УДК 519.21

И. Н. Коваленко (Ин-т кибернетики НАН Украины, Киев)

ОЦЕНКА ИНТЕНСИВНОСТИ ПОТОКА НЕМОНОТОННЫХ ОТКАЗОВ СИСТЕМЫ ОБСЛУЖИВАНИЯ $(\leq\lambda)/G/m$

We consider a $(\leq\lambda)/G/m$ queueing system, where the symbol $(\leq\lambda)$ means that, independently of the previous behavior, the probability of demand entry in the interval dt does not exceed λdt. The case where the queue length attains the level $r \geq m+1$ at the first time in the busy period is called a system failure. For the intensity $\mu_1(t)$ of flow of homogeneous events associated with monotone failures of the system, we find a bound $\mu_1(t) = O(\lambda^{r+1}\alpha_1^{m-1}\alpha_{r-m+1})$, where α_k is a k th moment of the service time distribution.

Розглядається система обслуговування типу $(\leq\lambda)/G/m$, де символ $(\leq\lambda)$ означає, що, незалежно від попередньої поведінки, ймовірність надходження вимоги в інтервалі dt не перевищує λdt. Відмовою системи вважається перше на періоді зайнятості досягнення величиною черги рівня $r \geq m+1$. Знайдено межу інтенсивності $\mu_1(t)$ течії однорідних подій, пов'язаних із монотонними відмовами системи, а саме, $\mu_1(t) = O(\lambda^{r+1}\alpha_1^{m-1}\alpha_{r-m+1})$, де α_k — k-й момент розподілу часу обслуговування.

Введение. Настоящая статья относится к исследованиям поведения систем обслуживания в условиях малой нагрузки. Эта проблема интенсивно изучается, начиная с 80-х годов прошлого столетия. По-видимому, это направление начали развивать Блумфилд и Кокс [1], Бермен и Смит [2]. Боровков [3] развил общие подходы к асимптотическому анализу систем обслуживания, в том числе в условиях малой нагрузки. В первых работах изучались стационарные характеристики систем обслуживания (например, среднее время ожидания $\overline{W}$) в зависимости от интенсивности потока λ при $\lambda \to 0$. Таким образом, для системы $M/G/1$ при некоторых условиях $\overline{W} \sim c_2\lambda^2 + c_3\lambda^3 + \ldots$. Замечательным свойством систем с малой нагрузкой является то, что коэффициент c_k — некоторая вероятность, связанная с не более, чем k, требованиями в периоде занятости. Это свойство изучалось Асмуссеном [4], Бачелли и Шмидтом [5], Дейли и Рольским [6, 7], Штриком и Банди [8] и многими другими авторами (см. обзоры [9 – 11]). Весьма плодотворными оказались понятия эквивалентности в условиях малой нагрузки, предложенные Асмуссеном [4], Дейли и Рольским [6, 7]. В работах [12, 13] эти понятия применены к асимптотическому анализу коэффициента неготовности восстанавливаемой системы; численному анализу этой характеристики посвящена работа [14].

В СССР асимптотические методы в теории надежности начали развиваться в 60-х годах XX столетия. В работе [15] предложено исследовать резервированные системы с показательным законом отказов методом малого параметра. В. С. Королюк и А. Ф. Турбин во многих работах, из которых укажем [16], развили методологические подходы к анализу надежности систем, переходные характеристики которых зависят от малого параметра. Ими предложены методы асимптотического фазового укрупнения систем, отражающие специфику задач теории надежности. Некоторые работы посвящены изучению свойства аналитической зависимости эффективности системы от параметра [17]. О других плодотворных подходах см. [18, 19].

