УДК 519.21

В. А. Коваль (Нац. техн. ун-т Украины "КПИ", Киев)

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ВЫПОЛНЕНИЯ УСИЛЕННОГО ЗАКОНА БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ МАРТИНГАЛОВ

A theorem on the strong law of large numbers for martingales is proved. The existence of moments higher than first is not assumed. A number of the well-known results on the strong law of large numbers both for martingales and for sequences of sums of independent random variables are derived from the theorem proved.

Доведено теорему про підсилений закон великих чисел для мартингалів. При цьому не припускається існування моментів, вищих за перший. Із доведеної теореми виводиться ряд відомих результатів про підсилений закон великих чисел як для мартингалів, так і для послідовностей сум незалежних випадкових величин.

Усиленные законы больших чисел (УЗБЧ) для мартингалов при различных моментных предложениях исследовались многими авторами (см., например, [1 – 5]). В данной статье доказывается одно достаточное условие выполнения УЗБЧ для мартингалов, которое не предполагает наличия каких-либо моментов выше первого. С помощью полученного достаточного условия выведен ряд известных результатов об УЗБЧ как для мартингалов, так и для последовательностей сумм независимых случайных величин.

Пусть $(S_n, \mathcal{F}_n, n \ge 0)$ — мартингал, заданный на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, $S_0 = 0$; $(a_n, n \ge 1)$ — последовательность действительных чисел таких, что $a_n \to 0$ $(n \to \infty)$ (не обязательно монотонно). Зафиксируем произвольное число $\lambda > 1$ и положим

$$n_j = \max\left\{n : |a_n| \ge \lambda^{-j}\right\}, \quad j \ge 1.$$

Считаем, что максимум по пустому множеству равен нулю. В дальнейшем E обозначает математическое ожидание, $I(A)$ — индикатор события A, п. н. — почти наверное. Также полагаем $\sum_{i\in\varnothing} x_i = 0$ и $a_0 = 1$.

Обозначим

$$U_j = a_{n_{j+1}}\left(S_{n_{j+1}} - S_{n_j}\right), \quad j \ge 1.$$

Теорема. *Если для любого* $\varepsilon > 0$ *выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}\left[|U_j|\, I(|U_j| > \varepsilon)\right] < \infty, \tag{1}$$

или эквивалентное ему условие

$$\sum_{j=1}^{\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \mathrm{P}\left(|U_j| > x\right) dx < \infty, \tag{2}$$

то имеет место УЗБЧ

$$a_n S_n \to 0 \quad п.\,н., \quad n \to \infty. \tag{3}$$

Доказательство. Если $n_j < n \le n_{j+1}$, то $|a_n| < \lambda^{-j}$ и, значит,

$$|a_n S_n| \le \left|a_n (S_n - S_{n_j})\right| + \left|a_n S_{n_j}\right| \le T_j + \lambda^{-j}\left|S_{n_j}\right|, \tag{4}$$

где

$$T_j = \lambda^{-j} \max_{n_j < n \le n_{j+1}} \left| S_n - S_{n_j} \right|.$$

Используя неравенство Брауна [6], при любом $\varepsilon > 0$ получаем

$$\mathrm{P}(T_j > \varepsilon) \le \mathrm{P}\left(\max_{n_j < n \le n_{j+1}} \left| S_n - S_{n_j} \right| > \varepsilon / \lambda a_{n_{j+1}} \right) \le$$

$$\le (2\lambda/\varepsilon) \mathrm{E}\left[|U_j| I(|U_j| > \varepsilon / 2\lambda) \right].$$

Отсюда с учетом соотношения (1) и леммы Бореля – Кантелли следует

$$T_j \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad j \to \infty. \tag{5}$$

Так как (полагаем $n_0 = 0$)

$$\lambda^{-j} \left| S_{n_j} \right| \le \lambda^{-j} \sum_{k=0}^{j-1} \lambda^k T_k,$$

то из (5) и леммы Теплица получаем

$$\lambda^{-j} \left| S_{n_j} \right| \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad j \to \infty. \tag{6}$$

Из (4) – (6) следует УЗБЧ (3).

Докажем эквивалентность условий (1) и (2). Поскольку по определению мартингала $\mathrm{E}|S_n| < \infty$ при всех $n \ge 1$, то, применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\mathrm{E}\left[|U_j| I(|U_j| > \varepsilon) \right] = \varepsilon \mathrm{P}(|U_j| > \varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{+\infty} \mathrm{P}(|U_j| > x)\, dx.$$

Отсюда вытекает эквивалентность условий (1) и (2), так как из условия (2) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ ряд $\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}(|U_j| > \varepsilon)$ сходится.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Если для некоторого* $\nu \ge 1$ *выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{E}|U_j|^{\nu} < \infty, \tag{7}$$

то имеет место УЗБЧ (3).

