УДК 517.544

**Ю. Й. Черский** (Одес. акад. стр-ва и архитектуры)

# ЭКСТРЕМАЛЬНАЯ ЗАДАЧА, ВОЗНИКШАЯ ИЗ УРАВНЕНИЯ ВИНЕРА – ХОПФА

We solve in the closed form an extremal problem which is obtained after replacing the condition $u(x)=0$, $x<0$, for the solution of the Wiener–Hopf equation by the condition of minimum of quadratic functional of the function $u(x)\exp(-x), -\infty<x<\infty$.

Розв'язано у замкненій формі екстремальну задачу, яка отримана шляхом заміни умови $u(x)=0$, $x<0$, для розв'язку рівняння Вінера – Хопфа умовою мінімуму квадратичного функціонала від функції $u(x)\exp(-x), -\infty<x<\infty$.

В интегральном уравнении Винера – Хопфа можно считать, что искомая функция равна нулю на отрицательной полуоси. Отказавшись от этого условия, рассмотрим экстремальную задачу, в которой ищется комплекснозначная функция $u(x)$ на всей оси $x$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x}|u(x)|^2\,dx \to \inf, \tag{1}$$

$$u(x) + \int_{-\infty}^{\infty} k(x-s)\,u(s)\,ds = g(x), \qquad x>0. \tag{2}$$

Здесь число $\alpha>0$ задано. Ядерная функция $k(x)$ задана в пространстве $L(-\infty,\infty)$, а функция $g(x)$ — в пространстве $L^2(0,\infty)$. Естественно потребовать, чтобы

$$u(x)\in L^2(-\infty,\infty), \qquad u(x)\exp(-\alpha x/2)\in L^2(-\infty,\infty). \tag{3}$$

Докажем следующую теорему.

**Теорема.** *Пусть в дополнение к сформулированным выше условиям*

$$1+K(x)\equiv 1+\int_{-\infty}^{\infty} k(s)e^{ixs}\,ds \neq 0, \qquad -\infty<x<\infty.$$

*Тогда решение задачи* (1) – (3) *существует, единственно и его можно представить в квадратурах.*

***Доказательство*** разобьем на несколько пунктов.

1. *Приведение к равносильной системе уравнений.* Задача (1) – (3) — это „гладкая задача с равенством", содержащая комплексные величины. Такую задачу в вещественном варианте можно найти, например, в [1, с. 44, 74, 79]. В данном случае функцию Лагранжа $\mathcal{L}(u)$ можно рассматривать в виде

$$\operatorname{Re}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x}|u(x)|^2\,dx + 2\int_0^{\infty} z_+(s)\left[\overline{u(s)} + \int_{-\infty}^{\infty}\overline{k(x-s)}\,\overline{u(x)}\,dx - \overline{g(s)}\right]ds\right\}.$$

Здесь $z_+(s)$ — принадлежащий $L^2(-\infty,\infty)$ множитель Лагранжа, равный нулю при $s<0$.

Для произвольной функции $h(x)$, удовлетворяющей условиям вида (3), найдем приращение

$$\mathcal{L}(u+h) - \mathcal{L}(u) = 2\operatorname{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \overline{h(x)}\Big[e^{-\alpha x}u(x) +$$

$$+ z_+(x) + \int_0^{\infty} \overline{k(x-s)}\, z_+(s)\,ds\Big]dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x}|h(x)|^2 dx.$$

Из последнего равенства следует, что функция $u(x)$ будет решением задачи (1) – (3) тогда и только тогда, когда эта функция вместе с $z_+(x)$ будет решением системы уравнений, состоящей из уравнения (2) и уравнения

$$e^{-\alpha x}u(x) + z_+(x) + \int_0^{\infty} \overline{k(s-x)}\, z_+(s)\,ds = 0, \quad -\infty < x < \infty. \tag{4}$$

2. *Приведение к равносильной краевой задаче для аналитических функций.* Предположим, что задача (1) – (3) разрешима. Тогда, поскольку в равенстве (4) свертка принадлежит пространству $L^2(-\infty, \infty)$, решение $u(x)$ будет удовлетворять более сильному, чем (3), условию

$$u(x) \in L^2(-\infty, \infty), \qquad e^{-\alpha x}u(x) \in L^2(-\infty, \infty). \tag{5}$$

Для получения краевой задачи перейдем в равенствах (2) и (4) к образам Фурье:

$$[1 + K(x)]\,U(x) = G^+(x) + \Phi^-(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{6}$$

$$U(x+i\alpha) + \big[1 + \overline{K(x)}\big]\,Z^+(x) = 0, \quad -\infty < x < \infty. \tag{7}$$

Здесь, кроме $K(x)$, известна функция

$$G^+(x) = \int_0^{\infty} g(s)\,e^{ixs}\,ds \qquad \big(\in L^2(-\infty, \infty)\big).$$

Остальные функции — $U(x)$, $Z^+(x)$ и $\Phi^-(x)$ — искомые предельные значения аналитических функций соответственно в полосе $0 < \operatorname{Im} z < \alpha$ и полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$, $\operatorname{Im} z < 0$. При этом, как известно [2] (гл. V), должна существовать постоянная $C$, ограничивающая интегралы:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |U(x+iy)|^2 dx < C, \quad 0 \le y \le \alpha,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|Z^+(x+iy)\big|^2 dx < C, \quad 0 \le y < \infty, \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|\Phi^-(x+iy)\big|^2 dx < C, \quad -\infty < y \le 0.$$

3. *Решение краевой задачи.* Задача (6) – (8) — это задача Римана на двух параллельных прямых. При иных предположениях такая задача рассмотрена в [3] (п. 3.7); однако лучше не пользоваться приведенными там формулами, содержащими опечатки, а решить задачу (6) – (8) непосредственно, используя свойства коэффициентов.

