УДК 517.911

Е. В. Воскресенский (Мордов. ун-т, Саранск)

АТТРАКТОРЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Sufficient conditions for the existence of polynomial attractors and polynomial equilibrium are obtained.

Одержано достатні умови існування поліноміальних атракторів і поліноміальної рівноваги.

1. Введение. Изучение задачи о существовании аттракторов — важнейшая часть теории и приложений обыкновенных дифференциальных уравнений, например, при описании некоторых физических процессов. В частности, в теории гравитационного поля имеются уравнения второго порядка, решения которых при стремлении времени к бесконечности сколь угодно близко приближаются к многочленам первой степени [1]. В настоящей работе ищутся необходимые и достаточные условия, при которых дифференциальные уравнения определенного класса в качестве аттракторов имеют множества всех многочленов не выше заданной степени. Другими словами, ищутся условия, при которых решения $x(t; t_0, x_0)$ дифференциальных уравнений при стремлении аргумента к бесконечности асимптотически приближаются к многочленам не выше наперед заданной степени. Например, уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \tag{1}$$

где $f \in C([T, +\infty) \times R^n, R^n)$, имеющее асимптотическое равновесие [2], имеет в качестве аттрактора множество всех вектор-многочленов нулевой степени, т. е. пространство R^n. Задаче существования асимптотического равновесия посвящено большое число работ (см., например, [3, 4]). Однако во всех указанных работах эта задача решена методом возмущений [2–4], когда правая часть уравнения (1) возмущается так, что свойство асимптотического равновесия все еще сохраняется. В работе [5] эта задача решена прямым методом. В настоящей работе эта же задача решается с использованием вектор-функций Ляпунова. Именно поэтому удалось облегчить ограничения на правую часть уравнения, обеспечивающие существование для нее аттрактора R^n. Далее в работе решается задача о существовании аттрактора, когда наперед заданная степень многочлена не превышает $n-1$, где n — порядок уравнения. Вводится понятие полиномиального асимптотического равновесия. В этом случае все решения имеют полиномиальную асимптотику и для любого наперед заданного многочлена степени $n-1$ существуют решения уравнения, асимптотически приближающиеся к заданному многочлену при неограниченном стремлении аргумента к бесконечности. Заметим, что если $n = 1$, то это будет асимптотическим равновесием уравнения (1). В заключение приводится аналог асимптотического равновесия, когда независимая переменная изменяется на конечном промежутке. Затем новое понятие применяется для нахождения периодических решений. Далее уравнение (1) рассматривается без предварительного предположения существования асимптотического равновесия.

2. Абсолютно равномерная ограниченность решений и асимптотическое равновесие. Связь между ограниченными решениями, устойчивостью и существованием периодических решений была установлена во многих работах, в том числе в работе [6]. В связи с этим возникает вопрос: нет ли связи между существованием ограниченных решений и аттракторов? Однако решению задач о существовании полиномиальных аттракторов мешает то, что в классификации Иосидзавы ограниченных решений [6] есть лишь решения, когда $t \ge t_0$.

Определение 1. *Решения* $x(t; t_0, x_0)$ *дифференциального уравнения* (1)

 ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 2000, т. 52, № 10

называются абсолютно равномерно ограниченными для $\|x_0\| \le r$, $t \ge T$, *если* $\|x(t; t_0, x_0)\| \le c_0(r)$ *для всех* $T \le t$, $t_0 < +\infty$ *и* x_0, *когда* $\|x_0\| \le r$.

Теорема 1. *Для абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения* (1) *при* $\|x_0\| \le r$, $t \ge T$, *необходимо и достаточно существование функций* V, $W\colon [T, +\infty) \times R^n \to (0, +\infty)$ *таких, что*:

a) $V(t, x), W(t, x) \to +\infty$ *при* $\|x\| \to +\infty$ *равномерно по* t;

b) $V(t, x) \le \rho_1(r)$, $W(t, x) \le \rho_2(r)$ *для* $\|x\| \le r$;

c) $V(t, x(t))$, $W(t, x(t))$ — *соответственно невозрастающая и неубывающая функции, где* $x(t)$ — *решение уравнения* (1).

Доказательство состоит из двух частей. Сначала доказывается существование функции V при $t \ge t_0$. Для этого случая доказательство приведено в работе [6]. Доказательство существования функции W при $t \le t_0$ проводится аналогично. В работе [7] приведены теоремы об абсолютной равномерной ограниченности решений, когда непосредственно по функции f строятся функции Ляпунова V и W.

Заметим, что из равномерной ограниченности при $t \ge t_0$ не вытекает абсолютная равномерная ограниченность. Например, решения скалярного уравнения $dx/dt = -x$ равномерно ограничены при $t \ge t_0$, но не являются равномерно ограниченными при $t \le t_0$ даже при конечном T.

Рассмотрим граничную задачу с данными в бесконечно удаленной точке $t = +\infty$. По аналогии с задачей Коши с начальными данными в конечной точке эту задачу будем обозначать символом $(+\infty, x_0)$. В общем случае эта задача некорректна, так как теорема Пеано не гарантирует существование решения $x(t; +\infty, x_0)$.

