УДК 513.83

І. Ю. Власенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЧИСЛОВІ ХАРАКТЕРИСТИКИ НА МНОЖИНІ ГЕТЕРОКЛІНІЧНИХ ТОЧОК ДИФЕОМОРФІЗМІВ МОРСА – СМЕЙЛА НА ПОВЕРХНЯХ

For the Morse – Smale diffeomorphisms on closed surfaces, we investigate properties of numerical characteristics of heteroclinic trajectories with respect to a local structure of direct product in a small neighborhood of the saddle periodic point.

Для дифеоморфізмів Морса – Смейла на замкнених поверхнях досліджуються властивості числових характеристик гетероклінічних траєкторій по відношенню до локальної структури прямого добутку в малому околі сідлової періодичної точки.

Нехай f — дифеоморфізм на компактному багатовиді M. Точка $x \in M$ називається *неблукаючою точкою* f, якщо для будь-якого околу $U(x)$ існує $m \neq 0$ таке, що $f^m(U) \cap U \neq \varnothing$. (Тут $U(x)$ позначає деякий окіл точки x.) В протилежному разі точка називається *блукаючою*. Множину всіх неблукаючих точок f позначимо через $\Omega(f)$. Точка x називається *періодичною* з періодом n, якщо $f^n(x) = x$ і $\forall k = 1, \ldots, n-1$ $f^k(x) \neq x$.

Нехай $\mathrm{Diff}(M)$ — простір дифеоморфізмів на двовимірній замкненій поверхні M, f — дифеоморфізм. Точка $x \in \mathrm{Per}(f)$ з періодом m називається *гіперболічною*, якщо власні значення похідної $D_x f^m$ від f^m в точці x за модулем не дорівнюють одиниці. Якщо всі власні значення $D_x f^m$ менші за одиницю, x називається *стоком*; якщо всі власні значення більші за одиницю, x називається *джерелом*. Інакше x називається *сідлом*.

Позначимо через d деяку метрику на M. Нехай x — гіперболічна фіксована (тобто $f(x) = x$) точка f. Її стійким та нестійким багатовидами є множини

$$W^s(x) = \{ y \in M \mid d(x, f(y)) \to 0, n \to +\infty \},$$

$$W^u(x) = \{ y \in M \mid d(x, f(y)) \to 0, n \to -\infty \}.$$

Для гіперболічної періодичної точки x з періодом m стійкий та нестійкий багатовиди визначаються як стійкий та нестійкий багатовиди точки x по відношенню до f^m.

Введемо також позначення $W^\sigma(x)$ та $W^\rho(x)$, де σ позначає або u, або s і

ρ позначає двоїстий до σ багатовид: якщо $\sigma = u$, то $\rho = s$, і навпаки.

Точки перетину стійких та нестійких багатовидів називаються *гетероклінічними точками*.

Дифеоморфізм f називається дифеоморфізмом Морса – Смейла, якщо множина його неблукаючих точок скінченна (як наслідок, вона містить лише періодичні точки), всі періодичні точки є періодичними і стійкі та нестійкі багатовиди періодичних точок перетинаються трансверсально.

У роботі [1] з точністю до топологічної спряженості наведено класифікацію дифеоморфізмів Морса – Смейла на двовимірних поверхнях (для класу дифеоморфізмів із скінченним числом гетероклінічних траєкторій топологічна класифікація одержана також у роботі [2]). При цьому було створено змістовну теорію, у якій для опису динаміки гетероклінічних точок у околі гіперболічної періодичної точки використовується кодування гетероклінічних траєкторій скінченними послідовностями натуральних чисел, побудованими за допомогою введених у роботі [1] і суттєво уточнених у роботі [3] числових характеристик гетероклінічних траєкторій.

У даній роботі ми продовжуємо вивчення числових характеристик гетероклінічних траєкторій дифеоморфізмів Морса – Смейла, наводимо інший, більш простий та загальний метод їх побудови, відмінний від методів, досліджених в роботі [3], а також доводимо для так введених числових характеристик основне співвідношення (див. теорему).