В серии работ А. Д. Соловьева и его учеников, из которых упомянем [20 – 23], изучалась задача о предельном распределении первого момента редкого события в схеме регенерирующего процесса специального вида (период незанятости — экспоненциальный, период занятости складывается наложением длительностей восстановления элементов). Редкое событие понимается как достижение отказового состояния (в симметричном случае это критическое число отказавших элементов). Одним из главных достижений школы А. Д. Соловьева является (правда, неполный) отказ от малого параметра в асимптотической постановке задач: вместо этого сохраняются лишь моментные ограничения. Таким образом, допускается „треугольная" схема, в которой отказы происходят по экспоненте, а распределение времени восстановления может изменяться произвольным образом. В обзоре [11] к этой серии работ, объединенных общими идеями, нами применено название „теоремы соловьевского типа". Каждая из этих теорем устанавливает не только экспоненциальность распределения момента отказа системы, но и тот факт, что при малой нагрузке отказ происходит монотонным образом: от начала периода занятости до момента отказа системы с высокой вероятностью отказы элементов лишь накапливаются, т. е. ни один элемент не будет восстановлен. Этот факт можно интерпретировать как проявление эквивалентности в условиях малой нагрузки (см. выше).

„Треугольная" схема использовалась также в работах исследователей из других математических школ [11, 18, 24 – 35].

Асимптотический анализ надежности рассмотрен в монографиях [29, 36– – 38] и обзорах [10, 11, 39].

Наиболее трудным пунктом при доказательстве предельных теорем и оценок в случае малой нагрузки является получение оценки для вероятности немонотонного отказа. Традиционным является мажорирование периода занятости системы $\ldots/G/m$ периодом занятости системы $\ldots/G/1$. Это приводит к завышенной оценке вероятности немонотонного отказа на периоде занятости, в которую входит r-й момент распределения времени обслуживания. (Отметим, что работы [2, 6] не имеют этого недостатка.) В настоящей статье предлагается подход, основанный на иной интерпретации немонотонных отказов: эти события считаются не с начала периода занятости, а начиная с момента первой блокировки требования в периоде занятости. Этот подход позволяет понизить порядок момента в оценке с r до $r-m+1$, где m — число каналов системы.

Постановка задачи. Рассмотрим m-канальную систему обслуживания с ожиданием. Время обслуживания требования имеет общую функцию распределения $B(x)$. Вероятность поступления требования в интервале $(t,\, t+dt)$ не больше, чем $\lambda\, dt$, независимо от предыстории. Групповое поступление требований исключается. Данную систему, допускающую большое число интерпретаций, назовем системой $(\le\lambda)/G/m$. Пусть α_k — k-й момент распределения $B(x)$; $\tau=\alpha_1$; $\overline{B}(x)=1-B(x)$, $\overline{\overline{B}}(x)=\int_x^\infty \overline{B}(t)\,dt$, $\nu(t)$ — величина очереди (число требований в системе) в момент t. Для определенности будем считать, что $\nu(0)=0$. Фиксируем $r>m$ и назовем отказом системы первый в периоде занятости переход $\nu(t)$ из состояния $r-1$ в состояние r. Отказ системы может быть монотонным (когда с начала периода занятости до отказа траектория $\nu(t)$ монотонна) или немонотонным. Цель настоящей работы — получение верхней оценки математического ожидания $Q(T)$ числа немонотонных отказов в интервале $(0,T)$.

Верхние оценки. Если переход $m \to m+1$ происходит впервые в периоде занятости, то это событие назовем первой блокировкой (требования). Очевидно, при $r=m+1$ отказ и первая блокировка — одно и то же; при $r\ge m+2$ любому отказу предшествует блокировка. Следовательно,

$$Q(T) \le \int_0^T \mu_1(t)\,dt,$$

где $\mu_1(t)dt$ — вероятность того, что в интервале $(t,\, t+dt)$ происходит первая блокировка, после которой (при $r = m+1$ — одновременно с ней) наступает отказ.

Пусть t_1 — момент начала периода занятости, t_{m+1} — момент первой блокировки, t_r — момент отказа в данном периоде занятости. В момент $t_{m+1}-0$ в системе находится m требований. Обозначим через u_i время, прошедшее после момента поступления i-го из них, через v_i — остаточное время его обслуживания. Любое другое требование с начала периода занятости назовем посторонним.