Теорема 2. *Если множество* $E = \{x(t; t_0, x_0) : T \le t,\, t_0 < +\infty,\, x_0 \in R^n\}$, *где* x_0 — *фиксированный вектор, равномерно ограничено по* t *и* t_0, *т.е. решения* $x(t; t_0, x_0)$ *абсолютно равномерно ограничены, то задача* $(+\infty, x_0)$ *имеет хотя бы одно решение.*

Доказательство. Поскольку

$$x(t_1; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_1} f(s, x(s; t_0, x_0))\,ds,$$

$$x(t_2; t_0, x_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_2} f(s, x(s; t_0, x_0))\,ds,$$

то

$$\|x(t_1; t_0, x_0) - x(t_2; t_0, x_0)\| \le \left|\int_{t_1}^{t_2} \|f(s, x(s; t_0, x_0))\|\,ds\right| \le$$

$$\le \left|\int_{t_1}^{t_2} \psi(s, M)\,ds\right| \le k|t_1 - t_2|,$$

где $\psi(s, M) = \sup\limits_{\|x\| \le M} \|f(s, x)\|$, $M = \sup E$, $k = \sup \psi(s, M)$ на компакте, определенном числами t_1 и t_2. Поэтому множество E равностепенно непрерывно. Отсюда E — компактно. Поэтому существует последовательность $\{t_0^n\}$ такая, что $t_0^n \to +\infty$ при $n \to +\infty$ и $x(t; t_0^n, x_0) \to x(t)$ равномерно по t

на каждом компакте из $[T, +\infty)$. Кроме того, $x(t)$ — решение уравнения (1) и $T \leq t < +\infty$. Следовательно, $x(t) = x(t; +\infty, x_0)$.

Если $\|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| \leq \alpha(t)\|x_1 - x_2\|$ и $\int_T^{+\infty} \alpha(s)\,ds < +\infty$, то решение $x(t; +\infty, x_0)$ единственно.

Теорема 3. *Если существуют и конечны пределы* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t; t_0, x_0)$ *при любых* $t_0 \geq T$, $x_0 \in R^n$ *и при любом* $x_0 \in R^n$ *решения* $x(t; t_0, x_0)$ *абсолютно равномерно ограничены, то уравнение* (1) *имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Из теоремы 2 вытекает, что при любом x_0 существует решение $x(t; +\infty, x_0)$. Отсюда $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t; +\infty, x_0)$ существует и конечен. Поэтому существует асимптотическое равновесие и, следовательно, R^n — аттрактор для уравнения (1).

Пределы $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t; t_0, x_0)$ существуют, если $\int_T^{+\infty} \psi(s, M)\,ds < +\infty$. Действительно,

$$\|\dot{x}(s; t_0, x_0)\| \leq \|f(s, x(s; t_0, x_0))\| \leq \sup_{\|x\|\leq M} \|f(t, x)\| = \psi(s, M).$$

Поэтому

$$\left\| \int_T^{+\infty} \dot{x}\,ds \right\| \leq \int_T^{+\infty} \|\dot{x}\|\,ds \leq \int_T^{+\infty} \psi(s, M)\,ds.$$

Все понятия, определенные выше, имеют глобальный характер. Поэтому доказательство теоремы справедливо при всех $x \in R^n$. Однако в прикладных задачах уравнение (1) часто определено лишь на ограниченном множестве пространства R^n.

Рассмотрим этот случай. Пусть уравнение (1) определено при $T \leq t < +\infty$ и $x \in S = \{x : \|x\| \leq l\}$, $f \in C([T, +\infty) \times S, R^n)$.

Определение 2. *Будем говорить, что уравнение* (1) *в шаре* $S_\Delta = \{x : \|x\| \leq \leq \Delta\}$, $\Delta < l$, *имеет асимптотическое равновесие, если* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t; t_0, x_0)$ *существует и конечен при любых* $T \leq t_0 < +\infty$ *и* $\|x_0\| \leq \Delta$ *и для любого* $x_0 \in S_\Delta$ *существует такое решение* $x(t)$ *уравнения* (1), *что* $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = x_0$.

Возникает вопрос: при каких условиях задачи, сформулированные в теоремах 2, 3, имеют решения для уравнения (1)? Ясно, что главную роль здесь играет абсолютная равномерная ограниченность решений. Однако теорема 1 здесь не применима, так как она имеет глобальный характер. Следовательно, нужен новый критерий абсолютной равномерной ограниченности решений уравнения (1).

Теорема 4. *Для того чтобы решения уравнения* (1), *начинающиеся в шаре* S_Δ, *были абсолютно равномерно ограниченными, необходимо и достаточно, чтобы существовали функции* $V, W\colon [T, +\infty) \times S \to (0, +\infty)$, *имеющие свойства:*

a) $V(t, x) \leq \rho_1(\Delta)$, $W(t, x) \leq \rho_2(\Delta)$ *для* $x_0 \in S_\Delta$, $T \leq t < +\infty$;

b) $V(t, x(t))$, $W(t, x(t))$ — *соответственно невозрастающая и неубывающая функции, где* $x(t)$ — *решение уравнения* (1);

c) *для функций* V *и* W *существует* $\bar{x} \in S$, $\|\bar{x}\| > \Delta$, *такой, что при любом* $\|x\| \geq \|\bar{x}\|$ *и* $t \in [T, +\infty)$, *зависящем от* x, *справедливы неравенства*

$$V(t, x) \geq V_2(\|\bar{x}\|) > V_1(\Delta),$$

$$W(t, x) \geq W_2(\|\bar{x}\|) > W_1(\Delta).$$

Эта теорема при $t \geq t_0$ и более общих условиях доказана в [8]. Случай $t \leq t_0$ рассматривается аналогично.