Впорядкованість на множині гетероклінічних точок. ***Решітчасті чотирикутники гетероклінічних точок.*** Нехай z — сідлова періодична точка f і n — період f. Нехай $\gamma \in W^u(x) \cap W^s(y)$ — гетероклінічна точка, така, що $W^u(x)$ перетинає $W^s(z)$ в точці γ_1, а $W^s(y)$ перетинає $W^u(z)$ в точці γ_2.

Означення 1. *Гетероклінічна точка* $\gamma \in W^u(x) \cap W^s(y)$, $z \neq x$, $z \neq y$, *належить до решітчастої структури* z, *якщо у чотирикутнику, утвореному точками* z, γ_1, γ *і* γ_2, *стійкі та нестійкі багатовиди сідлових періодичних точок перетинаються лише в одній точці*.

Точка γ_2 називається проекцією γ на $W^\sigma(z)$, а точка γ_1 — проекцією γ на $W^\rho(z)$. Проекцію точки γ на багатовид $W^\sigma(z)$ будемо позначати через $\pi(\gamma, W^\sigma(z))$ або $\pi(\gamma)$, якщо багатовид визначається з контексту.

Чотирикутник, утворений точками z, γ_1, γ *і* γ_2, називається *решітчастим чотирикутником* або *чотирикутником з решітчастою структурою* між γ та z.

Природно, що гетероклінічна точка γ може одночасно належати до решітчастої структури різних періодичних точок, утворюючи з кожною з них решітчасті чотирикутники. Не виключений також і випадок, коли гетероклінічна точка утворює більш ніж один решітчастий чотирикутник з тією самою періодичною точкою.

Властивість, коли одна з проекцій γ в одному з решітчастих чотирикутників належить до решітчастої структури, що відповідає другому чотирикутнику, і навпаки, будемо широко використовувати у наших міркуваннях. Тому доцільно окремо виділити випадок, коли жодна з проекцій γ в одному з чотирикутників не належить до решітчастої структури, що відповідає другому чотирикутнику. Назвемо такі решітчасті чотирикутники точки γ *зустрічними чотирикутниками.*

Нехай гетероклінічна точка утворює з періодичною точкою декілька решітчастих чотирикутників. Якщо ці чотирикутники не є зустрічними, то стійкий та нестійкий багатовиди цієї періодичної точки перетинаються (гомоклінічний перетин). Але для дифеоморфізмів Морса – Смейла гомоклінічний перетин неможливий, отже, всі такі чотирикутники повинні бути попарно зустрічними, тобто їх може бути не більше двох. Таким чином, з кожною періодичною точкою довільна гетероклінічна точка утворює не більш ніж два решітчастих чотирикутники, а оскільки періодичних точок скінченна кількість, то решітчастих чотирикутників гетероклінічної точки теж скінченна кількість.

Лема 1. *Гетероклінічних траєкторій, що не належать решітчастій структурі жодної періодичної точки, існує скінченне число.*

Доведення. Припустимо від супротивного, що таких траєкторій існує нескінченна кількість. Тоді буде існувати фундаментальний окіл, який містить нескінченно багато гетероклінічних точок, що не належать решітчастій структурі жодної періодичної точки. Ці точки повинні мати граничну точку. Згідно з λ-лемою [4], знайдеться ітерація дифеоморфізму, під дією якої образ околу періодичної точки зі структурою прямого добутку буде містити граничну точку. Тоді всі точки з деякого малого околу граничної точки повинні мати проекції.

Структура множини точок з зустрічними чотирикутниками. Дослідимо більш детально множину гетероклінічних точок, що утворюють зустрічні чотирикутники. Нехай p_1 і p_2 — періодичні точки дифеоморфізму. Справедлива така лема.

