УДК 519.21

И. А. Ибрагимов (Санкт-Петербург. отд-ние Мат. ин-та РАН, Россия)

ОБ ЭКСТРАПОЛЯЦИИ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ, НАБЛЮДАЕМЫХ В ГАУССОВСКОМ БЕЛОМ ШУМЕ*

We solve a problem of the extrapolation of analytic function belonging to certain class in the case where its values are observed in a white noise of not high intensity.

Розв'язується задача про екстраполяцію аналітичної функції, що належить до певного класу, в ситуації, коли спостерігаються її значення в білому шумі невеликої інтенсивності.

1. Аналитические функции имеют то замечательное свойство, что будучи наблюденными на сколь угодно малом интервале, они немедленно восстанавливаются во всей своей области аналитичности, ибо любое бесконечное множество, имеющее предельную точку в конечной части комплексной плоскости, — множество единственности. Конечно, такая задача восстановления аналитической функции крайне неустойчива и самое малое изменение данных ведет к значительной ошибке в удаленных точках.

В настоящей статье рассматривается одна из простейших задач экстраполяции целой аналитической функции по зашумленным наблюдениям. А именно, наблюдается случайный процесс $X_\varepsilon(t)$:

$$dX_\varepsilon(t) = f(t)dt + \varepsilon dw(t), \qquad a \le t \le b, \tag{1}$$

где $f(z)$ — целая функция, $w(t)$ — винеровский процесс. Для простоты ограничимся функциями f, принимающими вещественные значения на вещественной оси так, что и w — вещественнозначный стандартный винеровский процесс. Задача заключается в том, чтобы по наблюдениям $X_\varepsilon(t)$ восстановить значения $f(z)$ функции f в точках z комплексной плоскости. При этом предполагается, что $f \in \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — некоторый априори заданный класс целых функций. Что касается параметра ε, определяющего уровень шума, то он предполагается известным, ибо его можно точно определить по любому отрезку траектории $X_\varepsilon(t)$ (подробнее о схеме наблюдений (1) см. [1], гл. 7).

Представляется очевидным, что в точках z, далеких от отрезка $[a, b]$, восстановление $f(z)$ невозможно. Наша цель — выяснить, на каком же расстоянии от отрезка наблюдений функцию $f(z)$ можно восстановить с малой погрешностью при малых ε и как величина этого расстояния зависит от априорных сведений о классе $\mathbf{F}$.

При определении множества $\mathbf{F}$ будем пользоваться стандартной классификацией целых функций в соответствии с их ростом, когда $|z| \to \infty$ (см., например, [2]). Обозначим через $\mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$ класс целых аналитических функций $f(z)$, вещественных на вещественной оси и таких, что

$$\sup_{|z| \le r} |f(z)| \le M \exp\{\sigma |r|^\rho\}. \tag{2}$$

Ниже покажем, что значение $f(z)$ может быть восстановлено с погрешностью, стремящейся к нулю, когда $\varepsilon \to 0$, по наблюдениям (1), если точка z находится от интервала $[a, b]$ на расстоянии меньшем $(\ln 1/\varepsilon)^{1/\rho}$, и что для точек z, отстоящих от $[a, b]$ на расстоянии большем, чем $(\ln 1/\varepsilon)^{1/\rho}$, восстановление $f(z)$ уже невозможно. (Случай $\rho = 1$ рассмотрен в работе [3]).

Переходя к точным формулировкам, предполагаем, что интервал наблюю-

* Выполнена при частичной поддержке грантов РФФИ 99-01-00111, 00-15-96019, гранта РФФИ-DFG 99-01-04027, а также гранта 99-1317 INTAS.

дения $[a, b] = [-1, 1]$. Это предположение, конечно, не умаляет общности. Обозначим через D_α круг в комплексной плоскости с центром в нуле и радиусом $(\ln 1/\varepsilon)^{\alpha/\rho}$, $D_\alpha = \{ z : |z| \le (\ln 1/\varepsilon)^{\alpha/\rho} \}$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$. *Существует такая оценка* $\hat{f}(z)$ *функции* $f(z)$, *построенная по наблюдениям* (1), *что для всех* $\beta < \alpha < 1$

$$\begin{gathered} \sup_{z \in D_\beta} \sup_{f \in \mathbf{F}} \mathrm{E}_f \left| f(z) - \hat{f}(z) \right|^2 \le C_{1\beta} \, \varepsilon^{2(1-\alpha)}, \\ \sup_{f \in \mathbf{F}} \mathrm{E}_f \left\{ \sup_{D_\beta} \left| f(z) - \hat{f}(z) \right|^2 \right\} \le C_{2\beta} \, \varepsilon^{2(1-\alpha)}. \end{gathered} \tag{3}$$

Постоянные $C_{j\beta}$ *зависят также от* M, σ, ρ.

