УДК 519.21

И. И. Ежов, В. Ф. Каданков (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ГРАНИЧНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ДЛЯ РАЗНОСТИ НЕОРДИНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ

For a difference of independent renewal processes, we find distribution of the principal boundary-value functionals. We obtain the distribution of number of demands entering the queueing system $D_{\eta}^{\delta}|D_{\xi}^{\kappa}|1$ in the transient and stationary operating conditions.

Для різниці неординарних процесів відновлення знайдено розподіл основних граничних функціоналів. Отримано розподіл числа вимог у перехідному та стаціонарному режимах функціонування системи обслуговування $D_{\eta}^{\delta}|D_{\xi}^{\kappa}|1$.

1. Пусть $\eta, \xi, \kappa, \delta \in N_+ = \{1, 2, \dots\}$ — независимые случайные величины с конечными средними значениями. Зафиксируем вероятностное пространство (Ω, F, P) и введем на нем независимые случайные последовательности

$$\{\eta_n; n \ge 0\},\ \{\xi_n; n \ge 0\},\ \{\kappa_n; n \ge 0\},\ \{\delta_n; n \ge 0\}, \quad n \in N = \{0, 1, \dots\}, \qquad (1)$$

с такими свойствами:

$$\eta_0 = \xi_0 = \kappa_0 = \delta_0 = 0, \quad \eta_n = \eta_1' + \dots + \eta_n', \quad \eta_i' \doteq \eta,$$
$$\xi_n = \xi_1' + \dots + \xi_n', \quad \xi_i' \doteq \xi, \quad \kappa_n = \kappa_1' + \dots + \kappa_n', \quad \kappa_i' \doteq \kappa,$$
$$\delta_n = \delta_1' + \dots + \delta_n', \quad \delta_i' \doteq \delta, \quad i \in N_+.$$

Символ $\doteq$ означает совпадение распределений соответствующих случайных величин.

Для каждого $n \in N$ положим

$$\alpha_n = \max\{k \ge 0 : \xi_k \le n\}, \quad \beta_n = \max\{k \ge 0 : \eta_n \le n\}, \quad s(n) = \kappa_{\alpha_n} - \delta_{\beta_n},$$
$$\xi^+(n) = n - \xi_{\alpha_n}, \quad \eta^+(n) = n - \eta_{\beta_n}, \quad S_n^+ = \{s(n), \xi^+(n), \eta^+(n)\}, \qquad (2)$$
$$\xi^-(n) = \xi_{\alpha_n + 1} - n, \quad \eta^-(n) = \eta_{\beta_n + 1} - n, \quad S_n^- = \{s(n), \xi^-(n), \eta^-(n)\}.$$

Поясним вероятностный смысл введенных случайных процессов:

$\alpha_n \in N$, $n \ge 0$, — процесс восстановления, порожденный случайной последовательностью $\{\xi_n; n \ge 0\}$;

$\beta_n \in N$, $n \ge 0$, — процесс восстановления, порожденный случайной последовательностью $\{\eta_n; n \ge 0\}$;

$s(n) \in Z = \{0, \pm 1, \dots\}$, $n \ge 0$, — разность независимых неординарных процессов восстановления;

$S_n^+ \in Z \times N^2$, $n \ge 0$, — марковский процесс, сопутствующий процессу $s(n)$, $n \ge 0$, с возрастающими ступенчатыми компонентами $\xi^+(n), \eta^+(n)$;

$S_n^- \in Z \times N^2$, $n \ge 0$, — марковский процесс, сопутствующий процессу $s(n)$, $n \ge 0$, с убывающими ступенчатыми компонентами $\xi^-(n), \eta^-(n)$.

В настоящей работе найдено распределение основных граничных функционалов для процесса $s(n)$, $n \ge 0$, и распределение числа требований в системе обслуживания $D_{\eta}^{\delta}|D_{\xi}^{\kappa}|1$ в переходном и стационарном режимах, в предположении, что случайная величина δ имеет геометрическое распределение

$$P[\delta = n] = (1-b)b^{n-1}, \quad n \in N_+.$$

Введем на вероятностном пространстве (Ω, F, P) вспомогательные случайные элементы, порожденные случайными величинами $\eta, \xi, \kappa, \delta$ и случайными последовательностями (1):

1) $\{\xi_n; n \geq 0\}$ — случайная последовательность такая, что

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_n = \varepsilon_1' + \ldots + \varepsilon_n', \quad \varepsilon_i' = \varepsilon \in \{0, 1\}, \quad i \in N_+,$$

$$M[u^{\varepsilon}] = b + (1-b)u, \quad |u| \leq 1;$$

2) $\hat{\eta}, \hat{\xi} \in N$ — целочисленные неотрицательные случайные величины с распределениями

$$P[\hat{\eta} = i] = P[\eta > i](M[\eta])^{-1}, \quad P[\hat{\xi} = j] = P[\xi > j](M[\xi])^{-1}, \quad i, j \in N;$$

3) $\{\sigma_k, T_k; k \geq 0\}$ — момент первого достижения случайной последовательностью $\{\kappa_n, n \geq 0\}$ уровня $k \geq 0$ и величина перескока через этот уровень соответственно:

$$\sigma_k = \min\{n \geq 0; \kappa_n \geq k\}, \quad T_k = \kappa_{\sigma_k} - k, \quad k \in N.$$

Совместная производящая функция тройки $\{\sigma_k, T_k; k \geq 0\}$ имеет вид

$$\sum_{k \geq 0} \theta^k M[t^{\sigma_k} z^{T_k}] = \frac{z}{z-\theta} - \frac{\theta}{z-\theta} \frac{1 - tM[z^{\kappa}]}{1 - tM[\theta^{\kappa}]}, \quad |\theta|, |z| \leq 1, \quad t \in [0, 1);$$

4) $\zeta_t^+ \in N$, $t \in [0, 1)$, — целочисленная неотрицательная случайная величина с производящей функцией

$$M[u^{\zeta_t^+}] = \exp\left\{\sum_{n>0} \frac{1}{n} M[(u^{\eta_{\varepsilon_{\kappa_n}} - \xi_n} - 1)t^{\xi_n}; \eta_{\varepsilon_{\kappa_n}} > \xi_n]\right\}, \quad |u| \leq 1, \quad t \in [0, 1);$$