Лема 2. *Для точок* p_1 *і* p_2 *знайдеться скінченне число траєкторій* $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ *та відповідних їм траєкторій* $\gamma_1^*, \ldots, \gamma_n^*$, $i = 1, \ldots, n$, *таких, що множина гетероклінічних точок, що утворюють зустрічні чотирикутники з точками* p_1 *і* p_2, *збігається з множиною гетероклінічних точок, що містяться в чотирикутниках, утворених для кожної пари точок перетином решітчастого чотирикутника між точками* γ_i *і* p_1 *з решітчастим чотирикутником між точками* γ_i^* *і* p_2, $i = 1, \ldots, n$.

Доведення. Легко бачити, що гранична точка для послідовності точок, що утворюють зустрічні чотирикутники, теж має цю властивість. Крім того, якщо у решітчастому чотирикутнику точки міститься точка, що утворює зустрічні чотирикутники, то всі точки, що містяться у перетині їх решітчастих чотирикутників, також будуть утворювати зустрічні чотирикутники.

Розглянемо проекції траєкторій, що утворюють зустрічні чотирикутники, на фундаментальний окіл. Оскільки граничні точки цих проекцій також належать до їх множини, можна знайти скінченне число проекцій таких, що решта проекцій будуть гетероклінічними точками, що належать до відрізків фундаментального околу між цими проекціями. Відтворивши за цими проекціями гетероклінічні точки, ми отримаємо шукані траєкторії.

Визначення індуктивного локального типу. У цьому пункті ми побудуємо просту числову характеристику підпорядкованості на множині гетероклінічних точок, *індуктивний локальний тип гетероклінічної точки.* Разом з ним ми побудуємо зв'язані з ними індуктивні решітчасті околи.

Коли ми розглядаємо гетероклінічну точку, що утворює зустрічні чотирикутники з двома чи більше періодичними точками, виникає невизначеність, до околу якої періодичної точки треба її віднести. Щоб позбутися цієї невизначеності, при визначенні індуктивних решітчастих околів будемо розподіляти гетероклінічні точки з множини точок з зустрічними чотирикутниками по решітчастих структурах періодичних точок у процесі побудови.

Нагадаємо, що, згідно з лемою 2, можна знайти скінченне число чотирикутників з решітчастою структурою, вершинами яких є гетероклінічні точки, таких, що множина траєкторій з зустрічними чотирикутниками складається з траєкторій, що попали в ці чотирикутники. (Зауважимо, що чотирикутники, утворені з різними періодичними точками, можуть перетинатися.)

Визначення решітчастих околів та локального типу будемо проводити індуктивно. При такому визначенні гетероклінічна точка може отримати число двома різними способами. Щоб уникнути неоднозначності, спочатку ці два числа назвемо локальним типом гетероклінічної точки на її стійкому багатовиді та локальним типом гетероклінічної точки на її нестійкому багатовиді, а потім доведемо, що ці числа збігаються.

На першому кроці покладемо, що точками локального типу 1 (на обох багатовидах) є точки, що не належать до жодної решітчастої структури, а до індуктивного решітчастого околу періодичної точки належать усі точки околу цієї періодичної точки з решітчастою структурою, включаючи точки з зустрічними чотирикутниками, з якими ми ще не визначилися.

Нехай на k-му кроці вже визначено точки локального типу на стійкому та нестійкому багатовидах до k-го типу включно і вказано гетероклінічні точки, які на k-му кроці належать до індуктивного решітчастого околу. Розглянемо решітчастий окіл періодичної точки p. Точками k-го локального типу на стійкому багатовиді назвемо точки, у яких проекція у решітчастій структурі точки p на нестійкий багатовид періодичної точки p має локальний тип 1, а проекція у решітчастій структурі точки p на стійкий багатовид періодичної точки p має локальний тип k на стійкому багатовиді. Відповідно точками k-го локального типу на нестійкому багатовиді назвемо точки, у яких проекція у решітчастій структурі точки p на стійкий багатовид періодичної точки p має локальний тип 1, а проекція у решітчастій структурі точки p на нестійкий багатовид періодичної точки p має локальний тип k на нестійкому багатовиді.