Теорема 2. *Пусть в задаче* (1) $\mathbf{F} = \mathbf{F}(M, \sigma, \rho)$. *Пусть* z — *произвольная точка внешности круга* D_α, $\alpha > 1$. *Тогда для всех* $\varepsilon < \varepsilon_0(\alpha, M, \sigma, \rho)$

$$\inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \mathbf{F}} \mathrm{E}_f \left| f(z) - \hat{f} \right|^2 > \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным оценкам $\hat{f}$, *построенным по наблюдениям* (1).

2. ***Доказательство теоремы* 1** (ср. с [4]). Пусть $\{ P_n(z), n = 0, 1, \ldots \}$ — последовательность полиномов Лежандра, т. е. полная ортонормальная на $[-1, 1]$ (по отношению к мере Лебега) последовательность, причем P_n — полином степени n [5]. Разложим функцию $f(t)$ в ряд Фурье по полиномам Лежандра:

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t), \qquad a_n = \int_{-1}^{1} f(t) P_n(t) \, dt. \tag{5}$$

Естественными оценками для a_n являются статистики

$$\hat{a}_n = \int_{-1}^{1} P_n(t) \, dX_\varepsilon(t).$$

Рассмотрим в качестве оценок для $f(z)$ случайные полиномы

$$f_N(z) = \sum_{n=0}^{N} \hat{a}_n P_n(z),$$

где окончательный выбор N будет сделан ниже. Формальные выкладки дают

$$f(z) - f_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n P_n(z) + \varepsilon \sum_{n=0}^{N} \xi_n P_n(z), \tag{6}$$

где

$$\xi_n = -\int_{-1}^{1} P_n(t) \, dw(t), \qquad n = 0, 1, \ldots, N,$$

образуют последовательность независимых гауссовых случайных величин с $\mathbf{E}\xi_n = 0$, $\mathbf{E}\xi_n^2 = 1$.

Чтобы убедиться в сходимости ряда (6), оценим коэффициенты a_n. С этой целью рассмотрим разложение $f(t)$ в ряд Фурье по полиномам Чебышева $T_n(t) = 2/\pi \cos(n \arccos t)$ (см. [5]):

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n T_n(t).$$

Полиномы Чебышева ортонормальны с весом $(1-t^2)^{-1/2}$, так что

$$b_n = \int_{-1}^{1} \frac{f(t)T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt.$$

Поскольку частные суммы рядов Фурье порядка n по полиномам Лежандра и Чебышева доставляют наилучшее приближение полиномами степени n в $L_2(-1, 1)$ и в $L_2(-1, 1)$ с весом $(1-t^2)^{-1/2}$ соответственно, то

$$\sum_{\nu=N+1}^{\infty} |a_\nu|^2 = \inf_Q \int_{-1}^{1} |f(t)-Q(t)|^2\,dt \le \inf_Q \int_{-1}^{1} \frac{|f(t)-Q(t)|^2}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \sum_{n=N+1}^{\infty} |b_n|^2,$$

где нижняя грань берется по всем полиномам Q степени не выше N. Коэффициенты

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t)\cos(\arccos t)\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} f\left(\frac{1}{2}\left(z+z^{-1}\right)\left(z^n+z^{-n}\right)\right)\frac{dz}{z}.$$

Заменив согласно теореме Коши контур интегрирования окружностями $|z| = R$ или $|z| = R^{-1}$, найдем

$$|b_n| \le 2R^{-n} \max_{|z|\le R} |f(z)| \le 2M R^{-n} e^{\sigma R^\rho}.$$

Минимизируя по R, получаем неравенство

$$|b_n| \le 2M(\sigma e)^{\frac{n}{\rho}} \left(\frac{n}{\rho}\right)^{-\frac{n}{\rho}}.$$

Отсюда следует, что для $n > N$

$$|a_n|^2 \le \sum_{n}^{\infty} |b_k|^2 \le 4M^2 \int_{n}^{\infty} \exp\left\{-\frac{2n}{\rho}\ln\frac{N}{e\rho\sigma}\right\}dx \le 2M^2 \exp\left\{-\frac{2n}{\rho}\ln\frac{N}{e\rho\sigma}\right\}.$$

В силу одного результата С. Н. Бернштейна [6, с. 74], полином $Q(z)$ степени n удовлетворяет неравенству

$$|Q(z)| \le \max_{-1\le x\le 1} |Q(x)| \left|z+\sqrt{z^2-1}\right|^n.$$

Однако для полиномов Лежандра [5]

$$\max_{-1\le x\le 1} |P_n(x)| = P_n(1) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}.$$

Следовательно,

$$|P_n(z)| \le \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|^n \le \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,(2|z|+1)^n.$$