5) $\zeta_t^- \in N$, $t \in [0, 1)$, — целочисленная неотрицательная случайная величина с производящей функцией

$$M[v^{\zeta_t^-}] = \exp\left\{\sum_{n>0} \frac{1}{n} M[(v^{\xi_n - \eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}} - 1)t^{\eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}}; \xi_n > \eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}]\right\}, \quad |v| \leq 1, \quad t \in [0, 1).$$

Будем считать, что случайные величины ζ_t^+, ζ_t^- независимы от последовательности (1) и $\{\varepsilon_n, n \geq 0\}$. Отметим, что

$$\zeta^+ = \lim_{t \to 1} \zeta_t^+ \doteq \sup_{n \geq 0} \{\eta_{\varepsilon_{\kappa_n}} - \xi_n\}, \quad \zeta^- = \lim_{t \to 1} \zeta_t^- \doteq \sup_{n \geq 0} \{\xi_n - \eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}\}.$$

Пусть

$$\tau_k^+ = \inf\{n > 0: s(n) > k / S_0^+ = (0, 0, 0)\}, \quad k \in N,$$

— момент первого перескока процессом $s(n)$, $n \geq 0$, верхнего уровня $k \in N$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $k \in N$, $t \in [0, 1)$. *Тогда*

$$M[t^{\tau_k^+}; \tau_k^+ < \infty] =$$

$$= \frac{1}{1-b}\{M[t^{\xi_{\sigma_k}}; \zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{\kappa_n}} > \xi_{\sigma_k}] - bM[t^{\xi_{\sigma_{k+1}}}; \zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{\kappa_{n+1}}} > \xi_{\sigma_{k+1}}]\}.$$

***Следствие* 1.** *Пусть* $b = 0$. *Тогда*

$$P[\delta=1, \varepsilon=1] = 1, \quad s(n) = \kappa_{\alpha_n} - \beta_n$$

и

$$M[t^{\tau_k^+}; \tau_k^+ < \infty] = M[t^{\xi_{\sigma_k}}; \zeta_t^+ + \eta_{T_k} > \xi_{\sigma_k}], \quad k \in N,$$

где

$$M[u^{\zeta_t^+}] = \exp\left\{\sum_{n>0} \frac{1}{n} M[(u^{\eta_{\kappa_n} - \xi_n} - 1)t^{\xi_n};\ \eta_{\kappa_n} > \xi_n]\right\}, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0, 1).$$

Этот результат получен в работе [1].

***Следствие* 2.** *Пусть* $b=0$, $\kappa \equiv 1$. *Тогда*

$$P[\delta=1, \varepsilon=1] = P[\sigma_k = k, T_k = 0] = 1, \quad s(n) = \alpha_n - \beta_n$$

и

$$M[t^{\tau_k^+}; \tau_k^+ < \infty] = M[t^{\xi_k};\ \zeta_t^+ > \xi_k], \quad k \in N,$$

где

$$M[u^{\zeta_t^+}] = \exp\left\{\sum_{n>0} \frac{1}{n} M[(u^{\eta_n - \xi_n} - 1)t^{\xi_n};\ \eta_n > \xi_n]\right\}, \quad |u| \le 1, \quad t \in [0, 1).$$

Пусть

$$\mu_n^+ = \max\{s(0), \ldots, s(n) / S_0^+ = (0, 0, 0)\}.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\nu(t)$ — *геометрически распределенная случайная величина с параметром* t: $P[\nu(t)=n] = (1-t)t^n$, $n \in N$, $t \in [0, 1)$. *Тогда*

$$P[\mu_{\nu(t)} = k] = M[\eta][a_k(t) - b a_{k+1}(t)], \quad k \in N,$$

где

$$a_k(t) = M[t^{\xi_{\sigma_k}}; \zeta_t^+ + \hat{\eta} + \eta_{\varepsilon_{T_k}} = \xi_{\sigma_k}].$$

Если $M[\kappa\eta](1-b) < M[\xi]$, *то*

$$P[\mu^+ = k] = M[\eta]\{P[\zeta^+ + \hat{\eta} + \eta_{\varepsilon_{T_k}} = \xi_{\sigma_k}] - P[\zeta^+ + \hat{\eta} + \eta_{\varepsilon_{T_{k+1}}} = \xi_{\sigma_{k+1}}]\}, \ k \in N.$$

При $M[\kappa\eta](1-b) > M[\xi]$ $P[\mu^+ = k] = 1$.

Пусть

$$\tau_k^-(i, j) = \inf\{n > 0:\ s(n) < -k / S_0^- = (0, i, j)\}, \quad k, i, j \in N,$$

— момент первого перескока процессом $s(n)$, $n \ge 0$, нижнего уровня $-k \le 0$.

Теорема 3. *Пусть* $k, i, j \in N$. *Тогда*

$$M[t^{\tau_k^-(i,j)}; \tau_k^-(i,j) < \infty] = t M[t^{i+\eta_{\varepsilon_k}};\ j + \zeta_t^- > i + \eta_{\varepsilon_k}].$$

***Следствие* 3.** *Пусть* $b=0$. *Тогда*

$$P[\delta=1, \varepsilon=1] = 1, \quad s(n) = \kappa_{\alpha_n} - \beta_n$$

и

$$M[t^{\tau_k^-(i,j)}; \tau_k^-(i,j) < \infty] = t M[t^{i+\eta_k};\ j + \zeta_t^- > i + \eta_k],$$

где

$$M[v^{\zeta_t^-}] = \exp\left\{\sum_{n>0} \frac{1}{n} M[(v^{\xi_n - \eta_{\kappa_n}} - 1)t^{\eta_{\kappa_n}};\ \xi_n > \eta_{\kappa_n}]\right\}, \quad |v| \le 1, \quad t \in [0, 1).$$

***Следствие* 4.** *Пусть* $k = 0$ и $\tau_0^-(i, j)$ — *момент первого выхода процесса* $s(n)$, $n \geq 0$ ($S_0^- = (0, i, j)$), *в отрицательную полуплоскость. Тогда*

$$\mathrm{M}[t^{\tau_0^-(i,j)}; \tau_0^-(i,j) < \infty] = \mathrm{M}[t^{i+1}; \zeta_t^- > i - j].$$