Теорема 5. *Если решения уравнения* (1) *абсолютно равномерно ограничены в шаре* S_Δ *и* $\|x(t; t_0, x_0)\| \leq M(\Delta)$, $\|x_0\| \leq \Delta$, $\Delta < M(\Delta) < l$ *и* $\int_T^{+\infty} \psi(s, M)\, ds < +\infty$, *то уравнение* (1) *в шаре* $S_\Delta = \{x : \|x\| \leq \Delta\}$ *имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Решения $x(t; +\infty, x_0)$, $\|x_0\| \leq \Delta$, существуют при всех $T \leq t < +\infty$ и $x_0 \in S_\Delta$. Кроме того, при любых $T \leq t_0 < +\infty$ и $x_0 \in S_\Delta$ существует $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t; t_0, x_0) \in S_\Delta$. Это доказывается аналогично доказательству этих утверждений в теореме 3.

Легко получить теорему об асимптотическом равновесии, используя метод сравнения. Пусть

$$\|f(t, x)\| \leq \lambda(t, \|x\|), \tag{2}$$

где $t \geq T$, $x \in R^n$, $\lambda \in C([T, +\infty) \times R_+^1, R_+^1)$, $R_+^1 = [0, +\infty)$.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t, z). \tag{3}$$

Предположим, что решения уравнения (3) абсолютно равномерно ограничены. Для уравнения (3) справедливо неравенство

$$\left|\frac{d\|x\|}{dt}\right| \leq \lambda(t, \|x\|). \tag{4}$$

Действительно,

$$2\|x\|\left|\frac{d\|x\|}{dt}\right| = \left|\frac{d}{dt}\|x\|^2\right| = \left|\frac{d}{dt}(x, x)\right| = |(\dot{x}, x) + (x, \dot{x})| \leq$$

$$\leq 2|(x, \dot{x})| \leq 2\|x\|\|\dot{x}\| \leq 2\|x\|\|f(t, x)\| \leq 2\|x\|\lambda(t, \|x\|).$$

Отсюда следует неравенство (4). Из неравенства $d\|x\|/dt \leq \lambda(t, \|x\|)$ следует равномерная ограниченность решений уравнения (1) при $t \geq t_0$, а из неравенства $d\|x\|/dt \geq -\lambda(t, \|x\|)$ — равномерная ограниченность решений этого же уравнения при $t \leq t_0$. Эти утверждения вытекают из неравенства Важевского [9], примененного к уравнению (3). Следовательно, решения уравнения (1) абсолютно равномерно ограничены.

Теорема 6. *Пусть* $\lambda(t, z_1) \leq \lambda(t, z_2)$, $z_1 \leq z_2$ *и решения уравнения* (3) *абсолютно равномерно ограничены,* $\lim\limits_{t \to +\infty} z(t; t_0, z_0)$ *существует и конечен при любых* $t_0 \geq T$ *и* $z_0 \in R_+^1$. *Тогда уравнение* (1) *имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Поскольку $\|x\| = \|x(t; t_0, x_0)\| \leq z = z(t; t_0, z_0)$, $\|x_0\| \leq z_0$, $t \geq T$, то $\left\|\int_{t_0}^t dx\right\| \leq \int_{t_0}^t dz$ и $\int_t^{+\infty} dx$ существует и конечен. Отсюда следует, что существует и конечен $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t; t_0, x_0)$. Тогда на основании теоремы 3 уравнение (1) имеет асимптотическое равновесие.

3. Функции Ляпунова и асимптотическое равновесие. Возможности метода возмущений [2] ограничены характером асимптотического равновесия возмущенного уравнения и малостью возмущения. Прямой метод более универсален, но трудности здесь сосредоточены в построении функций Ляпунова. Однако преимущество таких теорем заключается в том, что в них содержится тактика решения задачи об асимптотическом равновесии.

Теорема 7. *Пусть существует непрерывная функция* $V:[T,+\infty)\times[T,+\infty)\times R^n\to(0,+\infty)$ *такая, что* $V(t;t_0,x)\to+\infty$ *при* $\|x\|\to+\infty$ *равномерно по* t *и* t_0; *для любого решения* $x(t)=x(t;t_0,x_0)$ *уравнения* (1) $V(t,t_0,x(t))\le\rho(r)$ *при* $\|x(t_0)\|\le r$, $T\le t$, $t_0<+\infty$, $\rho:[0,+\infty)\to(0,+\infty)$, *существует* $\lim\limits_{t\to+\infty}V(t;t_0,x(t))$. *Тогда если существует непрерывная функция* $V_0\in C(R^n_+,(0,+\infty))$, *которая является строго монотонной по модулю каждой компоненты вектора* x *и*

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{V(t,t_0,x)}{V_0(|x_1|,\ldots,|x_n|)}=k>0,\qquad x=\operatorname{colon}(x_1,\ldots,x_n)$$

равномерно по $x\in R^n$, *то уравнение* (1) *имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Поскольку для каждого решения $x(t)=x(t;t_0,x_0)$ уравнения (1) справедливо неравенство $V(t,t_0,x(t))\le\rho(r)$, где $T\le t$, $t_0<+\infty$, $\|x_0\|\le r$ и $V(t,t_0,x)\to+\infty$ равномерно по t и t_0 при $\|x\|\to+\infty$, то $\|x(t;t_0,x_0)\|\le M(r)$ при всех $T\le t$, $t_0<+\infty$, $\|x_0\|\le r$. Кроме того, существует

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{V(t,t_0,x(t))}{V_0(|x_1(t)|,\ldots,|x_n(t)|)}=k.$$

Далее, так как решение $x(t)$ при $T\le t<+\infty$ ограничено, то при фиксированном $1\le i\le n$ существует такой набор действительных чисел $(a_1,\ldots,a_{i-1},a_{i+1},\ldots,a_n)$, что справедливо неравенство

$$\left|\frac{V(t,t_0,x(t))}{V_0(a_1,\ldots,a_{i-1},|x_i(t)|,a_{i+1},\ldots,a_n)}-k\right|\le\left|\frac{V(t,t_0,x(t))}{V(|x_1(t)|,\ldots,|x_n(t)|)}-k\right|,\quad T\le t<+\infty,$$