Таким образом, ряд в (6) сходится для всех z и, если $|z| = R$, то для $N > 2e\rho\sigma(2R+1)^\rho$

$$\mathrm{E}\left|f(z)-f_N(z)\right|^2 \le M^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \sqrt{2n+1}\,(2R+1)^n \exp\left\{-\frac{n}{\rho}\ln\frac{n}{e\rho\sigma}\right\} +$$

$$+\ \varepsilon^2 \sum_{n=0}^{N} (2n+1)(2R+1)^{2n} \le C_1 N (2R+1)^2 N\left(\exp\left(-\frac{2N\ln N}{\rho}\right)+\varepsilon^2\right),$$

где постоянная C_1 зависит от M, σ, ρ. Выбирая $N \sim (\rho\ln(1/\varepsilon))/(\ln\ln(1/\varepsilon))$, находим, что для $R<(\ln 1/\varepsilon)^{\alpha/\rho}$ и $\beta<\alpha$

$$\mathrm{E}\left|f(z)-f_N(z)\right|^2 \le C^2\varepsilon^2 \exp\left\{\frac{2\rho\ln(1/\varepsilon)}{\ln\ln(1/\varepsilon)}\ln(2R+1)\right\}\frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln\ln(1/\varepsilon)} \le C_\beta \varepsilon^{2(1-\beta)}.$$

Первое из неравенств (3) доказано, а второе неравенство доказывается аналогично. Нужно лишь учесть, что

$$\mathrm{E}\max_{z\in D_\alpha}\left|\sum_{n=0}^{N}|\xi_n|\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\left|z+\sqrt{z^2-1}\right|^n\right|^2 \le \mathrm{E}\max_{0\le n\le N}|\xi_n|^2\left(\sum_{n=0}^{N}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,(2R+1)^n\right)^2$$

и

$$\mathrm{E}\max_{0\le n\le N}|\xi_n|^2 \le \inf_p \mathrm{E}\left(\sum_{n=0}^{N}\xi_n^{2p}\right)^{1/p} \le \inf_p N^{1/p}\left(\mathrm{E}\xi_1^{2p}\right)^{1/p} \le \inf_p\left(pN^{1/p}\right) = e\ln N.$$

Теорема 1 доказана.

3. *Доказательство теоремы* **2.** Без потери общности можно считать, что точка z, о которой идет речь в теореме, лежит на вещественной оси и даже, что $z=T>0$. Допустим, что нам удалось построить функции $g_T(z)$, имеющие следующие свойства:

$$\begin{aligned} &1)\quad g_T(\cdot - T)\in \mathbf{F};\\ &2)\quad g_T(0) = 1; \\ &3)\quad \sup_{-1\le t\le 1}\left|g_T(t-T)\right| \le \exp\left(-T^\rho\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Тогда при всех θ, $-1\le\theta\le 1$, функции $f_\theta(z)=\theta\, g_T(z-T)\in\mathbf{F}$. Поэтому

$$\inf_{\hat f}\sup_{f\in\mathbf{F}}\mathrm{E}_f\left|f(T)-\hat f\right|^2 \ge \inf_{\hat f}\sup_{\theta}\mathrm{E}_\theta\left|f_\theta(T)-\hat f\right|^2. \tag{8}$$

Рассмотрим теперь задачу оценивания параметра θ по наблюдениям:

$$dX_\varepsilon(t) = \theta\, g_T(t-T) + \varepsilon\, dw(t). \tag{9}$$

Если $\hat f$ — какая-нибудь оценка $f_\theta(T)$, то в силу второго из требований (7)

$$\mathrm{E}_\theta\left|f_\theta(T)-\hat f\right|^2 = \mathrm{E}_\theta\left|\hat f-\theta\right|^2, \tag{10}$$

т. е. любая оценка $\hat f$ значения $f_\theta(T)$ есть одновременно оценка θ, имеющая вдобавок то же квадратическое уклонение. Из (8) и (10) следует тогда, что

$$\inf_{\hat f}\sup_{f\in\mathbf{F}}\mathrm{E}_f\left|f(T)-\hat f\right|^2 \ge \inf_{\hat\theta}\sup_{\theta}\mathrm{E}_\theta\left|\hat\theta-\theta\right|^2. \tag{11}$$

Таким образом, нам достаточно найти нижнюю грань качества оценивания параметра θ в задаче (9).