Пусть $k, i, j \in N$ и

$$\mu_n^-(i, j) = \min\{s(0), \ldots, s(n) / S_0^- = (0, i, j)\}, \quad \mu^-(i, j) = \lim_{n \to \infty} \mu_n^-(i, j).$$

***Следствие* 5.** *Пусть* $\nu(t)$ — *геометрически распределенная случайная величина с параметром* $t \in [0, 1)$. *Тогда*

$$\mathrm{M}[\mu_{\nu(t)}^-(i, j) < -k] = t\mathrm{M}[t^{i+\eta_{\varepsilon_k}}; j + \zeta_t^- > i + \eta_{\varepsilon_k}], \quad k, i, j \in N.$$

Если $\mathrm{M}[\kappa\eta](1-b) > \mathrm{M}[\xi]$, *то*

$$\mathrm{M}[\mu^-(i, j) < -k] = \mathrm{P}[j + \zeta^- > i + \eta_{\varepsilon_k}], \quad k, i, j \in N.$$

При $\mathrm{M}[\kappa\eta](1-b) < \mathrm{M}[\xi]$ $\mathrm{P}[\mu^-(i,j) = -\infty] = 1$.

2. Перейдем к определению системы обслуживания $D_\eta^\delta | D_\xi^\kappa | 1$. Рассмотрим однородную цепь Маркова $\{Y_n; n \geq 0\}$ с фазовым пространством $N \cup N^3$ и такими переходными вероятностями за один шаг:

$$\mathrm{P}[(k, i, j) \to (k, i+1, j+1)] = \mathrm{P}[\eta > i+1, \xi > j+1 / \eta > i, \xi > j],$$

$$\mathrm{P}[(k, i, j) \to (k+r, 0, j+1)] = \mathrm{P}[\eta = i+1, \delta = r, \xi > j+1 / \eta > i, \xi > j], \quad r \in N_+,$$

$$\mathrm{P}[(k, i, j) \to (k-r, i+1, 0)] = \mathrm{P}[\xi = j+1, \kappa = r, \eta > i+1 / \eta > i, \xi > j], \quad r = \overline{1, k},$$

$$\mathrm{P}[(k, i, j) \to (i+1)] = \mathrm{P}[\xi = j+1, \kappa > k, \eta > i+1 / \eta > i, \xi > j],$$

$$\mathrm{P}[(k, i, j) \to (k+r, 0, 0)] = \mathrm{P}[\eta = i+1, \xi = j+1, \delta - \kappa = r / \eta > i, \xi > j], \quad r \geq -k,$$

$$\mathrm{P}[(k, i, j) \to (0)] = \mathrm{P}[\eta = i+1, \xi = j+1, \delta - \kappa < k / \eta > i, \xi > j],$$

$$\mathrm{P}[(i) \to (i+1)] = \mathrm{P}[\eta > i+1 / \eta > i],$$

$$\mathrm{P}[(i) \to (r, 0, 0)] = \mathrm{P}[\eta = i+1, \delta = r+1 / \eta > i], \quad r \in N, \quad k, i, j \in N.$$

Так введеная случайная последовательность $\{Y_n; n \geq 0\}$ описывает эволюцию одноканальной системы обслуживания с такими свойствами.

1. Требования на обслуживающий прибор поступают группами. Размеры групп — случайные величины, распределенные одинаково с δ. Группы требований поступают через независимые, распределенные одинаково с η промежутки времени.

2. Требования обслуживаются группами. Пусть n_0, n_1 — два последовательных момента, в которых заканчивается обслуживание очередных групп требований. Если в момент n_1 в системе было k требований и ρ^* — число требований, обслуженных в этот момент, то $(n_1 - n_0, \rho^*) \doteq (\xi, \min\{k, \kappa\})$.

3. Длина очереди неограничена. Под числом требований, находящихся в системе, будем понимать общее количество требований, которые находятся в очереди и на обслуживающем приборе.

Событие $\{Y_n = (k, i, j)\}$, $k, i, j \in N$, эквивалентно следующему состоянию системы: в момент времени n в системе находится $k+1$ требование; последнее поступление группы требований произошло в момент $n - i$; последнее обслуживание группы требований произошло в момент $n - j$.

Событие $\{Y_n = (i)\}$, $i \in N$, равносильно такому состоянию системы: в момент времени n система свободна от требований; с момента последнего поступления группы требований прошло i единиц времени.

Так введеную систему обслуживания будем обозначать символом $D_\eta^\delta | D_\xi^\kappa | 1$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $Y_0 = (0)$ *и* $i \in N$, $k, i, j \in N^3$. *Тогда*

$$\mathrm{P}[Y_{\nu(t)} = (k, i, j)] = \mathrm{M}[t^\eta] \frac{1-t}{1-\mathrm{M}[t^\eta]} \mathrm{P}[\eta > i, \xi > j] \mathrm{M}[t^{i+\eta_{\varepsilon_k}};\ i + \eta_{\varepsilon_k} = j + \zeta_t^-] c(t),$$

$$\mathrm{P}[Y_{\nu(t)} = (i)] =$$

$$= \frac{1-t}{1-\mathrm{M}[t^\eta]} \mathrm{P}[\eta > i] \left\{ t^i - \mathrm{M}[\xi]\mathrm{M}[t^\eta] \sum_{k \geq 0} \mathrm{M}[t^{i+\eta_{\varepsilon_k}};\ i + \eta_{\varepsilon_k} = \hat{\xi} + \zeta_t^-] c(t) \right\},$$

где

$$c^{-1}(t) = \frac{F^{-1}(1, t)}{1-b} + \mathrm{M}[\xi] \sum_{r \geq 0} \mathrm{M}[t^{\eta_{\varepsilon_r}};\ 1 + \hat{\xi} + \zeta_t^- = \eta_{\varepsilon_r}],$$

$$F(1, t) = \exp\left\{ \sum_{n>0} \frac{1}{n} \mathrm{M}[t^{\eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}};\ \xi_n \geq \eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}] \right\}.$$

Для $n \in N$ положим

$$s_n = \begin{cases} 0, & \text{если } Y_n \in N; \\ k+1, & \text{если } Y_n = (k, i, j), \quad (k, i, j) \in N^3. \end{cases}$$

Случайная последовательность $\{s_n; n \geq 0\}$ описывает эволюцию числа требований, находящихся в системе обслуживания.

