливає, що $X_{-\alpha} v \neq 0$ для довільного $0 \neq v \in M(\lambda, p)$. Крім того,

$$cv = p^2 v = \lambda(H_\alpha)^2 v = ((H_\alpha + 1)^2 + 4X_{-\alpha}X_\alpha)v = \lambda(H_\alpha)^2 v + 4X_{-\alpha}X_\alpha v.$$

Звідси $4X_{-\alpha}X_\alpha v = 0$, отже, $X_\alpha v = 0$. Тому $\mathfrak{N}_- v$ — підмодуль в $M(\lambda, p)$, ізоморфний $M(\lambda)$ (див [2]).

Для довільних $\lambda \in \mathfrak{H}$, $p \in \mathbb{C}$ покладемо

$$f(\lambda, p) = \lambda - \frac{\lambda(H_\alpha) - p}{\alpha(H_\alpha)}\alpha.$$

З леми 3 випливає такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Для довільних* $\lambda \in \mathfrak{H}^*$, $p \in \mathbb{C}$ *в модулі* $M(f(\lambda, p), p)$ *є підмодуль, ізоморфний* $M(f(\lambda, p))$.

Лема 4. *Для* $\gamma \in \Delta^+$

$$\left[X_{-\alpha}^m, X_{-\gamma}\right] = \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} X_{-\gamma-i\alpha} X_{-\alpha}^{m-i} \prod_{j=0}^{i-1} N_{-\alpha, -\gamma-j\alpha},$$

де $N_{\alpha,\beta}$ — *структурні константи алгебри* $\mathfrak{G}$ *та* $X_{-\gamma-i\alpha} = 0$ *для* $-\gamma - i\alpha \notin \notin \Delta$.

Доведення можна провести методом математичної індукції. Очевидно, це справедливо при $m = 1$. Припустимо, що це справедливо для деякого m, та доведемо це для $m + 1$:

$$\left[X_{-\alpha}^{m+1}, X_{-\gamma}\right] = X_{-\alpha}^m \left[X_{-\alpha}, X_{-\gamma}\right] + \left[X_{-\alpha}^m, X_{-\gamma}\right] X_{-\alpha}.$$

Отже, згідно з припущенням індукції, маємо

$$\left[X_{-\alpha}^{m+1}, X_{-\gamma}\right] = X_{-\alpha}^m X_{-\gamma-\alpha} N_{-\gamma,-\alpha} + \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} X_{-\gamma-i\alpha} X_{-\alpha}^{m-i+1} \prod_{j=0}^{i-1} N_{-\alpha,-\gamma-j\alpha} =$$

$$= X_{-\gamma-\alpha} X_{-\alpha}^m N_{-\gamma,-\alpha} + \left[X_{-\alpha}^m, X_{-\gamma-\alpha}\right] N_{-\gamma,-\alpha} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \binom{m}{i} X_{-\gamma-i\alpha} X_{-\alpha}^{m-i+1} \prod_{j=0}^{i-1} N_{-\alpha,-\gamma-j\alpha}.$$

Ще раз застосувавши припущення індукції та згрупувавши доданки, отримаємо

$$\left[X_{-\alpha}^{m+1}, X_{-\gamma}\right] = \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i} X_{-\gamma-i\alpha} X_{-\alpha}^{m-i+1} \prod_{j=0}^{i-1} N_{-\alpha,-\gamma-j\alpha}.$$

У випадку $\gamma \in \pi$ ця лема була сформульована у [5] (див. додаток).

Для $\gamma \in \Delta^+$ позначимо через $a(\gamma)$ максимальне ціле число таке, що $\gamma + a(\gamma)\alpha \in \Delta$. Покладемо

$$\zeta_{\gamma,n,m} := \prod_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{i=0}^{a(\gamma)} \left(\frac{1}{i!} X_{-\gamma-i\alpha} X_{-\alpha}^{a(\gamma)-i} \prod_{j=0}^{i-1} ((m - k\,a(\gamma) - j) N_{-\alpha,-\gamma-j\alpha} \right)\right).$$

***Наслідок* 2.** *Для* $m \geq n a(\gamma)$, $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ *справедливо* $X_{-\alpha}^m X_{-\gamma}^n = \zeta_{\gamma,n,m} X_{-\alpha}^{m-na(\gamma)}$.

Доведення випливає з леми 4 та означення $\zeta_{\gamma,n,m}$.