Если в данном периоде занятости происходит немонотонный отказ, то наступает хотя бы одно из трех событий:

$A_0 = \{$ в момент $t_{m+1}-u_i$ существует постороннее требование при некотором i; функция $\nu(t)$ монотонна при $t_{m+1}<t<t_r\}$;

$A_1 = \{$ в некотором из интервалов $(t_{m+1}-u_i,\, t_{m+1})$ поступает постороннее требование; функция $\nu(t)$ монотонна при $t_{m+1}<t<t_r\}$;

$A_2 = \{$ функция $\nu(t)$ немонотонна при $t_{m+1}<t<t_r\}$.

Обозначим через $\mu_{1i}(t)dt$ вероятность события $\{A_i;\, t<t_{m+1}<t+dt\}$. Тогда

$$\mu_1(t) \le \mu_{10}(t)+\mu_{11}(t)+\mu_{12}(t).$$

Теорема. *Справедливы неравенства*

$$\mu_{10}(t) \le \frac{\lambda^{r+1}\tau}{(m-1)!\,(r-m-2)!}\int_0^\infty z^{r-m-2}\overline{\overline{B}}{}^m(z)\,dz \le \frac{\lambda^{r+1}\tau^m\alpha_{r-m}}{(m-1)!\,(r-m)!}, \tag{1}$$

$$\mu_{11}(t) \le \frac{\lambda^{r+1}}{(m-1)!\,(r-m-2)!}\iint\limits_{0<z<x<\infty} z^{r-m-2}(x-z)\,\overline{\overline{B}}{}^{m-1}(z)\overline{B}(x)\,dz\,dx \le$$

$$\le \frac{\lambda^{r+1}\,\tau^{m-1}\,\alpha_{r-m+1}}{(m-1)!\,(r-m+1)!}, \tag{2}$$

$$\mu_{12}(t) \le \frac{\lambda^{r+1}\tau^{m-1}}{(m-1)!}\left(\frac{\tau}{m(r-m)!}\mathrm{E}\left\{S_{r-m}^{r-m}\right\}+\sum_{k=1}^{r-m}\frac{\alpha_{k+1}}{(k+1)!\,(r-m-k)!}\mathrm{E}\left\{S_{r-m}^{r-m-k}\right\}\right), \tag{3}$$

где S_{r-m} — сумма $r-m$ независимых случайных величин с функцией распределения $B(x)$; следовательно,

$$\mathrm{E}\left\{S_{r-m}^{r-m-k}\right\} \le (r-m)^{r-m-k}\alpha_{r-m-k}.$$

Доказательство. В случае, если $\nu(t)=m$ и первая блокировка в данном периоде занятости не наступила до момента t, обозначим $Z_k = Z_k(t)$ — k-е в порядке возрастания время до окончания обслуживания требования из числа имеющихся в системе в момент t. Таким образом, $Z_1 < Z_2 < \ldots < Z_m$. Если $\nu(t)\ne m$ либо первая блокировка наступила ранее, положим $Z_k = 0$.

Поскольку все последующие рассуждения не зависят от t, то положим $t = 0$. Если $Z_k > z$, то имеющиеся требования поступили в некоторые моменты $(-u_i)$ и длительности обслуживания некоторых $m-k+1$ из них больше $u_i + z$. Следовательно,

$$\Phi_k(z) = \mathrm{P}\{Z_k > z\} \le \frac{1}{(m-k+1)!}\left(\int\limits_0^\infty \lambda \overline{B}(u+z)\,du\right)^{m-k+1} \times$$

$$\times \frac{1}{(k-1)!}\left(\int\limits_0^\infty \lambda \overline{B}(u)\,du\right)^{k-1} = \frac{1}{(m-k+1)!\,(k-1)!}\,\lambda^m \tau^{k-1}\,\overline{\overline{B}}^{\,m-k+1}(z). \tag{4}$$