***Следствие* 6.** *Пусть* $Y_0 = (0)$, $i \in N$. *Тогда*

$$\mathrm{P}[s_{\nu(t)} = k+1] = \mathrm{M}[t^\eta] \frac{1-t}{1-\mathrm{M}[t^\eta]} \mathrm{M}[\xi]\mathrm{M}[\eta]\mathrm{M}[t^{\hat{\eta}+\eta_{\varepsilon_k}};\ \hat{\eta} + \eta_{\varepsilon_k} = \hat{\xi} + \zeta_t^-] c(t),$$

$$\mathrm{P}[s_{\nu(t)} = 0] =$$

$$= \frac{1-t}{1-\mathrm{M}[t^\eta]} \mathrm{M}[\eta] \left\{ \mathrm{M}[t^{\hat{\eta}}] - \mathrm{M}[\xi]\mathrm{M}[t^\eta] \sum_{k \geq 0} \mathrm{M}[t^{\hat{\eta}+\eta_{\varepsilon_k}};\ \hat{\eta} + \eta_{\varepsilon_k} = \hat{\xi} + \zeta_t^-] c(t) \right\}.$$

***Следствие* 7.** *Пусть* $\rho = \mathrm{M}[\xi](\mathrm{M}[\eta]\mathrm{M}[\kappa](1-b))^{-1} < 1$ *и*

$$\Pi_k^{ij} = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[Y_n = (k, i, j)], \qquad \Pi^i = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[Y_n = (i)], \qquad k, i, j \in N,$$

— стационарное распределение цепи Маркова $\{Y_n; n \geq 0\}$. *Тогда*

$$\Pi^i = \mathrm{P}[\hat{\eta} = i] \left\{ 1 - \mathrm{M}[\xi] \sum_{k \geq 0} \mathrm{P}[i + \eta_{\varepsilon_k} = \hat{\xi} + \zeta_t^-] c \right\},$$

$$\Pi_k^{ij} = \mathrm{P}[\hat{\eta} = i, \xi = j] \mathrm{P}[i + \eta_{\varepsilon_k} = j + \zeta^-] c,$$

где

$$c^{-1} = c^{-1}(1) = \frac{F^{-1}(1, 1)}{1-b} + \mathrm{M}[\xi] \sum_{r \geq 1} \mathrm{P}[1 + \hat{\xi} + \xi^- = \eta_{\varepsilon_r}],$$

$$F(1, 1) = \exp\left\{ \sum_{n>0} \frac{1}{n} \mathrm{P}[\xi_n \geq \eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}] \right\}.$$

***Следствие* 8.** *Пусть* $\rho < 1$ *и*

$$\Pi_k = \lim_{n\to\infty} \mathrm{P}[s_n = k], \qquad k \in N,$$

— стационарное распределение числа требований, находящихся в системе обслуживания. Тогда

$$\Pi_0 = 1 - M[\xi] \sum_{k\ge 0} P[\hat\eta + \eta_{\varepsilon_k} = \hat\xi + \zeta^-]c,$$

$$\Pi_{k+1} = M[\xi]P[\hat\eta + \eta_{\varepsilon_k} = \hat\xi + \zeta^-]c, \quad k\in N.$$

3. Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $n\in N$ и

$$\eta^+(n) = n - \eta_{\beta_n}, \quad \xi^+(n) = n - \xi_{\alpha_n}, \quad S_n^+ = \{s(n), \eta^+(n), \xi^+(n)\}.$$

Согласно (1), (2), случайная последовательность $\{S_n^+; n\ge 0\}$ начинает эволюцию из состояния $(0, 0, 0)$ и принимает значения из множества $Z\times N^2$. Легко проверить, что она является цепью Маркова, однородной по времени и по первой компоненте, и имеет такие переходные вероятности за один шаг:

$$\begin{gathered} P[(k, i, j)\to(k, i+1, j+1)] = P[\eta > i+1, \xi > j+1/\eta > i, \xi > j], \\ P[(k, i, j)\to(k-r, 0, j+1)] = P[\eta = i+1, \delta = r, \xi > j+1/\eta > i, \xi > j], \quad r>0, \\ P[(k, i, j)\to(k+r, i+1, 0)] = P[\eta > i+1, \xi = j+1, \kappa = r/\eta > i, \xi > j], \quad r>0, \\ P[(k, i, j)\to(k+r, 0, 0)] = \\ = P[\eta = i+1, \xi = j+1, \kappa-\delta = r/\eta > i, \xi > j], \quad r\in Z, \quad k\in Z, \quad i, j\in N. \end{gathered} \tag{3}$$

Пусть $k, i, j\in N$ и

$$\tau_k^+(i, j) = \inf\{n>0:\ s(n) > k/S_0^+ = (0, i, j)\}, \quad \tau_k^+ \overset{\text{def}}{=} \tau_k^+(0, 0).$$

Положим

$$\varphi_k^{i,j}(t) = M[t^{\tau_k^+(i,j)}; \tau_k^+(i, j) < \infty]P[\eta > i, \xi > j].$$

Согласно переходным вероятностям (3), для этих функций справедливы обратные уравнения Колмогорова:

$$\begin{gathered} \varphi_k^{i,j}(t) = tP[\xi = j+1, \kappa > k, \eta > i+1] + tP[\eta = i+1, \xi = j+1, \kappa-\delta > k] + \\ + t\varphi_k^{i+1,j+1}(t) + t\sum_{r=1}^{k} P[\xi = j+1, \kappa = r]\varphi_{k-r}^{i+1,0}(t) + t\sum_{r=1}^{k} P[\eta = i+1, \delta = r]\varphi_{k+r}^{0,j+1}(t) + \\ + t\sum_{r=-\infty}^{k} P[\eta = j+1, \xi = j+1; \kappa-\delta = r]\varphi_{k-r}^{0,0}(t). \end{gathered} \tag{4}$$

Поэтому, положив

$$\Phi_\theta^t(u, v) = \sum_{k,i,j\ge 0} \theta^k u^i v^j \varphi_k^{i,j}(t) = \sum_{k\ge 0} \theta^k \varphi_k^t(u, v), \quad t\in[0, 1), \quad |\theta|, |u|, |v| \le 1,$$