Доказательство вытекает из очевидной оценки

$$\mathrm{E}\left[|U_j| I(|U_j| > \varepsilon) \right] \le \varepsilon^{1-\nu} \mathrm{E}|U_j|^{\nu}.$$

Из следствия 1 при $\nu = 2$ получаем следующий результат, установленный в случае последовательности независимых случайных величин $(X_i,\ i \ge 1)$ в [7, 8].

***Следствие* 2.** *Обозначим* $X_i = S_i - S_{i-1},\ i \ge 1$. *Если выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{n_{j+1}}^2 \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \mathrm{E} X_i^2 < \infty, \tag{8}$$

или эквивалентное (8) *условие*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_{n \ge i} a_n^2 \, \mathrm{E} X_i^2 \; < \; \infty, \tag{9}$$

то имеет место УЗБЧ (3).

Доказательство. Эквивалентность условий (8) и (7) при $\nu = 2$ очевидна. Импликация $(9) \Rightarrow (8)$ следует из неравенства

$$\sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} a_{n_{j+1}}^2 \, \mathrm{E} X_i^2 \; \le \; \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \sup_{n \ge i} a_n^2 \, \mathrm{E} X_i^2,$$

а импликация $(8) \Rightarrow (9)$ — из неравенства

$$|a_n| \le \lambda \left| a_{n_{j+1}} \right| \qquad \text{при всех } n > n_j.$$

Следствие 2 доказано.

Следующий результат в случае последовательности независимых случайных величин $(X_i,\ i \ge 1)$ известен как УЗБЧ Прохорова – Лоэва (см., например, [9]). Его обобщение на мартингалы имеется также в [5].

Положим $\log x = \max\{1, \ln x\}$, где $\ln$ обозначает натуральный логарифм.

Следствие 3. *Пусть* $a_n \downarrow 0$ $(n \to \infty)$ *и мартингал-разность* $(X_n, \mathcal{F}_n, n \ge 0)$ *удовлетворяет условиям:* 1) $\mathrm{E}\left(X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \le \mathrm{E} X_n^2$ *п. н.*, $n \ge 1$; 2) $|X_n| \le \le o\left(1/a_n \log\log a_n^{-1}\right)$ *п. н.*, $n \to \infty$. *Если для любого* $\varepsilon > 0$ *выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left[-\varepsilon \Big/ a_{n_{j+1}}^2 \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \mathrm{E} X_i^2\right] < \infty, \tag{10}$$

то

$$a_n \sum_{i=1}^{n} X_i \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad n \to \infty.$$

Доказательство аналогично доказательству соответствующего результата в случае независимых случайных величин (см., например, [9], § 18) и сводится к проверке условия (2).

Замечания. **1.** Условие типа 1 в следствии 3 обсуждалось, например, в работах [10, 11].

2. Следствие 3 остается справедливым, если в нем условие 1 заменить менее жестким: 1′) $\mathrm{E}\left(X_n^2 \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) \le t_n^2$ п. н. при всех $n \ge 1$, где $(t_n, n \ge 1)$ — некоторая последовательность положительных чисел. Такое условие использовалось, например, в работе [12] (см. также [5]). Тогда вместо (10) нужно потребовать, чтобы для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left[-\varepsilon \Big/ a_{n_{j+1}}^2 \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} t_i^2\right] < \infty.$$

При проверке условия (10) может оказаться полезной следующая лемма.

Лемма. *Обозначим* $B_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E} X_i^2$, $n \ge 1$. *Если*

$$a_n^2 B_n \ln\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \min\{1, \ln(B_{k+1}/B_k)\}\right) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

то выполнено условие (10).