Пусть $\Phi_{10}(z) = \mathrm{P}\{Z_1 > z;$ в некоторый момент $(-u_i)$ находится постороннее требование$\}$; $\Phi_{11}(z) = \mathrm{P}\{Z_1 > z;$ в некотором интервале $(-u_i, 0)$ поступило постороннее требование$\}$. Для $\Phi_{10}(z)$ выполняется оценка

$$\Phi_{10}(z) \le \frac{1}{(m-1)!}\,\lambda^{m+1}\tau\,\overline{\overline{B}}^{\,m}(z), \tag{5}$$

которая выводится аналогично (4) с учетом того, что вероятность наличия в любой момент $(-u_i)$ постороннего требования не больше $\lambda\tau$.

Переходя к оценке $\Phi_{11}(z)$, заметим, что вероятность поступления постороннего требования в интервале $(-u_i, 0)$ не больше λu_i; следовательно,

$$\Phi_{11}(z) \le \frac{1}{(m-1)!}\left(\lambda\int\limits_0^\infty \overline{B}(u+z)\,du\right)^{m-1}\left(\lambda^2\int\limits_0^\infty u\,\overline{B}(u+z)\,du\right) =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\,\lambda^{m+1}\,\overline{\overline{B}}^{\,m-1}(z)\int\limits_0^\infty u\,\overline{B}(u+z)\,du\,. \tag{6}$$

Пусть $\nu(0) = m$, причем первая блокировка в текущем периоде занятости не наступила. Для того чтобы она наступила в интервале длины dt, после этого наступил отказ и при этом до отказа функция $\nu(t)$ была монотонной, необходимо, чтобы в интервале dt поступило требование и вслед за ним не менее $r-m-1$ требований до момента Z_1. При фиксированном Z_1 вероятность этого события не больше, чем $\lambda^{r-m} Z_1^{r-m-1}\,dt/(r-m-1)!$ Отсюда

$$\mu_{1i}(t) \le \frac{1}{(r-m-2)!}\,\lambda^{r-m}\int\limits_0^\infty z^{r-m-2}\Phi_{1i}(z)\,dz, \qquad i = 0, 1. \tag{7}$$

Подставив в правую часть (7) выражения (5) и (6), получим оценки (1) и (2).

Приведем преобразование и оценки соответствующих интегралов, опуская коэффициенты:

$$\int\limits_0^\infty z^{r-m-2}\,\overline{\overline{B}}^{\,m}(z)\,dz \le \tau^{m-1}\int\limits_0^\infty z^{r-m-2}\,\overline{\overline{B}}(z)\,dz = \frac{\tau^{m-1}}{(r-m-1)(r-m)}\,\alpha_{r-m}\,;$$

$$\int\limits_0^\infty z^{r-m-2}\,\overline{\overline{B}}^{\,m-1}(z)\,dz\int\limits_0^\infty u\overline{B}(u+z)\,du \le \tau^{m-1}\int\limits_0^\infty \overline{B}(x)\,dx\int\limits_0^x z^{r-m-2}(x-z)\,dz =$$

$$= \frac{\tau^{m-1}}{(r-m-1)(r-m)}\int\limits_0^\infty x^{r-m}\,\overline{B}(x)\,dx = \frac{\tau^{m-1}(r-m-2)!}{(r-m+1)!}\,\alpha_{r-m+1}\,.$$

При выводе использовано неравенство $\overline{\overline{B}}(z) \le \tau$.