из (4) получим

$$\begin{gathered} (uv - t)\Phi_\theta^t(u, v) = tM[v^\xi]\frac{u - M[u^\eta]}{1-u}\frac{1-M[\theta^\kappa]}{1-\theta} + \\ + tM[v^\xi u^\eta]\frac{1-M[\theta^{\kappa-\delta}]}{1-\theta} - t\Phi_\theta(u, 0)(1 - M[v^\xi\theta^\kappa]) - \\ - t\Phi_\theta^t(0, v)(1 - M[u^\eta\theta^{-\delta}]) + t\Phi_\theta^t(0, 0)(1 - M[v^\xi\theta^\kappa])(1 - M[u^\eta\theta^{-\delta}]) - \end{gathered}$$

$$- t\mathrm{M}[u^{\eta}] \sum_{m=0}^{\infty} \hat{\varphi}_m^t(0, v)\mathrm{M}[\theta^{m-\delta}; m < \delta] -$$

$$- t\mathrm{M}[u^{\eta}v^{\xi}] \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m^t(0, 0)\mathrm{M}[\theta^{m+\kappa-\delta}; m+\kappa < \delta], \quad |\theta|, |u|, |v| \le 1, \quad t \in [0, 1), \tag{5}$$

где

$$\hat{\varphi}_m^t(0, v) = \varphi_m^t(0, v) - \varphi_m^t(0, 0), \qquad m \in N.$$

Далее, будем предполагать, что переменные u, v связаны соотношением

$$uv = t, \quad t \in [0, 1), \qquad |u|, |v| \in [t, 1]. \tag{6}$$

Будем также считать, что случайная величина δ имеет геометрическое распределение

$$\mathrm{P}[\delta = n] = (1-b)b^{n-1}, \qquad n \in N_+,$$

и, следовательно,

$$1 - \mathrm{M}[u^{\eta}\theta^{-\delta}] = 1 - \mathrm{M}[u^{\eta}]\frac{(1-b)/\theta}{1-b/\theta} = \frac{1}{1-b/\theta}\left(1 - \frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta_{\varepsilon}}]\right), \quad |\theta| = 1, \tag{7}$$

где

$$\varepsilon \in \{0, 1\}, \quad \mathrm{M}[u^{\varepsilon}] = b + (1-b)u, \qquad |u| \le 1.$$

Используя равенства (6), (7), из уравнения (5) получаем

$$\mathrm{M}[v^{\xi}]\frac{u - \mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u}\frac{1-\mathrm{M}[\theta^{\kappa}]}{1-\theta} + \mathrm{M}[u^{\eta}v^{\xi}]\frac{1-\mathrm{M}[\theta^{\kappa-\delta}]}{1-\theta} = \Phi_{\theta}^t(u, 0)(1 - \mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]) +$$

$$+ \Phi_{\theta}^t(0, v)(1 - \mathrm{M}[u^{\eta}\theta^{-\delta}]) - \Phi_{\theta}^t(0, 0)(1 - \mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])(1 - \mathrm{M}[u^{\eta}\theta^{-\delta}]) +$$

$$+ \frac{1-b}{\theta}\frac{\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-b/\theta}(\hat{\Phi}_{\theta}^t(0, v) + \mathrm{M}[v^{\xi}b^{\kappa}]\Phi_b^t(0, 0)), \quad |u|, |v| \in [t, 1], \quad |\theta| \le 1, \tag{8}$$

где $\hat{\Phi}_b^t(0, v) = \Phi_b^t(0, v) - \Phi_b^t(0, 0)$.

Полагая в равенстве (8) $\theta = \mathrm{M}[u^{\eta_{\varepsilon}}]$, находим

$$\frac{1}{1-b}\frac{1}{1-u}[(1 - \mathrm{M}[v^{\xi}u^{\eta_{\varepsilon\kappa}}]) - (1 - \mathrm{M}[v^{\xi}])] =$$

$$= \Phi_{\varepsilon(u)}^t(u, 0)(1 - \mathrm{M}[v^{\xi}u^{\eta_{\varepsilon\kappa}}]) + \Phi(v, b, t) + \frac{\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-b}, \tag{9}$$

$$|u|, |v| \in [t, 1], \qquad t \in [0, 1),$$

где

$$\Phi(v, b, t) = \hat{\Phi}_b^t(0, v) + \mathrm{M}[v^{\xi}b^{\kappa}]\Phi_b^t(0, 0), \quad \varepsilon(u) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{M}[u^{\eta_{\varepsilon}}] = b + (1-b)\mathrm{M}[u^{\eta}].$$

Поскольку для переменных u, v выполняется равенство (6), то справедливо факторизационное разложение

$$(1-\mathrm{M}[v^{\xi}u^{\eta_{\varepsilon_\kappa}}])^{-1} = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[v^{\xi_n}u^{\eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}}]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[u^{\eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}-\xi_n}t^{\xi_n};\, \eta_{\varepsilon_{\kappa_n}} > \xi_n]\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[v^{\xi_n-\eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}}t^{\eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}};\, \xi_n \ge \eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}]\right\} = E(u,t)F(v,t),$$

$$|u|,|v| \in [t,1], \qquad t\in[0,1).$$

С учетом этого разложения равенство (9) принимает вид

$$\frac{1}{1-b}\frac{1}{1-u}[E^{-1}(u,t)-(1-\mathrm{M}[v^{\xi}])F(v,t)] = \Phi^t_{\varepsilon(u)}(u,0)E^{-1}(u,t) +$$

$$+ F(v,t)\left(\Phi(v,b,t)+\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-b}\right), \quad v = \frac{t}{u}, \quad |u|,|v|\in[t,1], \quad t\in[0,1). \quad (10)$$

В предположении, что $f(u)$ — ряд Лорана по переменной u, обозначим через $[f(u)]_+$ его правильную часть. Проверяется, что

$$\left[\frac{1}{1-u}(1-\mathrm{M}[v^{\xi}])F(v,t)\right]_+ = \frac{1}{1-u}(1-\mathrm{M}[t^{\xi}])F(t,t) = \frac{1}{1-u}E^{-1}(1,t).$$

Таким образом, из (10) находим

$$\Phi^t_{\varepsilon(u)}(u,0) = \frac{1}{1-b}\frac{1}{1-u}\left[1-\frac{E(u,t)}{E(1,t)}\right] = \frac{1}{1-b}\frac{1-\mathrm{M}[u^{\zeta_t^+}]}{1-u}, \quad |u|\le 1, \quad (11)$$