Обозначая через $\mathbf{P}_\theta$ меру, соответствующую параметру θ в задаче (9), находим [1, с. 505]

$$\frac{d\mathbf{P}_\theta}{d\mathbf{P}_0}(X_\varepsilon) = \exp\left\{\frac{\theta}{\varepsilon^2}\int_{-1}^{1} g(t-T)\,dX_\varepsilon(t) - \frac{\theta^2}{\varepsilon^2}\int_{-1}^{1} g^2(t-T)\,dt\right\}.$$

Согласно факторизационной теореме [7, с. 75], статистика $Y_\varepsilon = \int_{-1}^{1} g(t-T)\,dX_\varepsilon(t)$ — достаточная статистика в задаче оценивания параметра θ по наблюдениям (9). Следовательно, если рассматривать задачу оценивания параметра θ по наблюдению

$$Y_\varepsilon = \theta\int_{-1}^{1} g(t-T)\,dt + \varepsilon\int_{-1}^{1} g(t-T)\,dw(t), \tag{12}$$

то правая часть (11), $\inf_{\hat\theta}\sup_{|\theta|\le 1}\mathrm{E}_\theta\left|\hat\theta-\theta\right|^2$, в силу теоремы Блэквелла – Рао – Колмогорова совпадает с $\inf_\varphi \sup_{|\theta|\le 1}\mathrm{E}\left|\varphi(Y_\varepsilon)-\theta\right|^2$, где нижняя грань берется по всем статистикам $\varphi(Y_\varepsilon)$, порожденным наблюдениями Y_ε.

Нам понадобится следующая лемма [8].

Лемма 1. *Рассмотрим задачу оценивания параметра* θ, *о котором известно, что* $|\theta|\le a$ *по наблюдению*

$$Y = \theta + b\xi,$$

где ξ *— нормальная случайная величина с* $\mathbf{E}\xi = 0$, $\mathbf{E}\xi_2 = 1$, *a* $b>0$, $a>0$ *— известные величины. Тогда*

$$\inf_\phi \sup_{|\theta|\le 1}\mathrm{E}_\theta|\theta-\phi(Y)|^2 = \sigma^2 h\left(\frac{a}{b}\right),$$

где $h(s)$ *— монотонно неубывающая функция, причем* $h(s)\sim s^2$ *при* $s\to 0$ *и* $h(s)\sim 1$ *при* $s\to\infty$.

Задача оценивания (12) эквивалентна задаче оценивания параметра θ по наблюдению

$$Y_{\varepsilon 1} = \theta + b^2\xi,$$

$$|\theta|\le 1. \quad b^2 = \varepsilon^2\left(\int_{-1}^{1} g^2(t-T)\,dt\right)^{-1}.$$

Согласно лемме 1 и неравенствам (8), (11)

$$\inf_{\hat f}\sup_{f\in\mathbf{F}}\mathrm{E}_f\left|f(T)-\hat f\right|^2 \ge \varepsilon^2\left(\int_{-1}^{1} g^2(t-T)\,dt\right)^{-1} h\left(\varepsilon^{-1}\left(\int_{-1}^{1} g^2(t-T)\,dt\right)^{1/2}\right). \tag{13}$$

В силу третьего из условий (7)

$$\varepsilon\left(\int_{-1}^{1} g^2(t-T)\,dt\right)^{-1/2} \ge \frac{\varepsilon}{2}\exp\left\{T^\rho\right\} \ge \frac{1}{2}\exp\left\{-\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^\alpha\right\} \to \infty,$$

когда $\varepsilon\to 0$. Поэтому при всех достаточно малых ε правая, а значит, и левая часть (13) больше $1/2$.

Чтобы закончить доказательство теоремы, осталось построить функцию, удовлетворяющую условиям (7). Для простоты не будем строить функции $g_T\in\mathbf{F}(M,\sigma,\rho)$ с заданными M и σ, а лишь покажем, как построить $g_T\in\mathbf{F}(M,\sigma,\rho)$ с некоторыми $M>0$, $\sigma>0$. Рассмотрим отдельно случаи целых и нецелых ρ.

Пусть $\rho = k$ — целое положительное число. Положим $g_T(z) = g(z) = \exp\{2(-1)^{k+1}z^k\}$. Второе и третье условия (7) выполняются очевидным образом. Пусть далее $a = a(k)$ — фиксированное малое положительное число. Если $|z| > aT$, то

$$|g(z-T)| \le \exp\{2^k(|z|^k + T^k)\} \le \exp\left\{2^k\left(1+\frac{1}{a}\right)|z|^k\right\} = \exp(\sigma|z|^k).$$

Если же $|z| \le aT$, то

$$|g(z-T)| \le$$

$$\le \exp\{2(-1)^{k+1}\Re(z-T)^k\} \le \exp\{-2T^k + 2^{k+1}aT^k\} \le \exp(\sigma|z|^k),$$

коль скоро $a < 1/2$.

Пусть теперь ρ — нецелое, например, $k < \rho < k+1$. Зададим функцию $g_T(z)$ с помощью канонического произведения (см. [2], гл. 1) вида

$$g_T(z) = \prod_{p>10T^\rho} \left(1 + zp^{-1/p}\right) \exp\left\{\sum_{l=1}^{k} (-1)^l \frac{z^l}{l\, p^{l/p}}\right\}.$$

Проверим, что g_T корректно определена и удовлетворяет требованиям (7).