Позначимо

$$r_i = \sum_{l=1}^{i-1} k_l\, a(\beta_l), \qquad \tilde{r}_i = \sum_{l=1}^{j+1} k_l\, a(\beta_l) + \sum_{l=1}^{i-1} n_{j+1-l}\, a(\beta_{j+1-l}),$$

$$\zeta_{\lambda,\gamma,n,m} := \prod_{i=1}^{j+1} \zeta_{\beta_i, k_i, m-r_i} \prod_{i=1}^{j} \zeta_{\beta_{j+1-i}, n_{j+1-i}, m-\tilde{r}_i},$$

$$S_\lambda := \sum_{l=1}^{j+1} k_l\, a(\beta_l) + \sum_{l=1}^{j} n_{j+1-l}\, a(\beta_{j+1-l}),$$

де j, β_i, k_i, n_i визначені в теоремі 1 для елемента $\theta_{\lambda,\gamma,r}$. Тоді справедливий такий наслідок.

***Наслідок* 3.** *Для* $m \in \mathbb{N}$ *справедливо* $X_{-\alpha}^{m+S_\lambda}\theta_{\lambda,\gamma,n} = \xi_{\lambda,\gamma,n,m+S_\lambda}X_{-\alpha}^{m}$.

Доведення випливає з наслідку 2 та означення $\theta_{\lambda,\gamma,n}$ і $\xi_{\lambda,\gamma,n,m}$.

Обчислимо α-примітивні елементи у випадку не α-розшарованих модулів.

Лема 5. *Для* $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathfrak{H}^*$ *покладемо* $\nu = \lambda + k\alpha$. *Нехай* $\gamma \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$, $n = \nu\{H_\gamma\} \in \mathbb{N}$, $M(\tilde{s}_\gamma(\lambda, \nu(H_\alpha))) \subset M(\lambda, \nu(H_\alpha))$ *та* $v \in M(\lambda, \nu(H_\alpha))_{\lambda-p}$ — *ненульовий α-примітивний елемент модуля* $M(\lambda, \nu(H_\alpha))$. *Тоді елемент* $\tilde{\theta}_{\lambda,\gamma,n,\nu(H_\alpha)}v := \xi_{\nu,\gamma,n,k+S_\nu}v \neq 0$ *є α-примітивним у модулі* $M(\tilde{s}_\gamma(\lambda, \nu(H_\alpha)))$.

Доведення. Згідно з лемами 2, 3 мають місце вкладення

$$M(s_\gamma(\nu)) \subset M(s_\gamma(\nu), s_\gamma(\nu)(H_\alpha)) \simeq M(\tilde{s}_\gamma(\lambda, \nu(H_\alpha))) \subset M(\lambda, \nu(H_\alpha))$$

та

$$M(s_\gamma(\nu)) \subset M(\nu) \subset M(\lambda, \nu(H_\alpha)).$$

Розглянемо випадок $\nu(H_\alpha) \notin \mathbb{N}$. В цьому випадку $X_\alpha^k v$ — ненульовий примітивний елемент модуля $M(\nu) \subset M(\lambda, \nu(H_\alpha))$. Елемент $\theta_{\nu,\gamma,n}X_\alpha^k v \in M(s_\gamma(\nu))$ є примітивним, зокрема α-примітивним у модулі $M(\tilde{s}_\gamma(\nu, \nu(H_\alpha)))$, а отже, α-примітивним є і елемент $X_{-\alpha}^{k+S_\nu}\theta_{\nu,\gamma,n}X_\alpha^k v$. Згідно з наслідком 3, елемент $X_{-\alpha}^{k+S_\nu}\theta_{\nu,\gamma,n}X_\alpha^k v$ дорівнює $\xi_{\nu,\gamma,n,k+S_\nu}X_{-\alpha}^k X_\alpha^k v$, але $X_{-\alpha}^k X_\alpha^k v = \mathrm{const}\, v \neq 0$. Тому елемент $\xi_{\nu,\gamma,n,k+S_\nu}v$ є ненульовим α-примітивним елементом модуля $M(\tilde{s}_\gamma(\lambda, \nu(H_\alpha)))$.

Розглянемо тепер випадок $\nu(H_\alpha) \in \mathbb{N}$. Позначимо $p = \nu(H_\alpha)$. Нехай u — породжуючий елемент підмодуля $M(\nu) \subset M(\lambda, \nu(H_\alpha))$. Елемент $X_{-\alpha}^p u \neq 0$ є примітивним та $X_\alpha^{k-p}v = \mathrm{const}\, X_{-\alpha}^p u \neq 0$. Вектор $X_{-\alpha}^{k+S_\nu}\theta_{\nu,\gamma,n}u \neq 0$ є α-примітивним. З іншого боку,

$$X_{-\alpha}^{k+S_\nu}\theta_{\nu,\gamma,n}u = \xi_{\nu,\gamma,n,k+S_\nu}X_{-\alpha}^k u = \mathrm{const}\, \xi_{\nu,\gamma,n,k+S_\nu}X_{-\alpha}^{k-p}X_\alpha^{k-p}v = \\ = \mathrm{const}\, \xi_{\nu,\gamma,n,k+S_\nu} \neq 0.$$

Лему доведено.