где

$$\mathrm{M}[u^{\zeta_t^+}] = \exp\left\{\sum_{n>0}\frac{1}{n}\mathrm{M}[(u^{\eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}-\xi_n}-1)t^{\xi_n};\, \eta_{\varepsilon_{\kappa_n}} > \xi_n]\right\}, \quad |u|\le 1.$$

Равенство (11) понадобится нам в дальнейшем. Введем обозначения

$$A_\theta^{-1}(u,v) = \left(1-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]\right)(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]),$$

$$A^{-1}(u,v) = (1-\mathrm{M}[v^{\xi}u^{\eta_{\varepsilon_{\kappa_n}}}]), \quad |\theta| = 1, \quad |u|,|v|<1,$$

$$a^0_\theta(u,v) = 1+a_\theta(u,v) = \sum_{k>0}\theta^k\mathrm{M}[v^{\xi_{\sigma_k}}u^{\eta_{\varepsilon_{T_k}}}].$$

Сформулируем важную для дальнейшего изложения лемму.

Лемма. *Справедливо равенство*

$$A_\theta(u,v) = A(u,v)\sum_{k\ge 0}\theta^k\mathrm{M}[v^{\xi_{\sigma_k}}u^{\eta_{\varepsilon_{T_k}}}] + A(u,v)\frac{\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]/\theta}{1-\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]/\theta}, \quad |\theta| = 1.$$

Доказательство этой леммы приведено в [2]. Умножая уравнение (8) на $A_\theta(u,v)\left(1-\frac{b}{\theta}\right)$ и выполняя некоторую перегруппировку слагаемых в его левой части, получаем

$$\frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u}\frac{(1-b/\theta)}{1-\theta}\frac{1}{1-\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]/\theta}-\frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u}\frac{1-u\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\theta}\left(1-\frac{b}{\theta}\right)A_\theta(u,v)=$$

$$=\frac{\Phi_\theta^t(u,0)}{1-\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]/\theta}\left(1-\frac{b}{\theta}\right)+\frac{\Phi_\theta^t(0,v)}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}-\Phi_\theta^t(0,0)+\frac{1-b}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]A_\theta(u,v)\Phi(v,b,t)-$$

$$-\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}{(1-\theta)(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])},\quad |\theta|=1,\quad |u|,|v|\in[t,1],\quad t\in[0,1). \qquad (12)$$

Пусть $[f(\theta)]_+$ — правильная часть ряда Лорана, соответствующая $f(\theta)$. Проверяется, что

$$\left[\frac{\Phi_\theta(u,0)}{1-\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]/\theta}\left(1-\frac{b}{\theta}\right)\right]_+=\frac{\Phi_\theta^t(u,0)-\frac{1}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]\Phi_{\varepsilon(u)}^t(u,0)}{1-\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]/\theta}-$$

$$-\frac{b}{\theta}\frac{\Phi_\theta^t(u,0)-\Phi_{\varepsilon(u)}^t(u,0)}{1-\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]/\theta}\stackrel{\text{def}}{=}C_\theta^t(u,0),$$

$$\frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u}\left[\frac{1-b/\theta}{1-\theta}\frac{1}{1-\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]/\theta}\right]_+=\frac{1}{1-\theta}\frac{1}{1-u},$$

$$\left[\frac{1}{\theta}A_\theta(u,v)\right]_+=\frac{a_\theta(u,v)}{\theta}A(u,v),$$

$$\frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u}\left[\frac{1-u\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\theta}\left(1-\frac{b}{\theta}\right)A_\theta(u,v)\right]_+=$$

$$=\frac{1-u\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-u}\frac{A(u,v)}{1-\theta}\left\{(1-\mathrm{M}[u^{\eta}])\left[a_\theta^0(u,v)-\frac{b}{\theta}a_\theta(u,v)\right]+\mathrm{M}[u^{\eta}]\right\}.$$

Сравнивая теперь правильные части лорановских рядов, соответствующие правой и левой частям уравнения (12), имеем

$$\frac{1}{1-u}\frac{1}{1-\theta}\left\{1-(1-u\mathrm{M}[v^{\xi}])A(u,v)\left[(1-\mathrm{M}[u^{\eta}])\left[a_\theta^0(u,v)-\frac{b}{\theta}a_\theta(u,v)\right]+\mathrm{M}[u^{\eta}]\right]\right\}=$$

$$=C_\theta^t(u,0)+\frac{\Phi_\theta^t(0,v)}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}-\Phi_\theta^t(0,0)+\frac{1-b}{\theta}\mathrm{M}[u^{\eta}]a_\theta(u,v)A(u,v)\Phi(v,b,t)-$$

$$-\frac{\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}{(1-\theta)(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])},\quad |\theta|\le 1,\quad |u|,|v|\in[t,1],\quad t\in[0,1). \qquad (13)$$

Умножая уравнение (9) на $A(u,v)\left(a_\theta^0(u,v)-\frac{b}{\theta}a_\theta(u,v)\right)$ и используя равенство (11), получаем следующее уравнение:

$$\frac{1}{1-u}\frac{1}{1-\theta}[1-(1-u\mathrm{M}[v^{\xi}])A(u,v)]\left[a_\theta^0(u,v)-\frac{b}{\theta}a_\theta(u,v)\right]=$$

$$=\frac{1}{1-b}\frac{1-\mathrm{M}[u^{\zeta_t}]}{1-u}\left[a_\theta^0(u,v)-\frac{b}{\theta}a_\theta(u,v)\right]+$$

$$+\Phi(v,b,t)A(u,v)\left[a_\theta^0(u,v)-\frac{b}{\theta}a_\theta(u,v)\right],\quad |u|,|v|\in[t,1],\quad t\in[0,1). \qquad (14)$$