Бесконечное произведение справа сходится равномерно на компактах, определяет целую функцию и удовлетворяет неравенству [2, с. 22]

$$\ln|g_T(z)| \le 3e(k+1)(2+\ln k)r^k\left(\int_0^r n(t)t^{-(k+1)}dt + r\int_r^\infty n(t)t^{-(k+2)}dt\right); \quad |z| = r, \tag{14}$$

где $n(t) = \max\{p : p^{1/\rho} < t\} \le t^\rho$. Поэтому

$$|g_T(z)| \le C_1\exp\left(c_1 r^\rho\right), \quad |z| = r, \tag{15}$$

где C_1, c_1 — положительные постоянные.

Чтобы доказать, что $g_T(z)$ удовлетворяет первому из условий (7), рассмотрим отдельно случаи $|z| > aT$ и $|z| \le aT$, где a — достаточно малое положительное число. Если $|z| > aT$, то в силу (14)

$$|g_T(z-T)| \le C_1\exp\{c_1 2^{\rho-1}(|z|^\rho + T^\rho)\} \le C_1\exp\{c_1 2^{\rho-1}(1+a^{-1})|z|^\rho\}. \tag{16}$$

Пусть теперь $|z| < aT$. В этом случае, разложив все $\ln(1-(T-z)k^{-1/\rho})$ в ряд Тейлора, найдем

$$g_T(z-T) = \exp\left\{-\sum_{l=k+1}^{\infty}(T-z)^l l^{-1} \sum_{p>10T^\rho} p^{-l/\rho}\right\}. \tag{17}$$

Запишем внутреннюю сумму в виде

$$\sum_{p>10T^\rho} p^{-l/\rho} = \int_{10T^\rho}^{\infty} x^{-l/\rho}\,dx + R_l(T) =$$

$$= 10^{(\rho-l)\rho^{-1}}\rho(\rho-1)^{-1}T^{-l+\rho} + R_l(T), \quad |R_l(T)| \le 10^{-l/\rho}T^{-l}. \tag{18}$$

Пусть $z < \zeta T$, $|\zeta| < a$. В силу (17), (18)

$$g_T(z-T) = \exp\left\{-10\rho T^\rho \sum_{l=k+1}^{\infty} \left(10^{-1/\rho}(1-\zeta)\right)^l l^{-1}(l-\rho)^{-1} + \tilde{R}_k(T)\right\} =$$
$$= \exp\left\{-T^\rho \phi(\zeta) + \tilde{R}_k(T)\right\}, \tag{19}$$

где

$$\left|\tilde{R}_k(T)\right| \le \sum_{l=k+1}^{\infty} 10^{-l/\rho}(1+a)^l \le 10^{-k/\rho}(1+a)^{k+1}\left(10^{1/\rho} - 1 - a\right)^{-1} = c_3,$$

если a удовлетворяет неравенству $a < 10^{l/\rho} - 1$, которое предполагаем выполненным.

Функция

$$\phi(\zeta) = 10\rho \sum_{l=k+1}^{\infty} 10^{-l/\rho}(l(l-\rho))^{-1}(1-\zeta)^l$$

аналитична в окрестности нуля, причем $\phi(0) > 0$. Поэтому в малой окрестности нуля, $|\zeta| \le \zeta_0$, будет выполняться неравенство $\Re\phi(\zeta) > \phi(0)/2 > 0$. Следовательно, если $a < \zeta_0$, то для $|z| < aT$ будет выполняться неравенство

$$|g_T(z-T)| \le c_4 \exp\left\{\frac{1}{2}\phi(0)T^\rho\right\}. \tag{20}$$

Из неравенств (16), (20) следует, что функция $g_T(z)$ действительно удовлетворяет первому из условий (7).

Второе из условий (7) выполняется очевидным образом. Чтобы проверить третье условие, заметим, что для вещественных $t, |t| \le 1$, равенство (17) вместе с (18) приводит к неравенству

$$g_T(z-T) \le \exp\left\{-(T-t)^{k+1}(k+1)^{-1} \sum_{p > 10T^\rho} p^{-(k+1)/\rho}\right\} \le \exp\left\{-c_4 T^\rho\right\}, \quad c_4 > 0,$$

поэтому третье из условий (7) действительно выполняется. Теорема доказана.

Замечание. Отметим, что в проведенном доказательстве приближаемое значение $f(T)$ функции f мало, так что велика не только абсолютная, но и относительная погрешность приближения.