При цьому якщо у якомусь чотирикутнику з траєкторіями, що мають зустрічні чотирикутники, знайшлася точка, якій у решітчастій структурі періодичної точки p вказаним вище методом повинен бути присвоєний локальний тип k, у той час як у відповідній зустрічній решітчастій структурі локальний тип k цій точці не може бути присвоєний, то ми відкидаємо повністю цей чотирикутник і приймаємо рішення, що він решітчастому околу періодичної точки p не належить.

Після закінчення побудови кожна гетероклінічна точка отримає два числа — локальний тип на стійкому та локальний тип на нестійкому багатовидах. Можливо, ще залишаться чотирикутники з зустрічними точками, з якими ми не визначилися, тому що в них точки в зустрічних решітчастих структурах мають той же локальний тип. Такі чотирикутники ми вважатимемо спільними для решітчастих околів.

Перевіримо, що дійсно в результаті побудови кожна гетероклінічна точка отримає локальний тип коректно.

Лема 3. *Для кожної гетероклінічної точки на обох її багатовидах існує скінченна послідовність гетероклінічних точок така, що кожна наступна точка послідовності є проекцією попередньої, а остання точка є точкою локального типу* 1.

Доведення. Якщо гетероклінічна точка не належить до жодної решітчастої структури, то вона має локальний тип 1 і лема справедлива. В противному разі розглянемо послідовність проекцій. Припустимо від супротивного, що існує нескінченна послідовність проекцій, що не містить точок локального типу 1. Оскільки на фундаментальному околі багатовиду, що містить гетероклінічні точки, точки локального типу 1 завжди існують, то ця послідовність збіжна до деякої граничної гетероклінічної точки, і всі точки, що попали в її решітчастий окіл, мають на неї проектуватися. Це приводить до суперечності, оскільки, за припущенням, точки послідовності повинні бути проекціями одна одної.

Лема 4. *Локальний тип гетероклінічної точки на її стійкому багатовиді дорівнює її локальному типу на нестійкому багатовиді.*

Доведення. Рівність значень локального типу будемо доводити індуктивно.

За означенням, точка має локальний тип 1 одночасно на обох багатовидах. Припустимо, що до k-го локального типу включно обидва локальних типи збігаються. Розглянемо гетероклінічну точку γ, яка має на своєму σ-багатовиді локальний тип $k+1$. За означенням, існує точка p_1 така, що проекція точки γ на ρ-багатовид у решітчастому околі точки p_1 — точка γ_1 — має локальний тип 1, і, відповідно, проекція точки на σ-багатовид у решітчастому околі точки p_1 — точка γ_{k1} — має локальний тип k. Нехай проекцією точки на σ-багатовид, що має локальний тип 1, є проекція на σ-багатовид періодичної точки p_2 — точка γ_2. Доведемо, що для гетероклінічної точки γ її локальний тип на ρ-багатовиді дорівнює локальному типу на σ-багатовиді.

Точка γ_{k1} має локальний тип k і проектується на σ-багатовид періодичної точки p_2 в точку γ_2 локального типу 1. Отже, за означенням, існує точка γ_{k-1} локального типу $k-1$, що належить перетину σ-багатовиду періодичної точки p_1 та ρ-багатовиду періодичної точки p_2 і є проекцією точки γ_{k1} на ρ-багатовид точки p_2. За індуктивним припущенням, її локальні типи збігаються і дорівнюють $k-1$. Розглянемо гетероклінічну точку γ_{k2}, що є проекцією точки γ на ρ-багатовид точки p_2. Проекціями точки γ_{k2} у решітчастому околі точки p_1 є точки γ_1 і γ_{k-1}, отже, за означенням, вона має локальний тип k на σ-багатовиді. За індуктивним припущенням, її локальні типи збігаються. За означенням маємо, що локальний тип точки γ на ρ-багатовиді дорівнює $k+1$, і, отже, дорівнює її локальному типові на σ-багатовиді.

Таким чином, кожній гетероклінічній точці єдиним чином ставимо у відповідність деяке число, що називається її локальним типом.