Отметим,что из леммы следует тождество

$$\frac{1}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]} = A(u, v)\left\{a_{\theta}^{0}(u, v) - \frac{b}{\theta}\, a_{\theta}(u, v) - \frac{1-b}{\theta}\,\mathrm{M}[u^{\eta}]a_{\theta}(u, v)\right\},$$

$$|\theta| \le 1, \quad |u|, |v| < 1.$$

Вычитая из (13) равенство (14), проводя необходимые преобразования с использованием последнего замечания, получаем уравнение

$$\frac{1}{1-u}\frac{1}{1-\theta}\left\{\frac{1-b}{1-\theta} - \mathrm{M}[u^{\zeta_t}]\left[a_{\theta}^{0}(u, v) - \frac{b}{\theta}\, a_{\theta}(u, v)\right] - \left(1-\frac{b}{\theta}\right)\frac{\theta}{1-\theta}\,\frac{1-\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}\right\} =$$

$$= C_{\theta}^{t}(u, 0) + \frac{\Phi_{\theta}^{t}(0, v)}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]} - \Phi_{\theta}^{t}(0, 0) - \frac{\Phi(v, b, t)}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]} -$$

$$- \frac{(1-b)\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}] - (\theta-b)\mathrm{M}[v^{\xi}]}{(1-b)(1-\theta)(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])}, \quad |\theta| \le 1, \quad |u|, |v| \in [t, 1], \quad t \in [0, 1). \tag{15}$$

Это равенство — суть равенство рядов Лорана по переменной u (напомним, что выполняется условие (6)), и если $[f(u)]_+$ — правильная часть ряда Лорана $f(u)$, то нетрудно проверить, что

$$\left[\frac{1}{1-u}\frac{1-\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}\right]_+ = \frac{1}{1-u}\frac{1-\mathrm{M}[t^{\xi}]}{1-\mathrm{M}[t^{\xi}\theta^{\kappa}]},$$

$$\left[\frac{1}{1-u}\mathrm{M}[u^{\zeta_t^+}]a_{\theta}^{0}(u, v)\right]_+ = \frac{1}{1-u}\sum_{k\ge 0}\theta^k\,\mathrm{M}[u^{\zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_k}} - \xi_{\sigma_k}}t^{\xi_{\sigma_k}};\, \zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_k}} > \xi_{\sigma_k}] +$$

$$+ \frac{1}{1-u}\sum_{k\ge 0}\theta^k\,\mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_k}};\, \zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_k}} \le \xi_{\sigma_k}],$$

$$\frac{\theta}{1-\theta}\frac{1-\mathrm{M}[t^{\xi}]}{1-\mathrm{M}[t^{\xi}\theta^{\kappa}]} = \sum_{k\ge 0}\theta^k(1-\mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_k}}]).$$

Приравнивая теперь правильные части рядов Лорана, находящиеся в левой и правой частях уравнения (15), получаем

$$C_{\theta}^{t}(u, 0) = \frac{1}{1-u}\frac{1}{1-b}\sum_{k\ge 0}\theta^k\,\mathrm{M}[(1-u^{\zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_k}} - \xi_{\sigma_k}})t^{\xi_{\sigma_k}};\, \zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_k}} > \xi_{\sigma_k}] -$$

$$- \frac{1}{1-u}\frac{1}{1-b}\sum_{k\ge 0}\theta^k\,\mathrm{M}[(1-u^{\zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_{k+1}}} - \xi_{\sigma_k}})t^{\xi_{\sigma_{k+1}}};\, \zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_{k+1}}} > \xi_{\sigma_{k+1}}]. \tag{16}$$

Полагая в этом равенстве $u = 0$, находим

$$C_{\theta}^{t}(0, 0) = \frac{1}{1-b}\sum_{k\ge 0}\theta^k\{\mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_k}};\, \zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_k}} > \xi_{\sigma_k}] -$$

$$- b\mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_{k+1}}};\, \zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_{k+1}}} > \xi_{\sigma_{k+1}}]\}. \tag{17}$$

Однако, поскольку

$$C_{\theta}^{t}(0, 0) = \Phi_{\theta}^{t}(0, 0) = \sum_{k\ge 0}\theta^k\,\mathrm{M}[t^{\tau_k^+(0,0)};\, \tau_k^+(0,0) < \infty] =$$

$$= \sum_{k\ge 0}\theta^k\,\mathrm{M}[t^{\tau_k^+};\, \tau_k^+ < \infty],$$

равенство (17) и завершает доказательство теоремы 1.

Перейдем теперь к определению функций $\Phi_\theta^t(u, 0)$, $\Phi_\theta^t(0, v)$, $\Phi_\theta^t(u, v)$. Используя определение функций $C_\theta^t(u, 0)$ и равенство (16), получаем

$$\left(1-\frac{1}{\theta}\,\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]\right)^{-1}\left\{\Phi_\theta^t(u,0)\left(1-\frac{b}{\theta}\right)-\frac{1}{\theta}\,\Phi_{\varepsilon(u)}^t(u,0)(\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]-b)\right\} =$$
$$= \frac{1}{1-u}\frac{1}{1-b}\sum_{k\geq 0}\theta^k[c_k(u,t)-bc_{k+1}(u,t)], \tag{18}$$

где

$$c_k(u,t) = \mathrm{M}[(1-u^{\zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_k}} - \xi_{\sigma_k}})t^{\xi_{\sigma_k}};\, \zeta_t^+ + \eta_{\varepsilon_{T_k}} > \xi_{\sigma_k}], \qquad k\in N,$$

$$\Phi_{\varepsilon(u)}^t(u,0) = \frac{1}{1-b}\,\frac{1-\mathrm{M}[u^{\zeta_t^+}]}{1-u}.$$

Из равенства (18) находим

$$\Phi_\theta^t(u,0)\left(1-\frac{b}{\theta}\right) = \frac{1}{1-u}\frac{1}{1-b}\left(1-\frac{1}{\theta}\,\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]\right)\sum_{k\geq 0}\theta^k[c_k(u,t)-bc_{k+1}(u,t)] +$$
$$+\frac{1}{\theta}(\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]-b)\Phi_{\varepsilon(u)}^t(u,0).$$

Из этого соотношения следуют равенства

$$\varphi_k^t(u,0) = \frac{1}{1-u}\frac{1}{1-b}[c_k(u,t)-\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]c_{k+1}(u,t)], \qquad k\in N,$$

$$\varphi_\theta^t(u,0) = \sum_{k\geq 0}\varphi_k^t(u,0) = \frac{1}{1-u}\frac{1}{1-b}\left\{C_\theta^t(u)\left(1-\frac{1}{\theta}\,\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]\right)+\frac{1}{\theta}\,\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]c_0(u,t)\right\}, \tag{19}$$

где $C_\theta^t(u) = \sum_{k\geq 0}\theta^k c_k(u,t)$.

