УДК 519.21

О. К. Закусило (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ЗАУВАЖЕННЯ ПРО ХАРАКТЕРИЗАЦІЮ ГЛОБАЛЬНОЇ ПОВЕДІНКИ ПРОЦЕСУ З НЕЗАЛЕЖНИМИ ПРИРОСТАМИ

We show that the analysis of global behavior of a process with independent increments in terms of the existence of stationary distribution of related storage process implies results that differ from classical ones.

Показано, що аналіз глобальної поведінки процесу з незалежними приростами в термінах існування стаціонарного розподілу пов'язаного з ним процесу збереження приводить до результатів, відмінних від класичних.

Переважна більшість результатів про глобальну поведінку процесу з незалежними приростами $A(t)$ пов'язана з відношеннями $A(t)/h(t)$ і $g(A(t))/t$, де h і g — деякі невипадкові функції. Зокрема, до них належать посилений закон великих чисел для $A(t)$:

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{t}=\mathrm{E}A(1)\right\} = 1 \tag{1}$$

і таке твердження з книги [1] для неспадного процесу $A(t)$ з перетворенням Лапласа

$$\mathrm{E}\exp(-sA(t)) = \exp\left\{-t\int_0^\infty(1-e^{-su})\Lambda(du)\right\} \tag{2}$$

(ми наводимо його в потрібному нам вигляді):

якщо неперервна монотонно зростаюча функція $g(t)$ така, що $g(t_1+t_2)\le$ $\le g(t_1)+g(t_2)$ при $t_1>0$, $t_2>0$ і $\lim_{t\to\infty}\frac{g(t)\Lambda(t,\infty)}{\ln\ln t}=\infty$, а $\varphi(t)$ — функція, обернена до $g(t)$, то

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{A(t)}{\varphi(t)}=\infty\right\} = 1. \tag{3}$$

В роботах [2 – 10] введено досить широкий клас так званих процесів збереження з адитивним входом. В найпростіших ситуаціях вони задавалися рівняннями вигляду

$$x(t) = x(0)-\int_0^t r(x(u))\,du + A(t), \tag{4}$$

де $r(x)$ — неперервна монотонно зростаюча функція, а процес $A(t)$ має перетворення Лапласа (2). Не ставлячи метою наводити потрібні визначення і результати, обмежимося посиланнями на роботи [9, 10]. Введемо лише позначення, які будуть використовуватися далі:

$$t(x,y) = \int_y^x\frac{du}{r(u)}, \qquad A^n(t) = \sum_{s\le t}(A(s)-A(s-))\,I\left(A(s)-A(s-)\ge\frac{1}{n}\right)$$

і $x_0(t)$ — процес, для якого $x_0(0)=0$.

Розглянемо тепер невипадковий процес $f(t)$, який задовольняє рівняння

$$f(t) = f(0)-\int_0^t r(f(u))\,du + h(t), \tag{5}$$

де $h(t)$ — нижня функція для $A(t)$, тобто

$$\mathrm{P}\left\{\liminf_{t\to\infty}\frac{A(t)}{h(t)}>1\right\} = 1. \tag{6}$$

Існування стаціонарного розподілу процесу збереження запасів (4) певним чином характеризує глобальну поведінку процесу $A(t)$ (поведінку при $t \to \infty$). Природно очікувати, що при виконанні умови (6) із існування стаціонарного розподілу процесу (4) випливає обмеженість $f(t)$ і навіть більш сильні твердження про поведінку $f(t)$ при $t \to \infty$, якщо $h(t)$ належить тому чи іншому класу функцій.

Ці очікування справджуються при $\mathrm{E}A(1) < \infty$. В цьому випадку, як вказано в роботі [10], критерієм існування стаціонарного розподілу є умова

$$\lim_{x\to\infty} r(x) > \mathrm{E}A(1),$$

а з (1) випливає, що функція $h(t) = at$ є нижньою, якщо $a < \mathrm{E}A(1)$. Рівняння (5) набере вигляду

$$f(t) = f(0) - \int_0^t r(f(u))\,du + at,$$

і його розв'язок має границю $c = \lim_{t\to\infty} f(t)$, яка є єдиним розв'язком рівняння $r(c) = a$.

Тому несподіваним (у всякому разі, на перший погляд) слід визнати той факт, що при $\mathrm{E}A(1) = \infty$ зі стохастичної обмеженості розв'язку рівняння (4) і умови (6) не випливає обмеженість розв'язку рівняння (5). Для побудови відповідного прикладу доведемо спочатку таке твердження.

Лема. *Існують функції випуску $r(x)$ такі, що зв'язаний з ними процес збереження запасів має стаціонарний розподіл при довільному вхідному процесі $A(t)$.*

Доведення. Розглянемо рівняння (4) із швидкістю випуску $r(x) = e^x$. Оскільки при цьому $t(x, y) = e^{-y} - e^{-x}$, як функція аргументу x, угнута, зростає повільніше лінійної і

$$\int_0^\infty t(u+v, u)\Lambda(dv) = e^{-u}\int_0^\infty \left(1 - e^{-v}\right)\Lambda(dv) < \infty$$

для довільної міри Леві Λ, то твердження леми випливає з результатів роботи [10].