Остается оценить $\mu_{22}(t)$ — интенсивность, связанную с отказами, немонотонными после момента первой блокировки. Поскольку $\mu_{12}(t) = 0$ при $r = m +$

$+1$, рассмотрим случай $r \geq m+2$. Обозначим через S_{r-m} сумму длительностей обслуживания $r-m$ требований, начиная с поступившего в момент первой блокировки. Тогда для отказа рассматриваемого типа необходимо, чтобы в течение времени $Z_m + S_{r-m}$ поступило не менее $r-m$ требований. Если в интервале $(0, Z_m)$ поступило ровно k требований при $k < r-m$ либо не менее k требований при $k = r-m$, то после момента Z_m должно поступить не менее $r-m-k$ требований в интервале длины S_{r-m}. Случай $k=0$ выделен особо, так как вместо оценки (4) при $z=0$, очевидно, можно использовать оценку $\Phi_m(0) \leq$ $\leq (\lambda\tau)^m/m!$

Уточнение результата. Оценка (3) нетривиальна при $\alpha_{r-m+1} < \infty$. Если $\alpha_{r-m+2} < \infty$, то ее можно уточнить следующим образом. Обозначим правую часть (3) через $\gamma(r)$. Тогда $\gamma(r)$ связана с вероятностью поступления хотя бы $r-m$ новых требований в периоде занятости. Одно из двух: либо $r-m$ требований поступит в интервале $(0, \min\{Z_1+\eta, Z_2\})$, где η — время обслуживания первого блокированного требования, либо в периоде занятости после первой блокировки поступит хотя бы $r-m+1$ требование. Отсюда находим оценку

$$\mu_{12}(t) \leq \frac{\lambda^{r+1}}{(m-2)!\,(r-m)!} \iint\limits_{0<x<y<\infty} \overline{B}(x)\overline{B}(y)\overline{\overline{B}}^{m-2}(y) \times$$

$$\times \left(y^{r-m}\,\overline{B}(y-x) + \int\limits_0^{y-x} (x+z)^{r-m}\, dB(z) \right) dx\, dy + \gamma(r+1). \tag{8}$$

Несколько огрубив эту оценку, получим следующие неравенства:

$$\mu_{12}(t) \leq \frac{\lambda^{r+1}\tau}{(m+1)!\,(r-m+1)!} \int\limits_0^{\infty} x^{r-m-1}\,\overline{\overline{B}}^{m-1}(x)\, dx + \gamma(r+1) \leq$$

$$\leq \frac{\lambda^{r+1}\tau^{m-1}\alpha_{r-m+1}}{(m-1)!\,(r-m+1)!} + \gamma(r+1). \tag{9}$$

Заметим, что $\gamma(r+1) = O\left(\lambda^{r+2}\tau^{m-1}\alpha_{r-m+2}\right)$.

Представляет интерес получение верхних пределов $\mu_{1i}(t)$, если известны только некоторые моменты распределения $B(x)$. Нам представляется, что это можно сделать методом Л. С. Стойковой [40].

Замечание о кратных отказах. Назовем кратным отказом нетождественные по времени переходы $r-1 \to r$ процесса $\nu(t)$ в одном и том же периоде занятости. Обозначим через $\mu^*(t)dt$ вероятность того, что в интервале $(t, t+dt)$ происходит первая блокировка в некотором периоде занятости, после чего в этом же периоде происходит кратный отказ. Очевидно, при таком отказе в периоде занятости поступает не менее $r-m$ требований после блокировки. Таким образом,

$$\mu^*(t) \leq \mu_{12}(t). \tag{10}$$

Правая часть неравенства (10) оценена неравенством (3). Более того, среднее число интервалов занятости, начавшихся в интервале $(0, T)$ и таких, что в каждом из них обслужено не менее $r+1$ требований (в частности, произошел либо немонотонный, либо кратный отказ), мажорируется величиной $\int_0^T \mu_1(t)\, dt$.