Лема 6. *Зафіксуємо*

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} f_i u_i,$$

де $f_i \in U(\mathfrak{H})$, $u_i \in U(\mathfrak{H}_-)$ *та* $p \in \mathbb{C}$. *Нехай для модуля* $M(\lambda, p)$, $(\lambda, p) \in \Omega$, $v_{\lambda,p}$ *позначає α-примітивний елемент ваги* $\lambda - p$. *Тоді*

$$A := \{(\lambda, p) \in \Omega \mid \psi X_{-\alpha}^6 v_{\lambda,p} - \alpha\text{-}\textit{примітивний елемент}\}$$

замкнена в топології Заріського.

Доведення. За допомогою безпосередніх обчислень можна переконатись, що для $\gamma \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$

$$X_\gamma \psi X_{-\alpha}^6 v_{\lambda,p} = \sum_{i=1}^{m'} \hat{f}_{i,\gamma}\hat{u}_{i,\gamma}c^{k(i)}v_{\lambda,p},$$

де $\hat{f}_{i,\gamma} \in U(\mathfrak{H})$, $\hat{u}_{i,\gamma} \in U(\mathfrak{N}_-)$, $k(i) \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Зауважимо, що оскільки $\max_{\gamma \in \Delta} a(\gamma) \le 6$ (див.[6]), то співмножники у правій частині (крім c) не міститимуть елементів X_α. Елемент $\psi X_{-\alpha}^k v_{\lambda, p}$ є α-примітивним тоді і тільки тоді, коли $X_\gamma \psi X_{-\alpha}^k v_{\lambda, p} = 0$ для всіх $\gamma \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$, тобто умова $\psi X_{-\alpha}^k v_{\lambda, p}$ є α-примітивним елементом еквівалентна умові $\hat{f}_{i,\gamma}(\lambda, p) = 0$ для всіх $\gamma \in \Delta^+ \setminus \{\alpha\}$, $i = 1, \ldots, m'$. Останнє означає, що A замкнена в топології Заріського.

Тепер можемо сформулювати і довести основну теорему.

Теорема 3. *Нехай $M(\lambda, p)$ — узагальнений модуль Верма, $\gamma \in \Delta^+$ такий, що $n = ((\lambda, p), \eta(\gamma))_r \in \mathbb{N}$, v — ненульовий елемент з $M(\lambda, p)_{\lambda - p}$. Тоді елемент $\tilde{\theta}_{\lambda,\gamma,n,p} v$ є ненульовим α-примітивним елементом модуля $M(\tilde{s}_\gamma(\lambda, p))$, де*

$$\tilde{\theta}_{\lambda,\gamma,n,p} = \xi_{f(\lambda, p), \gamma, n, (p - \lambda(H_\alpha))/2 + S_{f(\lambda, p)}}.$$

Доведення. Розглянемо множину

$$B = \{(f(\lambda, p) - m\alpha, p) \in \Omega \mid m \in \mathbb{N},\ m \ge 6\}.$$

Легко бачити, що для довільного елемента $(\mu, p) \in B$ твердження теореми справедливе. Справді, розглянемо модуль $M(\mu, p)$ та ненульовий елемент $v_{\mu, p} \in M(\mu, p)_{\mu - p}$. Оскільки $((\mu, p), \eta(\gamma))_r = n$, то елемент $\tilde{\theta}_{\mu,\gamma,n,p} v_{\mu,p}$ є ненульовим α-примітивним елементом модуля $M(\tilde{s}_\gamma(\mu, p))$, згідно з лемою 5. Отже, згідно з лемою 6, твердження теореми справедливе і для замикання множини B в топології Заріського. Залишилося лише зауважити, що (λ, p) належить цьому замиканню.

1. *Желобенко Д. П.* Представления редуктивных алгебр Ли. – М.: Наука, 1994. – 352 с.
2. *Диксмье Ж.* Универсальные обертывающие алгебры – М.: Мир, 1978. – 408 с.
3. *Futorny V., Mazorchuk V.* Structure of α-stratified modules for finite-dimentional Lie algebras // J. Algebra. – 1996. – **183**. – P. 456 – 482.
4. *Футорный В. М.* Некоторое обобщение модулей Верма и неприводимые представления алгебры $\mathrm{sl}(3, \mathbb{C})$ // Укр. мат. журн. – 1991. – 48, № 2. – С. 492 – 497.
5. *Ашерова Р. М., Смирнов Ю. Ф., Толстой В. М.* Проекционные операторы для простых групп Ли // Журн. теорет. и мат. физики. – 1971. – 8, № 2. – С. 255 – 271.
6. *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. – М.:Мир, 1972. – 333 с.

Одержано 26.01.98,
після доопрацювання — 01.06.98