Тепер для побудови потрібного прикладу досить взяти довільний процес $A(t)$ з $\mathrm{E}A(1) = \infty$, нижня функція $h(t)$ якого монотонна і зростає швидше лінійної, тобто $h(t)/t \to \infty$ при $t \to \infty$. (Відомо, що такі процеси існують. До них належать, наприклад, монотонні строго стійкі процеси з показником a, $0 < a < 1$.) Для такої функції $h(t)$ розв'язок рівнянь (4), (5) необмежено зростає при $t \to \infty$.

Можливе пояснення цього факту вбачається в такому:

а) випадковий процес $A(t)$ має стаціонарні прирости; аналогом такої властивості для невипадкової функції $h(t)$ повинна бути лінійність, а побудована нами при $\mathrm{E}A(1) = \infty$ нижня функція зростає швидше лінійної;

б) швидке зростання процесу $A(t)$ відбувається за рахунок його великих стрибків.

Нехай $x^n(t)$ і $\overline{x}^n(t)$ — процеси збереження, пов'язані з вхідними процесами $A^n(t)$ і $\overline{A}^n(t) = A(t) - A^n(t)$. Оскільки інтенсивність стрибків у $A^n(t)$ скінченна, то з результатів роботи [10] випливає, що процес $x^n(t)$ при $r(x) = e^x$ стохастично обмежений (можлива й інша аргументація: довжини інтервалів між стрибками $x^n(t)$ незалежні й однаково показниково розподілені; в кінці кожного з таких інтервалів довжини більшої одиниці значення $x^n(\cdot)$ дорівнює нулю, оскільки $t(x, 0) = 1 - e^{-x} < 1$, а середній час до появи такого інтервалу скінченний). Далі, $\mathrm{E}\overline{A}^n(t) < \infty$, $\overline{A}^n(t)$ зростає лінійно, функція випуску $r(x) = e^x \to \to \infty$ при $n \to \infty$, і з результатів роботи [10] випливає, що $\overline{x}^n(t)$ також стохастично обмежений. Разом з $x^n(t)$ і $\overline{x}^n(t)$ стохастично обмеженим буде й $x^n(t) + \overline{x}^n(t)$. Можна показати, що $x_0(t) \leq x_0^n(t) + \overline{x}_0^n(t) + \ln 2$, тому $x_0(t)$ також стохастично обмежений, а ця властивість для процесу збереження еквівалентна існуванню стаціонарного розподілу [10].

Отже, існування стаціонарного розподілу процесу збереження запасів з вхідним процесом $A(t)$ і швидкістю випуску $r(x)$ характеризує глобальну поведінку $A(t)$ способом, відмінним від того, який задається співвідношенням (3). Взагалі кажучи, рівність (1) також описує глобальну поведінку $A(t)$ інакше.

1. *Скороход А. В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. – М.: Наука, 1964. – 278 с.
2. *Brockwell P. J.* Stationary distributions for dams with additive input and content-dependent release rule // Adv. Appl. Probab. – 1977. – **9**, № 3. – P. 645–663.
2. *Brockwell P. J., Chung K. L.* Emptiness times of a dam with stable input and general release rule // J. Appl. Probab. – 1975. – **12**, № 1. – P. 212–217.
3. *Brockwell P. J., Resnick S. I., Tweedie R. L.* Storage processes with general release rule and additive inputs // Adv. Appl. Probab. – 1982. – **14**, № 2. – P. 392–433.
4. *Cinlar E., Pinsky M.* A stochastic integral in storage theory // Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. – 1971. – **17**, № 3. – P. 227–240.
5. *Cinlar E., Pinsky M.* On dams with additive inputs and a general release rule // J. Appl. Probab. – 1972. – **9**, № 2. – P. 422–429.
6. *Harrison J. M., Resnick S. I.* The stationary distribution and first exit probabilities of a storage process with general release rule // Math. Oper. Res. – 1976. – **1**, № 4. – P. 347–358.
7. *Moran P. A. P.* A theory of dams with continuous input and a general release rule // J. Appl. Probab. – 1969. – **6**, № 1. – P. 88–98.
8. *Rubinovich M., Cohen J. W.* Level crossings and stationary distributions for general dams // Ibid. – 1980. – **17**, № 1. – P. 218–226.
9. *Закусило О. К.* Общие процессы хранения с аддитивным входом // Теория вероятностей и ее применения. – 1989. – **34**, вып. 2. – С. 277–288.
10. *Закусило О. К.* О предельных характеристиках некоторых марковских процессов с детерминированным спосом // Теория вероятностей и мат. статистика. – 1986. – Вып. 34. – С. 53–61.

Одержано 13.06.2000