Сделанные нами предположения относительно ядерной функции совпадают с принятыми в [4], где доказана возможность факторизации

$$1 + K(x) = \frac{Y^+(x)}{Y^-(x)}\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n.$$

Здесь $n$ — целое число, а $Y^+(x)$ и $Y^-(x)$ — предельные значения функций $Y^+(z)$ и $Y^-(z)$, аналитических в полуплоскостях соответственно $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$, непрерывных и не имеющих нулей в замкнутых полуплоскостях и равных единице на бесконечности. Эти функции, как известно, строятся в квадратурах.

Указанная факторизация позволяет представить равенства (6) и (7) в удобном для аналитического продолжения виде

$$\frac{Y^+(x)\,U(x)}{\overline{Y^+(x+i\alpha)}} - H^+(x) = \frac{Y^-(x)\,\Phi^-(x)}{\overline{Y^+(x+i\alpha)}}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^n + H^-(x), \tag{9}$$

$$\frac{Y^+(x+i\alpha)\,U(x+i\alpha)}{\overline{Y^+(x)}} - H^+(x+i\alpha) =$$

$$= -\frac{Y^+(x+i\alpha)\,Z^+(x)}{\overline{Y^-(x)}}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^n - H^+(x+i\alpha). \tag{10}$$

Здесь

$$H(x) = \frac{Y^-(x)\,G^+(x)}{\overline{Y^+(x+i\alpha)}}\left(\frac{x-i}{x+i}\right)^n,$$

$$H^\pm(z) = \pm\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} H(s)\frac{ds}{s-z}, \qquad \pm\operatorname{Im} z > 0.$$

*Случай* $n = 0$. Левые части равенств (9) и (10) — предельные значения одной и той же аналитической в полосе $0 < \operatorname{Im} z < \alpha$ функции; правые части аналитически продолжимы на полуплоскости соответственно $\operatorname{Im} z < 0$ и $\operatorname{Im} z > 0$. Аналитическое продолжение дает нам единую аналитическую на всей плоскости функцию, имеющую свойства вида (8). Согласно теореме Лиувилля эта функция тождественно равна нулю. Отсюда

$$U(x) = \overline{Y^+(x+i\alpha)}\,\frac{H^+(x)}{Y^+(x)}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{11}$$

*Случай* $n > 0$. Аналитическое продолжение согласно равенствам (9) и (10) дает функцию, аналитическую во всей плоскости, кроме точки $z = -i$, где возможен полюс порядка $n$. Поэтому обе части равенства (9) представимы в виде $P_{n-1}(x)\,(x+i)^{-n}$, где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$. Таким образом, в данном случае вместо (11) имеем

$$U(x) = \overline{Y^+(x+i\alpha)}\,\frac{\left[H^+(x) + P_{n-1}(x)\,(x+i)^{-n}\right]}{Y^+(x)}. \tag{12}$$

Для определения многочлена $P_{n-1}(x)$ заметим, что в случае $\operatorname{Im} z > 0$ из равенства (10) следует

$$-\frac{Y^+(z+i\alpha)Z^+(z)}{\overline{Y^-(\overline{z})}}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = H^+(z+i\alpha) + \frac{P_{n-1}(z+i\alpha)}{(z+i\alpha+i)^n},$$

так что для аналитичности функции $Z^+(z)$ в точке $z = i$ необходимы и достаточны условия

$$\frac{d^j}{dz^j}\left[H^+(z+i\alpha)+\frac{P_{n-1}(z+i\alpha)}{(z+i\alpha+i)^n}\right]_{z=i} = 0, \qquad j=0,\ldots,n-1.$$

Эти условия всегда могут быть выполнены; при этом многочлен $P_{n-1}(z+i\alpha)$ будет полностью определен: он равен разложению в ряд Тейлора функции $-(z+i\alpha+i)^n H^+(z+i\alpha)$ по степеням $(z-i)$.

*Случай* $n<0$. Этот случай аналогичен предыдущему, причем теперь

$$\frac{Y^+(x+i\alpha)\,U(x+i\alpha)}{\overline{Y^+(x)}} - H^+(x+i\alpha) = \frac{Q_{|n|-1}(x)}{(x-i)^{|n|}},$$

где $Q_{|n|-1}$ — многочлен степени $|n|-1$, полностью определенный условиями

$$\frac{d^j}{dz^j}\left[H^-(z)-\frac{Q_{|n|-1}(z-i\alpha)}{(z-i\alpha-i)^{|n|}}\right]_{z=-i} = 0, \qquad j=0,\ldots,|n|-1,$$

обеспечивающими аналитичность функции $\Phi^-(z)$ в точке $z=-i$. Итак, в данном случае

$$U(x) = \overline{Y^+(x+i\alpha)}\,\frac{\left[H^+(x)+Q_{|n|-1}(x-i\alpha)\cdot(x-i\alpha-i)^n\right]}{Y^+(x)}. \tag{13}$$

4. *Завершение доказательства теоремы.* В зависимости от знака числа $n$ формулы (11), (12) или (13) определяют в квадратурах единственное решение краевой задачи (6), (7). Проверка показывает, что равномерная ограниченность интегралов (8) также имеет место. Обратный переход к Фурье-оригиналам, в частности,

$$u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U(s)\,e^{-ixs}\,ds,$$

определяет единственное решение системы уравнений (2) и (4) и равносильной ей экстремальной задачи (1) – (3). Теорема доказана.

1. *Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М.* Сборник задач по оптимизации. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
2. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 479 с.
3. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 295 с.
4. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов // Успехи мат. наук. – 1958. – **13**, вып. 5. – С. 3 – 120.

Получено 04.06.98