где a_j либо $\sup\limits_t|x_i(t)|$, либо $\inf\limits_t|x_j(t)|$. Тогда

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{V(t,t_0,x(t))}{V_0(a_1,\ldots,a_{i-1},|x_i(t)|,a_{i+1},\ldots,a_n)}=k.$$

Поэтому $\lim\limits_{t\to+\infty}V_0(a_1,\ldots,a_{i-1},|x_i(t)|,a_{i+1},\ldots,a_n)=c_i$. Поскольку $V(t,t_0,x)\to\to+\infty$ при $\|x\|\to+\infty$ равномерно по t, то из условия $\lim\limits_{t\to+\infty}(V(t,t_0,x)/V_0(|x_1|,\ldots,|x_n|))=k>0$ равномерно по $x\in R^n$ следует $V_0(|x_1|,\ldots,|x_n|)\to\to+\infty$ при $\|x\|\to+\infty$. Рассмотрим функцию $y_i=V_0(a_1,\ldots,a_{i-1},\|x_i\|,a_{i+1},\ldots,a_n)$. Тогда существует обратная функция $\|x_i\|=V_0^{-1}(a_1,\ldots,a_{i-1},y_i,a_{i+1},\ldots,a_n)$. Если $|x_i|=|x_i(t)|$, то $y_i=y_i(t)$ и $y_i(t)\to c_i$ при $t\to+\infty$. Отсюда следует существование $\lim\limits_{t\to+\infty}x_i(t)$ при любом $1\le i\le n$. Поэтому существует $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t;t_0,x_0)$. Далее, так как выполняются условия теоремы 3, то существует асимптотическое равновесие.

В теореме 7 функцию V_0 можно определить так: пусть функция $V_1\in C([0,+\infty),(0,+\infty))$, строго монотонна и $V_0(|x_1|,\ldots,|x_n|)\overset{\text{def}}{=}V_1(\|x\|)$.

Далее по тексту теоремы 7. Однако первоначальная формулировка является более общей.

Ограничения на функцию Ляпунова могут быть слишком обременительными. В некоторых случаях полезнее рассматривать вектор-функции Ляпунова.

Пусть $V: [T, +\infty) \times R^n \to R_+^m$ — дифференцируемая вектор-функция Ляпунова, $R_+^m = \{x : x \in R^m, x \geq 0\}$, $\|V(t, x)\| \leq V_0(\Delta)$, $\|x\| \leq \Delta$. Тогда производная V в силу уравнения (1) имеет вид

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t, x) = \varphi(t, x, V).$$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dt} = \varphi(t, x, V). \tag{5}$$

Пусть $x = x(t; t_0, x_0)$, $y(t; t_0, y_0, x_0)$ — решение уравнения (5) с начальными данными (t_0, y_0).

Теорема 8. *Если решения уравнения* (5) *удовлетворяют неравенству* $\|y(t; t_0, y_0, x_0)\| \leq M(\Delta)$, $\|y_0\| \leq \Delta$, *равномерно по* x_0, $T \leq t$, $t_0 < +\infty$ *и это же уравнение имеет асимптотическое равновесие, то при* $\lim\limits_{t \to +\infty} V_i(t, x)/\|x\| = k > 0$ *равномерно по* x, *где* $1 \leq i \leq m$, *уравнение* (1) *имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Поскольку $V(t, x(t; t_0, x_0))$ — решение уравнения (5), то

$$\|V(t, x(t; t_0, x_0))\| \leq M(\|V(t_0, x_0)\|) \leq M_1(\Delta), \quad \|x_0\| \leq \Delta, \quad T \leq t, \quad t_0 < +\infty.$$

Кроме того, существует и конечен $\lim\limits_{t \to +\infty} V(t, x(t; t_0, x_0))$. Поэтому из условия $\lim\limits_{t \to +\infty} V_i(t, x)/\|x\| = k$ равномерно по x вытекает существование конечного $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t; t_0, x_0)$. Отсюда же и из предыдущего вытекает неравенство $\|x(t; t_0, x_0)\| \leq M_2(\Delta)$, $\|x_0\| \leq \Delta$ равномерно по $T \leq t$, $t_0 < +\infty$.

Следовательно, выполняются условия теоремы 3.

Теорема 9. *Пусть*

$$W_i(t, x) + hq_i^{(2)}(t, W(t, x)) + o(h) \leq$$

$$\leq W_i(t + h, x + hf(t, x)) \leq W_i(t, x) + hq_i^{(1)}(t, W(t, x)) + o(h)$$

при $h \to 0$, *где* $q_i^{(1)}, q_i^{(2)} \in C([T, +\infty) \times R_+^m, R^1)$, $W_i \in C([T, +\infty) \times R^n, R_+^1)$ *и локально липшицевы по второй переменной,* $i = \overline{1, m}$, *при некотором* $1 \leq j \leq m$, $\lim\limits_{t \to +\infty} W_j(t, x)/\|x\| = k_j > 0$ *равномерно по* x. *Тогда если вектор-функция* $q^{(1)}(t, y) = \operatorname{colon}\left(q_1^{(1)}(t, y), \ldots, q_m^{(1)}(t, y)\right)$ *является квазимонотонно возрастающей* [9] *по переменной* $y \in R_+^m$, *а вектор-функция* $q^{(2)}(t, y) = \operatorname{colon}\left(q_1^{(2)}(t, y), \ldots, q_m^{(2)}(t, y)\right)$ — *квазимонотонно убывающей и уравнение*