Доказательство. Введем в рассмотрение гауссовскую марковскую последовательность $(Z_n,\ n \geq 1)$, полагая $\mathrm{E}Z_n = 0$, $\sigma_n^2 = \mathrm{E}Z_n^2 = a_n^2 B_n$, $r_{n,n+1} = \mathrm{E}(Z_n Z_{n+1})/\sigma_n \sigma_{n+1} = B_n / B_{n+1}$, $n \geq 1$. Тогда в силу условия леммы [13] (теорема 4.6.1)

$$Z_n \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad n \to \infty.$$

Отсюда следует [13] (лемма 4.6.1), что для любого $\varepsilon > 0$ и любой последовательности натуральных чисел $(n_j,\ j \geq 1)$, $n_j \uparrow \infty$, $j \to \infty$, выполняется

$$\sum_{j=1}^{\infty} \exp\left[-\varepsilon / \sigma_{n_{j+1}}^2 \left(1 - r_{n_j, n_{j+1}}^2\right)\right] < \infty. \tag{11}$$

Но поскольку справедлива оценка

$$\sigma_{n_{j+1}}^2 \left(1 - r_{n_j, n_{j+1}}^2\right) \geq a_{n_{j+1}}^2 \sum_{i=n_j+1}^{n_{j+1}} \mathrm{E}X_i^2,$$

то из (11) следует (10).

Лемма доказана.

Следующий результат был получен Чоу [2].

Следствие 4. *Если мартингал-разность* $(X_i,\ \mathcal{F}_i,\ i \geq 0)$ *при некотором* $\nu \geq 2$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{E}|X_i|^{\nu} / i^{1+\nu/2} < \infty, \tag{12}$$

то

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad n \to \infty. \tag{13}$$

Доказательство. Покажем, что из условия (12) следует условие (7) при $\nu \geq 2$ и, значит, в силу следствия 1 при $a_n = 1/n$ имеет место (13).

При $\nu \geq 2$ справедлива оценка [14]

$$\mathrm{E}\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right|^{\nu} \leq \mathbb{C}\, n^{\nu/2-1} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}|X_i|^{\nu}, \tag{14}$$

где $\mathbb{C}$ — некоторая постоянная, зависящая только от ν. Поскольку в случае $a_n = 1/n - n_j = 2^j$, $j \geq 1$, то, используя неравенство (14), получаем

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j+1)\nu}\, \mathrm{E}\left|\sum_{i=2^j+1}^{2^{j+1}} X_i\right|^{\nu} \leq$$

$$\leq \mathbb{C} \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-(j+1)\nu} \left(2^{j+1} - 2^j\right)^{\nu/2-1} \sum_{i=2^j+1}^{2^{j+1}} \mathrm{E}|X_i|^{\nu} \leq$$

$$\leq \mathbb{C} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=2^j+1}^{2^{j+1}} 2^{-(j+1)(1+\nu/2)}\, \mathrm{E}|X_i|^{\nu} \leq \mathbb{C} \sum_{i=1}^{\infty} i^{-(1+\nu/2)} \mathrm{E}|X_i|^{\nu} < \infty.$$

Следствие 4 доказано.

Известно (см., например, [3]), что если $(X_i,\ i\ge 1)$ — последовательность независимых случайных величин ($\mathrm{E}X_i = 0$) и $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $n \ge 1$, то (3) имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$a_n S_n \xrightarrow{\mathrm{P}} 0, \qquad n \to \infty; \tag{15}$$

для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{P}\left(|U_j| > \varepsilon\right) < \infty. \tag{16}$$

Ясно, что из условия (2) следуют условия (15) и (16). Обратное неверно.

Приведем пример, который показывает, что в общем случае для мартингалов условие (2) не может быть ослаблено до условий (15), (16).

***Пример* 1** (см. также [3]). Будем рассматривать УЗБЧ (3) с нормирующей последовательностью $a_n = 1/n$, $n \ge 1$, т. е.

$$n^{-1} S_n \to 0 \quad \text{п. н.}, \quad n \to \infty. \tag{17}$$

В случае $a_n = 1/n$ при $\lambda = 2$ имеем $n_j = 2^j$, $j \ge 1$. Тогда

$$U_j = 2^{-(j+1)}\left(S_{2^{j+1}} - S_{2^j}\right), \qquad j \ge 1.$$

Приведем пример мартингала $(S_n, \mathcal{F}_n, n \ge 0)$, $S_0 = 0$, для которого не выполняется (17), но который удовлетворяет условиям (15) и (16) (при $a_n = 1/n$).

Пусть $(Y_i,\ i \ge 1)$ — последовательность независимых случайных величин, заданных на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$, с

$$P(Y_i = i) = P(Y_i = -i) = 1/2i,$$

$$P(Y_i = 0) = 1 - i^{-1}.$$

Отметим, что $\mathrm{E}Y_i = 0$ и $\mathrm{E}|Y_i| = 1$, $i \ge 1$.