4. В этом пункте распространим результаты предыдущих пунктов на тот случай, когда интервалом наблюдения является вся вещественная прямая

$$dX_\varepsilon(t) = f(t)dt + \varepsilon dw(t), \quad -\infty < t < \infty. \tag{21}$$

Как и выше, предполагаем, что $f(z)$ — вещественная при вещественных z целая функция, принадлежащая некоторому заданному классу $\mathbf{F}$ целых аналитических функций.

Будем говорить, что целая функция $f(z)$ принадлежит классу целых функций $\mathbf{F}_1(M, \sigma, \rho)$, если

$$\sup_{-\infty < t < \infty} |f(t+iy)| \le M \exp(\sigma |y|^\rho). \tag{22}$$

Подобные классы функций рассматривал С. Н. Бернштейн в [9] (см. также [10, с. 408]). Нетрудно понять, что необходимо $\rho \ge 1$. При $\rho = 1$ класс $\mathbf{F}_1$ будет классом целых функций конечной степени, ограниченных на вещественной оси.

Обозначим через Γ_α полосу $\{z : |\Im z| \le (\ln(1/\varepsilon))^{\alpha/\rho}\}$.

Теорема 3. *Пусть* $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1(M, \sigma, \rho)$. *Существует такая оценка* $\hat{f}(z)$ *функции* $f(z)$, *построенная по наблюдениям* (21), *что для всех* $\beta < \alpha < 1$

$$\sup_{z\in\Gamma_\beta}\ \sup_{f\in\mathbf{F}_1(M,\sigma,\rho)} \mathrm{E}_f\left|f(z)-\hat{f}(z)\right|^2 \le C_\beta\,\varepsilon^{2(1-\alpha)}.$$

Постоянные C_β *зависят также от* M, σ, ρ.

Доказательство. Будем опираться на два следующих результата.

Лемма 2. *Пусть функция* $f(z)$ *вещественная на вещественной оси, регулярна в полосе* $-\delta < \Im z < \delta$ *и удовлетворяет неравенству* $|\Re f(z)| \le 1$. *Тогда величина* $\mathscr{E}_T(f)$ *наилучшего приближения в метрике* $C(R^1)$ *функции* $f(t)$ *целыми функциями* $B(t)$ *конечной степени не выше* T,

$$\mathscr{E}_T(f) = \inf_B \sup_{-\infty<t<\infty} |f(t)-B(t)|,$$

удовлетворяет неравенству

$$\mathscr{E}_T(f) \le \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(2k+1)^{-1}(\coth((2k+1)T\delta))^{-1} \le \frac{4}{\pi}\exp(-T\delta). \tag{23}$$

Лемма 3. *Пусть* $f(t)$ — *непрерывная ограниченная на* R^1 *функция. Рассмотрим обобщенный интеграл Фейера*

$$f_T(t) = \frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-v)\,\Phi(Tv)\,dv, \tag{24}$$

где $\Phi(v) = (\cos u - \cos 2u)/(\pi u^2)$. *Тогда*

$$\sup_t |f(t)-f_T(t)| \le \left(1+\frac{4}{\pi}+\frac{2}{\pi}\ln 3\right)\mathscr{E}_{T/2}(f). \tag{25}$$

Относительно доказательства этих утверждений см., например, [11], пункты 110 и 106 соответственно. Комбинируя леммы 2 и 3, мы получаем следующий результат, на котором и будет основываться конструкция оценок для $f(z)$.

Лемма 4. *Пусть функция* $f \in \mathbf{F}_1(M,\sigma,\rho)$, $\rho > 1$. *Тогда для всех* z *из полосы* $|\Im z| \le y < T^{1/\rho-1}\left(2^{\rho+1}\sigma\rho\right)^{-1/\rho-1}$

$$\left| f(z) - \frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\Phi(T(z-T))\,dt \right| \le c_0 \exp\left\{-c_1 T^{\rho/(\rho-1)}\right\}, \tag{26}$$

где c_0, c_1 — *некоторые положительные постоянные, зависящие от* $\mathbf{F}_1$. *При* $\rho = 1$ *правую часть в* (26) *надо заменить нулем.*

Доказательство. Пусть $|s| \le y$. Возьмем положительное число $\lambda > 0$ и определим функции

$$F_1(t) = \frac{1}{2}(f(t+is)+f(t-is))\,M^{-1}\exp\left\{-2^{\rho-1}\left(\lambda^\rho+|s|^\rho\right)\right\},$$

$$F_2(t) = \frac{1}{2i}(f(t+is)+f(t-is))\,M^{-1}\exp\left\{-2^{\rho-1}\left(\lambda^\rho+|s|^\rho\right)\right\},$$