$$\frac{du}{dt} = q^{(1)}(t, u) \tag{6}$$

имеет асимптотическое равновесие, его решения равномерно ограничены при $t \geq t_0$, *а решения уравнения*

$$\frac{dz}{dt} = q^{(2)}(t, z)$$

равномерно ограничены при $t \le t_0$, *то уравнение* (1) *имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство. Поскольку

$$q^{(2)}(t, W) \le \frac{dW}{dt} \le q^{(1)}(t, W),$$

где производная dW/dt вычислена в силу уравнения (1), то, применяя неравенство Важевского [9], как и в случаях (3), (4), получаем абсолютно равномерную ограниченность решений уравнения (1). Из существования асимптотического равновесия у уравнения (6) следует существование конечного предела $\lim\limits_{t\to+\infty} W(t, x(t))$, $W = \operatorname{colon}(W_1, \ldots, W_m)$. Тогда из условия $\lim\limits_{t\to+\infty} W_j(t, x)/\|x\| = k_j > 0$ равномерно по x следует существование конечного предела $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t; t_0, x_0)$ при любых $T \le t_0 < +\infty$, $x_0 \in R^n$.

Установим условия, при выполнении которых существуют полиномиальные аттракторы.

4. Полиномиальная асимптотика решений. Сначала рассмотрим уравнение

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}), \tag{7}$$

где $f \in C([T, +\infty) \times R^n, R)$.

Определение 3. *Будем говорить, что уравнение* (7) *имеет полиномиальную асимптотику порядка* k, *если для любого решения* $x(t)$ *этого уравнения существует такой полином* $P_k(t) = a_0 t^k + \ldots + a_{k-1} t + a_k$, *что*

$$x^{(j)}(t) = P_k^j(t) + o(1), \quad j = 0, \ldots, k, \tag{8}$$

при $t \to +\infty$, *причем при* $k \ge 0$ *существует хотя бы одно решение* $x(t)$ *такое, для которого* $a_0 \ne 0$.

Для нуль-многочлена $P_k(t) \equiv 0$ будем считать $k = -\infty$ и условия (8) выполняются при $j = 0$, как и в случае $k = 0$.

Будем решать задачу о полиномиальной асимптотике порядка $n-1$ для уравнения (7).

Теорема 10. *Пусть*

$$f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \le \lambda\left(t, \frac{|x|}{t^{n-1}}, \ldots, \left|x^{(n-1)}\right|\right), \qquad t \ge T,$$

где:

a) $\lambda \in C([T, +\infty) \times R_+^n, R_+^1)$, $R_+^1 = [0, +\infty)$, $\lambda(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \le \lambda(t, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ *при* $\alpha_i \le \beta_i$, $i = \overline{s, n}$ *и любом* $t \ge T$;

b) $\displaystyle\int\limits_t^{+\infty}\int\limits_{s_1}^{+\infty}\ldots\int\limits_{s_{n-1}}^{+\infty} \lambda(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, ds_1 \ldots ds_n = o(1)$ *при* $t \to +\infty$ *и любом* $\alpha \in R_+^n$, $\alpha = \operatorname{colon}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Тогда уравнение (7) *имеет решения* $x(t)$ *такие, что для них справедливы асимптотические формулы* (8) *при* $k = n-1$ *и* $a_0 \ne 0$.

Доказательство. При $T \le t_0 \le t < +\infty$ имеем

$$x(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \ldots + a_{n-2} t + a_{n-1} +$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s))\, ds. \tag{9}$$

Тогда из (9) получаем

$$\begin{aligned} \frac{|x(t)|}{t^{n-1}} &\le c_1 + b_1 \int_{t_0}^{t} \lambda\left(s, \frac{|x|}{t^{n-1}}, \ldots, \left|x^{(n-1)}\right|\right) ds, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left|x^{(n-1)}(t)\right| &\le c_n + b_n \int_{t_0}^{t} \lambda\left(s, \frac{|x|}{t^{n-1}}, \ldots, \left|x^{(n-1)}\right|\right) ds. \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть $t_0 \ge T$ и $v = \max_t \left\{|x(t)|/t^{n-1}, \ldots, \left|x^{(n-1)}(t)\right|\right\}$. Не теряя общности, считаем $t \ge 1$. Тогда из (10) имеем

$$v(t) \le c_0 + b_0 \int_{t_0}^{t} \lambda_0(s, v(s))\, ds, \tag{11}$$

где $\lambda_0(s, v(s)) = \lambda_0(s, v(s), \ldots, v(s))$, положительные постоянные c_0 и b_0 зависят от начальных данных, определяющих решение $x(t)$.

Рассмотрим неравенство

$$\psi(t) \le c_0 + b_0 \int_{t_0}^{t} \lambda_0(s, \varphi(\psi)\psi(s))\, ds, \tag{12}$$

где

$$\varphi(\psi) = \begin{cases} \min(1, T_1/\psi), & \psi \ne 0; \\ 1, & \psi = 0, \end{cases}$$

T_1 — произвольное фиксированное число, $\psi(t) \ge 0$. Ясно, что решение неравенства (12) ограничено. Пусть $0 < c_0 < T_2$. Тогда при достаточно большом t_0 $\psi(t) < T_2$. Пусть $T_2 = T_1$. Тогда неравенства (12) и (11) совпадают. Поэтому $v(t) < T_2$ при $t \ge t_0$. Отсюда

$$\frac{\left|x^{(k)}(t)\right|}{t^{n-k-1}} < T_2, \quad t \ge t_0, \quad k = \overline{0, n-1}. \tag{13}$$