Оценка вероятности немонотонного отказа на периоде занятости. Предположим, что если $\nu(t) = 0$, то, независимо от предыстории, в интервале $(t, t+dt)$ происходит переход $0 \to 1$ с вероятностью $\lambda_0 > 0$; если это событие произошло, то дальнейшее поведение процесса не зависит ни от t, ни от предыстории. Тогда, в частности, вероятность q_1 события {на периоде занятости произойдет немонотонный или кратный отказ} постоянна. Средняя длительность цикла между переходами $1 \to 0$ не больше, чем $\dfrac{1}{\lambda_0} + \dfrac{\tau}{1-\lambda\tau}$ при $\lambda\tau < 1$. Элементарными рассуждениями теории восстановления получаем, что среднее число событий рассматриваемого вида на большом интервале T не менше, чем

$$q_1 T \bigg/ \left(\frac{1}{\lambda_0} + \frac{\tau}{1-\lambda\tau}\right).$$

В то же время это число не больше $\mu_1 T$, где μ_1 — указанная в теореме верхняя граница $\mu_1(t)$ для $\mu_{10}(t) + \mu_{11}(t) + \mu_{12}(t)$. Отсюда получаем оценку

$$q_1 \leq \frac{\mu_1(1-(\lambda-\lambda_0)\tau)}{\lambda_0(1-\lambda\tau)} \tag{11}$$

при $\lambda\tau < 1$.

1. *Bloomfield P., Cox D. R.* A low traffic approximation for queues // J. Appl. Probab. – 1972. – **9**. – P. 832–840.
2. *Burman D. Y., Smith D. R.* A light-traffic problem for multiserver queues // Manag. Sci. – 1983. – **8**, № 1. – P. 15–27.
3. *Borovkov A. A.* Asymptotic methods in queueing theory. – New York: J. Wiley & Sons, 1984. – 210 p.
4. *Asmussen S.* Light traffic equivalence in single server queues // Ann. Appl. Probab. – 1992. – **2**. – P. 555–574.
5. *Baccelli F., Schmidt V.* Taylor series expansions for Poisson-driven (max, +)-linear systems // Ibid. – 1996. – **6**, № 1. – P. 138–185.
6. *Daley D. J., Rolski T.* Light traffic approximations in many server queues // Adv. Appl. Probab. – 1992. – **24**. – P. 202–218.
7. *Daley D. J., Rolski T.* Light traffic approximations in general stationary single-server queues // Stochast. Process. and Appl. – 1994. – **49**. – P. 141–158.
8. *Sztrik J., Bunday B. D.* An asymptotic approach to the multiple machine interference problem with Markovian environment // Ann. Univ. Sci. Budapest. Sect. Comput. – 1992. – **13**. – P. 135–148.
9. *Blaszczyszyn B., Rolski T., Schmidt V.* Light traffic approximations in queues and related stochastic models // J. H. Dshalalow (Ed). Advances in Queueing. – Boca Raton: CRC Press, 1995. – P. 379–406.
10. *Kovalenko I. N.* Rare events in queueing systems // A survey, Queueing Systems. – 1994. – **16**, № 1. – P. 1–49.
11. *Kovalenko I. N.* Approximations of queues via small parameter method // J. H. Dshalalow (Ed). Advances in Queueing. – Boca Raton: CRC Press, 1995. – P. 481–506.
12. *Kovalenko I. N.* A non-regenerative model of a redundant repairable system: bounds for the unavailability and asymptotic insensitivity to lifetime distribution // J. Appl. Math. and Stochast, Anal. – 1996. – **9**, № 1. – P. 93–101.
13. *Kovalenko I. N.* Ergodic and light traffic properties of a complex repairable system // Math. Meth. Opns Res. – 1997. – **45**. – P. 387–409.
14. *Atkinson J. B., Kovalenko I. N.* On the practical insensitivity of the availability of some redundant repairable systems to the lifetime distribution in light traffic // Proc. Int. Conf.: Probab. Analysis of Rare Events. – Riga: Aviation Univ., 1999. – P. 83–91.
15. *Коваленко И. Н.* Некоторые вопросы теории надежности сложных систем // Кибернетику — на службу коммунизму / Под ред. А. И. Берга и Б. В. Гнеденко. – 1964. – **2**. – С. 194–205.
16. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Процессы марковского восстановления и их применение к задачам надежности систем. – Киев: Наук. думка, 1982. – 230 с.