которые, как легко видеть, удовлетворяют условиям леммы 2 с $\delta = \lambda$. Поэтому

$$\mathscr{E}_T(F_i) \le \frac{4}{\pi}\exp(-T\lambda), \qquad i = 1, 2.$$

В силу леммы 3

$$\sup_{-\infty<t<\infty}\left|F_i(t)-\frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty}F_i(t-v)\,\Phi(Tv)\,dv\right| \le c_3\exp\left(-\frac{Ty}{2}\right).$$

Отсюда следует, что для всех $\lambda > y$

$$\sup_t\left|f(t\pm is)-\frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(t\pm is-v)\,\Phi(Tv)\,dv\right| \le$$

$$\le c_4\exp\left\{\sigma(\lambda+|s|)^{\rho}-\frac{T\lambda}{2}\right\} \le c_4\exp\left\{2^{\rho}\sigma\lambda^{\rho}-\frac{T\lambda}{2}\right\}.$$

Минимизируя по λ, находим, что для $\rho > 1$ минимум достигается при $\lambda = T^{1/(\rho-1)}\left(2^{\rho+1}\sigma\rho\right)^{-1/(\rho-1)}$ и при таком выборе λ

$$\sup_{|\Im z|\le y}\left|f(z)-\frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(z-v)\,\Phi(Tv)\,dv\right| \le c_0\exp\left\{-c_1T^{-\rho/(\rho-1)}\right\},$$

если $\rho < 1$.

Функции $f(z)$, $\Phi(Tz)$ равномерно ограничены в полосе $|\Im z| \le y$. Кроме того, равномерно в этой полосе $|\Phi(T(x+is))| = O((1+x^2)^{-1})$. Поэтому, передвигая прямую интегрирования, получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(z-v)\,\Phi(Tv)\,dv = \int_{-\infty}^{\infty}f(v)\,\Phi(T(z-v))\,dv.$$

Лемма доказана.

Переходя к доказательству теоремы 3, исследуем в первую очередь свойства оценок $f_T(z)$, определяемых равенством

$$\hat{f}_T(z) = \frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(T(z-t))\,dX_{\varepsilon}(t) =$$

$$= \frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(T(z-t))\,f(t)\,dt + \frac{\varepsilon T}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(T(z-t))\,dw(t).$$

Из леммы 4 следует, что если $z = x+iy$, то для $T > 2^{\rho+1}\sigma\rho\, y^{\rho-1}$

$$\mathrm{E}\left|\hat{f}_T(z)-f(z)\right|^2 = \left|\frac{T}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(T(z-t))\,f(t)\,dt-f(z)\right|^2 +$$

$$+ \frac{\varepsilon^2}{T^2}\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(T(z-t))|^2\,dt \le c_5\exp\left\{-c_6T^{\rho/(\rho-1)}\right\}+c_7\varepsilon^2T\exp(4T|y|). \qquad (27)$$

Выберем T так, чтобы минимизировать правую часть (27), и обозначим оценку $\hat{f}_T$ с этим T через $\hat{f}(z)$. Нетрудно понять, что тогда $T \asymp (\ln(1/\varepsilon))^{(\rho-1)/\rho}$ и для $\hat{f}(z)$ выполняется неравенство теоремы 3. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть в задаче* (21) $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1(M, \sigma, \rho)$ *и* z — *произвольная точка полосы* Γ_{α}, $\alpha > 1$. *Тогда для всех* $\varepsilon < \varepsilon_0(M, \sigma, \rho, \alpha)$

$$\inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \mathbf{F}} \mathrm{E}_f \left| f(z) - \hat{f} \right|^2 > \frac{1}{2}. \tag{28}$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным оценкам $\hat{f}$, *построенным по наблюдениям* (21).

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 2. Во-первых, достаточно доказать неравенство (28) для $z = iy$, $y > 0$. Далее, допустим, что для больших положительных y нам удалось построить функции $f_y(z)$, имеющие следующие свойства:

$$f_y(z) \in \mathbf{F};$$

$$f_y(iy) = 1; \tag{29}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_y^2(t)\,dt \le \exp(-c|y|^\rho), \qquad c > 0.$$

Тогда, как и выше,

$$\inf_{\hat{f}} \sup_{f \in \mathbf{F}} \mathrm{E}_f \left| f_y(iy) - \hat{f} \right|^2 \ge \inf_{\hat{\theta}} \sup_{|\theta| \le 1} \mathrm{E}_\theta \left| \hat{\theta} - \theta \right|^2,$$

где нижняя грань справа берется по всем оценкам $\hat{\theta}$ параметра θ в задаче оценивания θ по наблюдениям

$$Y_\varepsilon = \theta \int_{-\infty}^{\infty} f_y^2(t)\,dt + \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} f_y(t)\,dw(t).$$

Снова, как и выше, если $|y| > ((\ln 1/\varepsilon))^{\alpha/\rho}$, $\alpha > 1$, то $\inf_{\hat{\theta}} \sup_{|\theta| \le 1} \mathrm{E}_\theta \left| \hat{\theta} - \theta \right|^2 = b^2 h(1/b)$, где функция h определена в лемме 1, а

$$b^2 = \varepsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} f_y^2(t)\,dt \right)^{-1} \ge \varepsilon^2 \exp\{c|y|^\rho\} \ge \exp\left\{ -2\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + c\left(\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)^\alpha \right\},$$

откуда и следует утверждение теоремы 4.