Для определения функции $\Phi_\theta^t(0, v)$ нам потребуется найти функцию $\Phi(v, b, t)$. Для этого возвращаемся к уравнению (10). Пусть $\langle f(v)\rangle_+$ — часть ряда Лорана $f(v)$, содержащая слагаемые с положительными показателями степеней переменной v. Проверяется, что

$$\left\langle\frac{1}{1-t/v}(1-\mathrm{M}[v^\xi])F(v,t)\right\rangle_+ = \frac{1}{1-t/v}(1-\mathrm{M}[v^\xi])F(v,t)-\frac{1}{1-t/v}E^{-1}(1,t).$$

Проводя указанное проектирование остальных слагаемых уравнения (10), получаем

$$F(v,t)\left(\Phi(v,b,t)+\frac{\mathrm{M}[v^\xi]}{1-b}\right) = \frac{1}{1-b}\frac{v}{v-t}E^{-1}(1,t)-$$
$$-\frac{v}{v-t}(1-\mathrm{M}[v^\xi])F(v,t)\frac{1}{1-b}, \qquad |v|\leq 1.$$

Из этого равенства находим

$$\Phi(v,b,t) = \frac{1}{1-b}\frac{v}{v-t}E^{-1}(1,t)F^{-1}(v,t)-$$
$$-\frac{v}{v-t}(1-\mathrm{M}[v^\xi])\frac{1}{1-b}-\frac{\mathrm{M}[v^\xi]}{1-b}, \qquad |v|\leq 1. \tag{20}$$

Далее проверяется, что $(uv = t)$

$$\left\langle \frac{1}{1-u}\left\{\frac{1-b}{1-\theta} - \mathrm{M}[u^{\zeta_t^+}]\left[a_\theta^0(u,v) - \frac{b}{\theta}\,a_\theta(u,v)\right] - \frac{\theta}{1-\theta}\left(1-\frac{b}{\theta}\right)\frac{1-\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]}\right\}\right\rangle_+ =$$

$$= \frac{v}{v-t}\left\{\frac{1-b}{1-\theta} - \frac{\theta-b}{1-\theta}\,\frac{1-\mathrm{M}[v^{\xi}]}{1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]} - \sum_{k\ge 0}\theta^k[d_k(v,t) - bd_{k+1}(v,t)] - \right.$$

$$\left. - \sum_{k\ge 0}\theta^k[c_k(0,t) - bc_{k+1}(0,t)]\right\},$$

где

$$d_k(v,t) = \mathrm{M}[v^{\xi_{\sigma_k} - \eta_{\varepsilon_{T_k}} - \zeta_t^+}\, t^{\eta_{\varepsilon_{T_k}} + \zeta_t^+};\ \xi_{\sigma_k} \ge \eta_{\varepsilon_{T_k}} + \zeta_t^+],$$

$$c_k(0,t) = \mathrm{M}[t^{\xi_{\sigma_k}};\ \eta_{\varepsilon_{T_k}} + \zeta_t^+ > \xi_{\sigma_k}].$$

Проводя операцию проектирования от обеих частей уравнения (15) и выполняя необходимые преобразования, окончательно получаем

$$\Phi_\theta^t(0,v) = \frac{t}{t-v}\,\Phi_\theta^t(0,0)(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]) + \frac{1}{1-b}\,\frac{v}{v-t}\,E^{-1}(1,t)F^{-1}(v,t) -$$

$$- \frac{t}{v-t}\,\mathrm{M}[v^{\xi}]\,\frac{1-\mathrm{M}[\theta^{\kappa}]}{1-\theta} - \frac{v}{v-t}\,(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])\,\frac{1}{1-b}\sum_{k\ge 0}\theta^k[d_k(v,t) - bd_{k+1}(v,t)]. \tag{21}$$

Для определения функции $\Phi_\theta^t(u,v)$ перепишем уравнение (5), учитывая тот факт, что случайная величина δ имеет геометрическое распределение. После преобразований получаем

$$\Phi_\theta^t(u,v)\left(\frac{uv}{t} - 1\right) = -\Phi_\theta^t(u,0)(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}]) - \Phi_\theta^t(0,v)\left(1 - \frac{1}{\theta}\,\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]\right)\frac{1}{1-b/\theta} +$$

$$+ \Phi_\theta^t(0,0)(1-\mathrm{M}[v^{\xi}\theta^{\kappa}])\left(1-\frac{1}{\theta}\,\mathrm{M}[u^{\eta_\varepsilon}]\right)\frac{1}{1-b/\theta} - \frac{1-b}{\theta}\,\Phi(v,b,t)\,\frac{\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-b/\theta} +$$

$$+ \mathrm{M}[v^{\xi}]\,\frac{1-\mathrm{M}[u^{\eta}]}{1-u}\,\frac{1-\mathrm{M}[\theta^{\kappa}]}{1-\theta} + \mathrm{M}[v^{\xi}u^{\eta}]\,\frac{1}{1-\theta}\left(1 - \frac{1-b}{\theta-b}\,\mathrm{M}[\theta^{\kappa}]\right), \tag{22}$$

$$|u|, |v|, |\theta| \le 1, \qquad t \in [0,1).$$

Функции $\Phi_\theta^t(0,0)$, $\Phi_\theta^t(u,0)$, $\Phi_\theta^t(0,v)$, $\Phi(v,b,t)$ определены равенствами (17), (19), (20), (21), и, следовательно, равенством (22) определена функция $\Phi_\theta^t(u,v)$.

Теоремы 2–4 приведены без доказательства. Один из функционалов (момент достижения верхней границы) другими методами изучался в [3].

1. *Ежов И. И., Каданков В. Ф.* О производящей функции времени достижения границы полунепрерывной разностью независимых процессов восстановления с дискретным временем // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 4. – С. 553–561.
2. *Ежов И. И., Каданков В. Ф.* О распределении максимума разности независимых процессов восстановления с дискретным временем // Там же. – 1998. – **50**, № 10. – С. 1426–1432.
3. *Пирджанов Б.* Полумарковское блуждание на суперпозиции двух процессов восстановления // Там же. – 1990. – **42**, № 11. – С. 1500–1508.

Получено 06.03.2000