Теперь из равенства (9), учитывая, что

$$\frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-1} f(s, x(s), x'(s), \ldots, x^{(n-1)}(s))\, ds =$$
$$= \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{t_1} \ldots \int_{t_0}^{t_{n-1}} f(s_n, x(s_n), x'(s_n), \ldots, x^{(n-1)}(s_n))\, ds_1 \ldots ds_n,$$

имеем

$$x(t) = \overline{a}_0 t^{n-1} + \overline{a}_1 t^{n-2} + \ldots + \overline{a}_{n-2} t + \overline{a}_{n-1} +$$
$$+ \int_{t}^{+\infty} \int_{s_1}^{+\infty} \ldots \int_{s_{n-1}}^{+\infty} f(s_n, x(s_n), x'(s_n), \ldots, x^{(n-1)}(s_n))\, ds_1 \ldots ds_n. \tag{14}$$

Сходимость интегралов из равенства (14) следует из неравенств (13). Числа $\overline{a}_0$, $\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{n-2}, \overline{a}_{n-1}$ зависят от начальных данных. Из (9) и (13) вытекает, что начальные данные можно подобрать так, чтобы $\overline{a}_0 \neq 0$.

Определение 4. *Будем говорить, что уравнение* (7) *имеет полиномиальное асимптотическое равновесие порядка* k, *если оно имеет полиномиальную асимптотику порядка* k *и для любого набора действительных чисел* $(a_0, \ldots \ldots, a_k)$ *существует такое решение* $x(t)$ *уравнения* (7), *что для этого решения и полинома* $P_k(t) = a_0 t^k + \ldots + a_{k-1} t + a_k$ *справедливы асимптотические формулы* (8).

Теорема 11. *Пусть выполняются условия теоремы* 10 *и решения уравнения*

$$\frac{dz}{dt} = \lambda_0(t, z) \tag{15}$$

абсолютно равномерно ограничены. Тогда уравнение (7) *имеет полиномиальное асимптотическое равновесие порядка* $n-1$.

Доказательство. Из абсолютной равномерной ограниченности решений уравнения (15) и неравенства (11) вытекает равномерность относительно t_0 оценок (13) и, следовательно, уравнение (7) имеет полиномиальную асимптотику порядка $n-1$.

Пусть заданы начальные данные $x(t_0) = x_0$, $x'(t_0) = x_0', \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{(n-1)}$. Тогда при $t \geq t_0$ имеем

$$x^{(k)}(t) = a_0 (t - t_0)^{n-k-1} + \ldots + a_{n-k-1} + \\ + \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t-s)^{n-k-1} f(s, x(s), \ldots, x^{(n-1)}(s))\, ds, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Поэтому

$$\frac{\left| x^{(k)}(t) \right|}{t^{n-k-1}} \leq a_0 + b_0 \int_{t_0}^{t} \lambda\left(s, \frac{|x(s)|}{s^{n-1}}, \ldots, \left| x^{(n-1)}(s) \right| \right) ds.$$

Поскольку решения уравнения (15) абсолютно равномерно ограничены, то из неравенства (11) вытекает, что множество $\{ v(t) \}$ ($v(t) = \operatorname{colon}(x(t)/t^{n-1}, x'(t)/t^{n-2}, \ldots, x^{(n-1)}(t))$, $x(t)$ — решение уравнения (7) с фиксированными начальными данными $x(t_0) = x_0, \ldots, x^{(n-1)}(t_0) = x_0^{n-1}$) при произвольно изменяющемся $t_0 \geq T$ равномерно ограничено относительно t_0, $T \leq t < +\infty$, $\| v(t) \| \leq T_2$. Так как

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{x^{(k)}(t)}{t^{n-k-1}} \right| \leq c, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad 0 \leq t < +\infty, \tag{16}$$

где c — положительная постоянная, то для множества $\{ v(t) \}$ справедлива теорема Арцела о компактности. Неравенство (16) вытекает из неравенства (13) и абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения (15).

Теперь рассмотрим систему уравнений

$$x^{(k)}(t) = a_0 t^{n-k-1} + \ldots + a_{n-k-1} + \\ + \int_{t_0}^{t} \int_{t_0}^{s_1} \ldots \int_{t_0}^{s_{n-k-1}} f(s_{n-k}, x(s_{n-k}), \ldots, x^{(n-1)}(s_{n-k}))\, ds_1 \ldots ds_n, \quad k = \overline{0, n-1}, \tag{17}$$

$(a_0, \ldots, a_{n-1})$ — произвольный набор действительных чисел.

В функциональном пространстве $C^{(n-1)}([T,+\infty), R^1)$ выберем подмножество $X \subset C^{(n-1)}([T,+\infty), R^1)$ такое, что если $x \in X$, то $|x^{(k)}(t)|/t^{n-k-1} \le c$, $k = \overline{0, n-1}$, $t \ge T$. Пусть $Y = \{x/t^{n-1} : x \in X\}$ и $\|y\| = \max_k \sup_t |x^{(k)}(t)|/t^{n-k-1}$, $y \in Y$. Тогда Y — линейное нормированное пространство и $S = \{y : \|y\| \le T_2\}$ — компактное множество. Рассмотрим оператор

$$Ly = a_0 + \frac{a_1}{t} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{t^{n-1}} +$$

$$+ \frac{1}{t^{n-1}} \frac{1}{(n-1)!} \int_{t_0}^{t} (t - s/t)^{n-1} f(s, x(s), \ldots, x^{(n-1)}(s))\, ds, \quad y \in S.$$