Функции $f_y(z)$ определим с помощью равенства

$$f_y(z) = \frac{g(z + iy) + g(z - iy)}{g(2iy) + 1},$$

где

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{izx} \exp\left\{ -|x|^{\rho/(\rho-1)} \right\} dx.$$

Изучим сначала поведение интеграла

$$g(iy) = I(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ yx - |x|^{\rho/(\rho-1)} \right\} dx.$$

Очевидно, что $I(y)$ — монотонно возрастающая на $(0, \infty)$ функция. Далее,

$$I(y) = y^{\rho-1} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ y^\rho \left(x - |x|^{\rho/(\rho-1)} \right) \right\} dx,$$

и применение метода Лапласа асимптотического анализа интегралов (см., например, [12], гл. 2, п. 1) приводит к соотношению: при $y \to \infty$

$$g(iy) = I(y) \sim Cy^{\rho/2-1} \exp\left(cy^{\rho}\right)\left(1 + O\left(y^{-\rho}\right)\right), \tag{30}$$

где c, C — положительные константы, точные значения которых в данном случае несущественны.

Проверим теперь, что функции $f_y(z)$ удовлетворяют всем условиям (29). Чтобы убедиться в справедливости первого из этих условий, как и выше, фиксируем некоторое малое положительное число a. Будем, кроме того, считать, что $y > y_0$, где y_0 — достаточно большое положительное число. Если $|s| > ay$, то в силу (30) найдется $A_1 > 0$ такое, что

$$\sup_t \left| f_y(t+is) \right| \le \frac{g(|s+y|) + g(|s-y|)}{g(2iy) + g(0)} \le$$

$$\le 2\frac{g\left(|s|\left(1+a^{-1}\right)\right)}{g(2iy)} \le 2(g(0))^{-1} \exp\left\{ A_1\left(1+a^{-1}\right)^{\rho} |s|^{\rho} \right\}. \tag{31}$$

Если же $|s| \le ay$, то согласно (30)

$$\sup_t \left| f_y(t+is) \right| \le 2\frac{g(|y|(1+a))}{g(2iy)} \le C_1 \exp\left\{ c\left((1+a)^{\rho} - 2^{\rho}\right) \right\} \le C_1, \tag{32}$$

если $a < 1$. Здесь C_1 означает некоторую постоянную. Из неравенств (31), (32) и следует первое из условий (29).

Второе из условий (29) выполняется очевидным образом. Наконец, из определения функций f_y, g, равенства Парсеваля и (30) следует, что для всех достаточно больших y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_y^2(t)\,dt \le \frac{4}{g^2(2iy)} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t+iy)|^2\,dt =$$

$$= \frac{8\pi}{g^2(iy)} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ 2yx - 2|x|^{\rho/(\rho-1)} \right\} dx \le \frac{8\pi}{g(iy)} \le \exp\left(-C|y|^{\rho}\right),$$

так что третье из условий (29) тоже выполняется. Теорема 4 доказана.

1. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Асимптотическая теория оценивания. – М.: Наука, 1979. – 528 с.
2. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.
3. *Ibragimov I.* Estimation of analytic functions // Festschrift for Willem van Zwet (C. Klaassen, A. W. van der Vaart, eds.) (to appear).
4. *Ibragimov I.* On estimation of analytic functions // Stud. sci. math. hung. – 1998. – **34**. – P. 191–210.
5. *Сеге Г.* Ортогональные многочлены. – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.
6. *Бернштейн С. Н.* Экстремальные свойства полиномов. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 203 с.
7. *Леман Э.* Проверка статистических гипотез. – М.: Наука, 1964. – 498 с.
8. *Ибрагимов И. А., Хасьминский Р. З.* Непараметрическое оценивание значения линейного функционала в гауссовском белом шуме // Теория вероятностей и ее применения. – 1987. – **32**, № 1. – С. 35–44.
9. *Бернштейн С. Н.* О наилучшем приближении аналитических функций при помощи целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. – 1947. – **56**. – С. 891–894.
10. *Бернштейн С. Н.* Собрание сочинений. Т. II. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – 626 с.
11. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1965. – 407 с.
12. *Федорюк М. В.* Метод перевала. – М.: Наука, 1977. – 368 с.

Получено 05.06.2000