Означення 2. *Локальним типом гетероклінічної точки називається її локальний тип на одному з її багатовидів.*

Лема 5. *Якщо між двома сусідніми точками локального типу $k-1$ містяться гетероклінічні точки локального типу k і множина цих точок нескінченна, то вона не може мати інших граничних точок, крім цих точок локального типу $k-1$.*

Доведення. Дамо індуктивне доведення цього факту. З побудови видно, що якщо між двома сусідніми точками локального типу 1 містяться гетероклінічні точки локального типу 2, то множина цих точок нескінченна і не може мати інших граничних точок, крім цих точок локального типу 1.

Припустимо, що для сусідніх точок з локальним типом, що не перевищує $k-1$, лема справедлива. Доведемо твердження леми для сусідніх точок локального типу k. Якщо обидві точки локального типу k належать до одного решітчастого околу гетероклінічної точки локального типу 1, то розглянемо проекції сусідніх точок локального типу k та множини точок локального типу $k+1$ між ними у решітчастій структурі точки локального типу 1. За означенням, ці проекції мають менший на 1 локальний тип, тому для них за індуктивним припущенням твердження леми виконане, і з решітчастої структури випливає, що твердження леми виконане і для сусідніх точок локального типу k.

Розглянемо випадок, коли сусідні точки локального типу k належать до решітчастих околів різних точок локального типу 1. У цьому випадку множина точок локального типу $k+1$ розбивається на дві підмножини, кожна з яких проектується у відповідній решітчастій структурі. Твердження леми отримуємо аналогічно.

Теорема про індуктивний локальний тип.

Теорема. *Локальний тип точки дорівнює сумі локальних типів її проекцій у довільному решітчастому околі, до якого вона належить.*

Доведення. Співвідношення для значень локального типу будемо доводити індуктивно. Легко бачити, що для точок локального типу 1 воно виконується за означенням.

Припустимо, що для точок k-го локального типу включно співвідношення виконується. Розглянемо гетероклінічну точку γ, яка має локальний тип $k+1$, її проекція на σ-багатовид у решітчастому околі точки p_1 — точка γ_m — має локальний тип m, а проекцією на ρ-багатовид періодичної точки p_1 є точка γ_n. Доведемо, що локальний тип гетероклінічної точки γ_n дорівнює $k+$ $+1-m$.

Точка γ_m має локальний тип m і проектується на σ-багатовид періодичної точки p_2 в точку γ_1 локального типу 1. Отже, за означенням, існує точка γ_{m-1} локального типу $m-1$, що належить перетину σ-багатовиду періодичної точки p_1 та ρ-багатовиду періодичної точки p_2 і є проекцією точки γ_m на ρ-багатовид точки p_2. За означенням, її локальний тип дорівнює $m-1$. Розглянемо гетероклінічну точку γ_k, що є проекцією точки γ на ρ-багатовид точки p_2. Проекціями точки γ у решітчастому околі точки p_2 є точки γ_1 і γ_k, отже, за означенням, точка γ_k має локальний тип k. Проекціями точки γ_k у решітчастому околі точки p_1 є точки γ_n і γ_{m-1}. За індуктивним припущенням, локальний тип точки γ_k дорівнює сумі локальних типів точок γ_n і γ_{m-1}. Звідси випливає, що локальний тип точки γ_n дорівнює $k+1-m$.

1. *Власенко И. Ю.* Полный инвариант для диффеоморфизмов Морса–Смейла на двумерных многообразиях. Часть I // Некоторые вопросы современной математики: Тр. Ин-та математики НАН Украины. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1999. – С. 60–85.
2. *Гринес В. З.* Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий // Мат. заметки. – 1990. – **54**, № 3. – С. 3–17.
3. *Vlasenko I.* On relations on the set of heteroclinic points of Morse–Smale diffeomorphisms on 2-manifolds // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1999. – **5**, № 3. – P. 90–96.
4. *Палис Ж., ди Мелу В.* Геометрическая теория динамических систем. – М.: Мир, 1986. – 301 с.

Одержано 14.06.2000