17. *Wang C.-L.* Light traffic approximations for regenerative queueing processes // Adv. Appl. Probab. – 1997. – **29**. – P. 1060–1080.
18. *Калашников В. В.* Определение параметров времени первого отказа методом полугенерирующих процессов // Пробл. устойчивости стохастических моделей. – М.: ВНИИСИ, 1990. – С. 21–31.
19. *Анисимов В. В.* Оценка параметров надежности стохастических систем. – Киев: Знание, 1987. – 290 с.
20. *Гнеденко Д. Б., Соловьев А. Д.* Оценка надежности сложных восстанавливаемых систем // Техн. кибернетика. – 1975. – **13**, № 3. – С. 89–96.
21. *Константинидис Д. Г.* Принцип монотонной траектории отказа сложной восстанавливаемой системы // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. – 1990. – № 3. – С. 7–13.
22. *Соловьев А. Д.* Резервирование с быстрым восстановлением // Техн. кибернетика. – 1970. – **8**, № 1. – С. 49–64.
23. *Соловьев А. Д., Карасева Н. Г.* Оценка среднего времени жизни восстанавливаемых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. – 1998. – № 5. – С. 25–29.
24. *Asmussen S., Kalashnikov V. V.* Failure rates of regenerative systems with heavy tails // J. Math. Sci. 93. – 1999. – № 4. – P. 501–510.
25. *Kalashnikov V. V.* Mathematical methods in queueing theory. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1994.
26. *Kalashnikov V. V.* Topics on regenerative processes. – Boca Raton: CRC Press, 1994.
27. *Kalashnikov V. V.* Upper and lower bounds for geometric convolutions // Stability Problems for Stochast. Models, LN in Math. – Berlin: Springer-Verlag, 1993. – P. 76–88.
28. *Kalashnikov V. V.* Calculation of reliability characteristics for regenerative models // Serdica. – 1966. – **22**. – P. 1001–1022.
29. *Коваленко И. Н.* Анализ редких событий при оценке эффективности и надежности систем. – М.: Сов. радио, 1980. – 280 с.
30. *Anisimov V. V.* Asymptotic analysis of switching queueing systems in condition of low and heavy loading // Matrix-analytic Methods in Stochastic Models. – Marcel Dekker Inc., 1996.
31. *Anisimov V. V., Sztrik J.* Asymptotic analysis of some controlled finite-source queueing systems // Acta Cybernetica. – 1989. – № 9. – P. 27–39.
32. *Anisimov V. V., Sztrik J.* Asymptotic analysis of some complex renewable systems operating in random environments // Eur. J. Oper. Res. – 1989. – № 41. – P. 162–168.
33. *Anisimov V. V., Sztrik J.* Reliability analysis of a complex renewable system operating in Markovian environments // J. Infor. Proc. Cybern. – 1989. – № 25. – P. 573–580.
34. *Sztrik J.* Asymptotic reliability analysis of some complex systems with repair operating in random environment // Ibid. – P. 37–43.
35. *Sztrik J.* Asymptotic analysis of a heterogeneous renewable complex system with random environments // Microelectronics and Reliability. – 1992. – № 32. – P. 975–986.
36. *Gnedenko B. V., Belyayev Yu. K., Solov'ev A. D.* Mathematical methods in reliability theory. – New York: Acad. Press, 1969. – 240 p.
37. *Ushakov I. A.* Handbook of reliability engineering. – New York: J. Wiley & Sons, 1964. – 280 p.
38. *Kovalenko I. N., Kuznetsov N. Yu., Pegg Ph. A.* Mathematical theory of reliability of time dependent systems with practical applications. – Chichester: J. Wiley & Sons, 1997. – 303 p.
39. *Gertsbakh I. B.* Asymptotic methods in reliability theory: A review // Adv. Appl. Probab. – 1984. – **16**. – P. 147–175.
40. *Стойкова Л. С.* Оценка некоторых функционалов, характеризующих надежность // Кибернетика. – 1978. – № 4. – С. 113–119.

Получено 04.04.2000