Положим

$$S_0 = 0, \quad S_n = Y_n I(S_{n-1} = 0) + S_{n-1}|Y_n|, \qquad n \ge 1,$$

$$\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}, \quad \mathcal{F}_n = \sigma\{Y_1, \ldots, Y_n\}, \qquad n \ge 1.$$

С помощью элементарных вычислений убеждаемся, что $(S_n, \mathcal{F}_n, n \ge 0)$ — мартингал, причем $S_n = 0$ тогда и только тогда, когда $Y_n = 0$.

Покажем, что выполнено условие (15). Для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}(n^{-1}|S_n| > \varepsilon) \le \mathrm{P}(|S_n| \ne 0) = \mathrm{P}(|Y_n| \ne 0) =$$

$$= n^{-1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Покажем, что выполнено условие (16). Для любых $\varepsilon > 0$ и $j > 1$ имеем

$$\mathrm{P}(|U_{j-1}| > \varepsilon) \le \mathrm{P}\left(\left|S_{2^j}\right| + \left|S_{2^{j-1}}\right| \ne 0\right) \le$$

$$\le \mathrm{P}\left(\left|Y_{2^j}\right| \ne 0\right) + \mathrm{P}\left(\left|Y_{2^{j-1}}\right| \ne 0\right) = 3 \cdot 2^{-j}.$$

Отсюда следует, что условие (16) также выполнено.

Теперь покажем, что (17) не имеет места. Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(|Y_n| = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-1} = \infty,$$

то в силу леммы Бореля – Кантелли

$$P(n^{-1}S_n \neq 0 \ \text{б.ч.}) = P(Y_n \neq 0 \ \text{б.ч.}) = 1, \tag{18}$$

где б. ч. обозначает „бесконечное число раз".

Поскольку случайная величина $n^{-1}S_n$, $n \geq 1$, принимает только целые значения, то из (18) следует

$$P\left(\lim_{n\to\infty} n^{-1}S_n = 0\right) = 0.$$

***Пример* 2.** Пусть $(X_n, \mathcal{F}_n, n \geq 1)$ — мартингал-разность с

$$P(X_n = n^{1/2}/\log\log n) = P(X_n = -n^{1/2}/\log\log n) = \frac{1}{2}.$$

Тогда выполнены условия следствия 3 с $a_n = 1/n$, но условие (12) не выполнено ни при каком значении $\nu \geq 2$.

1. *Chow Y. S.* A martingale inequality and the law of large numbers // Proc. Amer. Math. Soc. – 1960. – **11**, № 1. – P. 107 – 111.
2. *Chow Y. S.* On a strong law of large numbers for martingales // Ann. Math. Statist. – 1967. – **38**, № 3. – P. 610.
3. *Stout W. F.* Almost sure convergence. – New York: Acad. Press, 1974. – 381 p.
4. *Hall P., Heyde C. C.* Martingale limit theory and its application. – New York: Acad. Press, 1980. – 308 p.
5. *Егоров В. А.* Об усиленном законе больших чисел и законе повторного логарифма для мартингалов и сумм независимых случайных величин // Теория вероятностей и ее применения. – 1990. – **35**, № 4. – С. 691 – 703.
6. *Brown B. M.* Martingale central limit theorems // Ann. Math. Statist. – 1971. – **42**, № 1. – P. 59 – 66.
7. *Мартикайнен А. И.* О необходимых и достаточных условиях для усиленного закона больших чисел // Теория вероятностей и ее применения. – 1979. – **24**, № 4. – С. 814 – 820.
8. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* УЗБЧ для сумм независимых случайных векторов с операторными нормировками и сходимость к нулю гауссовских последовательностей // Там же. – 1987. – **32**, № 2. – С. 266 – 281.
9. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 720 с.
10. *Csörgö M.* On the strong law of large numbers and the central limit theorem for martingales // Trans. Amer. Math. Soc. – 1968. – **131**, № 1. – P. 259 – 275.
11. *Bolthhausen E.* Exact convergence rates in some martingale central limit theorems // Ann. Probab. – 1982. – **10**, № 3. – P. 672 – 688.
12. *Фук Д. Х.* Некоторые вероятностные неравенства для мартингалов // Сиб. мат. журн. – 1973. – **14**, № 1. – С. 185 – 193.
13. *Булдыгин В. В., Солнцев С. А.* Функциональные методы в задачах суммирования случайных величин. – Киев: Наук. думка, 1989. – 188 с.
14. *Dharmadhikari S. W., Fabian V., Jogdeo K.* Bounds on the moments of martingales // Ann. Math. Statist. – 1968. – **39**, № 5. – P. 1719 – 1723.

Получено 05.08.98,
после доработки — 24.03.99