Если $|a_0| < T_2$, то при достаточно большом $t_0 \ge T$ $L : S \to S$ и на основании теоремы Шаудера – Тихонова L в S имеет неподвижную точку: $Ly = y$. Отсюда вытекает существование решения $x(t)$ системы (17) и $|x^{(k)}(t)|/t^{n-k-1} \le T_2$, $k = \overline{0, n-1}$. На основании теоремы Арцела существует такая последовательность $\{t_0^m\}$, $\lim_{m\to+\infty} t_0^m = +\infty$, что $x\left(t : t_0^m, x_0, x_0', \ldots, x_0^{(n-1)}\right)$ равномерно на каждом компакте стремится к функции $x_0(t)$ при $m \to +\infty$ и $x_0(t)$ является решением системы

$$x^{(k)}(t) = a_0 t^{n-k-1} + \ldots + a_{n-k-1} +$$

$$+ (-1)^{n-k} \int_{t_0}^{+\infty} \int_{s_1}^{+\infty} \ldots \int_{s_{n-k-1}}^{+\infty} f(s_{n-k}, x(s_{n-k}), \ldots, x^{(n-1)}(s_{n-k}))\, ds_1 \ldots ds_n, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Легко проверяется, что $x_0(t)$ является решением уравнения (7) и

$$x_0^{(k)}(t) = P_{n-1}^{(k)}(t) + o(1), \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

при $t \to +\infty$, где $P_{n-1}(t) = a_0 t^{n-1} + a_1 t^{n-2} + \ldots + a_{n-2} t + a_{n-1}$. Теорема доказана.

Теперь рассмотрим аналогичную задачу относительно уравнения (1). Вектор-функцию $P_k(t) = \operatorname{colon}(P_k^1(t), \ldots, P_k^n(t))$ будем называть вектор-многочленом степени k, если все компоненты $P_k^i(t)$ являются многочленами степени $k \ge 0$.

Определение 5. *Будем говорить, что уравнение* (1) *имеет полиномиальную асимптотику порядка* k, *если для любого решения* $x(t)$ *этого уравнения существует такой вектор-многочлен* $P_k(t)$, *что*

$$\lim_{t\to\infty} (x(t) - P_k(t))^{(j)} = 0, \quad j = 0, 1, \ldots, k. \tag{18}$$

Для нуль-многочлена $P_k(t) \equiv 0$ будем считать $k = -\infty$ и условие (18) выполняется при $j = 0$, как и в случае $k \ge 0$. Кроме того, хотя бы при одном значении i

$$P_k^i(t) = a_0^i t^k + a_1^i t^{k-1} + \ldots + a_k^i, \quad a_0^i \ne 0.$$

Определение 6. *Будем говорить, что уравнение* (1) *имеет полиномиальное асимптотическое равновесие порядка* k, *если оно имеет полиномиальную асимптотику порядка* k *и для любого вектор-многочлена* $P_k(t)$ *степени* k

существует такое решение $x(t)$ *уравнения* (1), *что для этого решения и полинома* $P_k(t)$ *существует предел* (18).

Пусть $f \in C^{(q,q)}([T,+\infty) \times R^n, R^n)$, $q \ge r-1$. Тогда

$$x^{(r)}(t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + f(t,x(t))\frac{\partial}{\partial t}\right)^{r-1} f(t,x(t)). \tag{19}$$

Скалярный вариант уравнения (19) — уравнение (7), который рассмотрен выше. Аналог теорем 10, 11 для уравнения (19) легко получить по этой же схеме.

В качестве аттракторов могут быть использованы и другие функциональные множества, например решения некоторого другого дифференциального уравнения. Такие задачи рассматривались многими авторами, но несколько в иной постановке [10, 11].

Перейдем к аналогу асимптотического равновесия, когда независимая переменная принимает значения на конечной числовой оси.

5. Равновесие на компакте. Рассмотрим уравнение (1) в предположении, что $f \in C^{(0,1)}([T,+\infty) \times D, R^n)$, $D = \{x: \|x\| \le l\}$.

Определение 7. *Будем говорить, что уравнение* (1) *на компакте* $[c_0, c]$ *имеет равновесие, если существуют компакты* $S_1 = \{x: \|x\| \le r_1 < l\}$ *и* S_2, $S_2 \subseteq S_1$, *такие, что существует* $\lim\limits_{t\to c-0} x(t; c_0, x_0)$ *для любого* $x_0 \in S_1$, *принадлежащий множеству* S_2, *и наоборот: для любого* $x_0 \in S_2$ $\lim\limits_{t\to c_0+0} x(t; c, x_0)$ *существует и принадлежит множеству* S_1.

Теорема 12. *Пусть решения уравнения* (1) $x(t; c_0, x_0)$, $\|x_0\| \le r_1$, *на компакте* $[c_0, c]$ *существуют и существует непрерывная функция* $V: [T,+\infty) \times R^n \to (0,+\infty)$ *такая, что*:

a) $\lim\limits_{t\to c-0} \left(V(t,x)/V_0(\|x\|)\right) = k$, $0 < k < +\infty$, *равномерно по* x, $V_0 \in C([0,+\infty),(0,+\infty))$ — *строго монотонно возрастающая функция и* $V_0(q) \ge p_0 > 0$ *при всех* $q \ge 0$, $\lim\limits_{r\to+\infty} V_0(r) = +\infty$;

b) $V(c, x(c)) \le k_0$ $\forall x(t; c_0, x_0)$, $\|x_0\| \le r_1$, $k_0/k \ge p_0$.

Тогда если $V_0^{-1}(k_0/k) \le r_1$, *где* V_0^{-1} — *функция, обратная функции* V_0, *то уравнение* (1) *на компакте* $[c_0, c]$ *имеет равновесие и* $S_2 = \{x(c; c_0, x_0): \|x_0\| \le r_1\}$.

Доказательство. Поскольку

$$\lim_{t\to c-0} \frac{V(t,x(t))}{V_0(\|x(t)\|)} = \frac{\lim\limits_{t\to c-0} V(t,x(t))}{\lim\limits_{t\to c-0} V_0(\|x(t)\|)} = \frac{V(c,x(c))}{\lim\limits_{t\to c-0} V_0(\|x(t)\|)} \le \frac{k_0}{\lim\limits_{t\to c-0} V_0(\|x(t)\|)},$$

то $\lim\limits_{t\to c-0} V_0(\|x(t)\|) \le k_0/k$. Тогда $\|x(c)\| \le V_0^{-1}(k_0/k) \le r_1$. Кроме того, решения $x(t; t_0, x_0)$ непрерывно зависят от начальных данных. Поэтому уравнение (1) на компакте $[c_0, c]$ имеет равновесие, $S_2 = \{x(c; c_0, x_0): \|x_0\| \le r_1\}$. Теорема доказана.

Заметим, что если уравнение (1) имеет на сегменте $[c_0, c]$ равновесие, то существует решение $x(t; t_0, x_0)$, $x_0 \in S_1$, такое, что $x(c; c_0, x_0) = x_0$. Это вытекает из непрерывной зависимости решений от начальных данных. Действительно, оператор $L\bar{x} = x(c; c_0, \bar{x})$, $\bar{x} \in S_1$, на основании принципа Шаудера имеет неподвижную точку x_0.

Определение 8. *Будем говорить, что уравнение* (1) *имеет неподвижную* *точку на сегменте* $[c_0, c]$, *если решение* $x(t; c_0, x_0)$ *такое, что* $x(c; c_0, x_0) = x_0$.

Легко заметить, что если существует равновесие на сегменте $[c_0, c]$, то существует и неподвижная точка на этом же сегменте.

Следствие. *Пусть* $f(t+\omega, x) \equiv f(t, x)$ *при всех* $-\infty < t < +\infty$ *и* $x \in R^n$, $\omega > 0$, $c_0 = 0$, $c = \omega$. *Тогда при условиях теоремы* 12 *уравнение* (1) *имеет* ω-*периодическое решение.*

Действительно, оператор $L\colon S_1 \to S_2$, где $Lx_0 = x(\omega; 0, x_0)$, $x_0 \in S_1$, имеет неподвижную точку. Следовательно, уравнение (1) имеет ω-периодическое решение $x(t; 0, x_0)$, $x_0 \in S_1$.

Применим полученные результаты к решению задачи существования периодических решений возмущенных линейных дифференциальных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f_0(t, x), \tag{20}$$

где $A(\cdot)\colon (-\infty, +\infty) \to \mathrm{Hom}(R^n, R^n)$ — непрерывное отображение, $f_0 \in C((-\infty, +\infty) \times D, R^n)$, $D = \{x\colon \|x\| \le r_0\}$, $A(t+\omega) \equiv A(t)$, $f_0(t+\omega, x) \equiv f_0(t, x)$, $\omega > 0$ при любом $x \in D$.

Предположим, что задача Коши (t_0, x_0) не только разрешима при любых t_0 и $x_0 \in D$, но и решение $x(t; t_0, x_0)$ единственно и непрерывно зависит от начальных значений t_0, x_0. Установим, при каких условиях уравнение (20) на множестве $D_0 = \{x\colon \|x\| \le r_1\}$, $r_1 < r_0$, имеет ω-периодическое решение.

Пусть $Y(t)$ — фундаментальная матрица уравнения $dy/dt = \dot{A}(t)y$, нормированная в точке ω: $Y(\omega) = E$, E — единичная матрица.

Рассмотрим замену

$$x = Y(t)y. \tag{21}$$

Тогда уравнение (20) перейдет в уравнение

$$\frac{dy}{dt} = Y^{-1}(t) f_0(t, Y(t)y). \tag{22}$$

К уравнению (22) можно применить следствие из теоремы 12. Здесь поступим несколько иначе. Пусть $g \in C([0, +\infty) \times [0, +\infty), R^1)$, $W \in C([0, +\infty) \times R^n, [0, +\infty))$, $W(t, \cdot)$ — локально липшицева по второй переменной при любом $t \in [0, +\infty)$. Кроме того,

1) $W(t+h, y + Y^{-1}(t) h f_0(t, Y(t)y)) \le W(t, y) + hg(t, W(t, y)) + o(h)$ при $h \to +0$;

2) $\|x\| \le W(t, y) \quad \forall t \in [0, +\infty)$.

Тогда [9]

$$\|y(t; t_0, y_0)\| \le \|z(t; t_0, z_0)\|, \quad t_0 \le t < t_0 + \delta, \quad \delta > 0, \tag{23}$$

где $\|y_0\| \le z_0$, $z(t; t_0, z_0)$ — максимальное решение скалярного уравнения

$$\frac{dz}{dt} = g(t, z). \tag{24}$$

Теорема 13. *Если уравнение* (24) *имеет решение* $z(t; 0, z_0)$ *такое, что* $0 \le t \le \omega$ *и* $z(\omega; 0, z_0) = z_0$, $z_0 \le r_1$, *т. е. если уравнение* (24) *имеет неподвижную точку* z_0 *на сегменте* $[0, \omega]$, *то уравнение* (1) *на множестве* D_0 *имеет* ω-*периодическое решение.*