УДК 512.515

А. О. Пришляк (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

СОПРЯЖЕННОСТЬ ФУНКЦИЙ МОРСА НА ПОВЕРХНОСТЯХ СО ЗНАЧЕНИЯМИ НА ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

We investigate the conjugacy of the Morse functions on closed surfaces. By using cellular decompositions of the surface, we formulate a criterion of conjugacy of the Morse functions. We establish a criterion of conjugacy of mappings into a circle with nondegenerate critical points.

Досліджується питання спряженості функцій Морса на замкнених поверхнях. З використанням клітинних розбиттів поверхні сформульовано критерій спряженості функцій Морса. Встановлено критерій спряженості відображень в коло з невиродженими критичними точками.

Пусть M — гладкая замкнутая поверхность, f и g — гладкие функции на ней. Функции f и g называются сопряженными, если существуют гомеоморфизмы $h: M \to M$, $h': R^1 \to R^1$ такие, что $fh' = gh$ и гомеоморфизм h' сохраняет ориентацию. Аналогично два гладких отображения $f, g : M \to S^1$ называются сопряженными, если существуют гомеоморфизмы $h: M \to M$, $h': S^1 \to S^1$ такие, что $fh' = gh$.

Критерии сопряженности функций Морса на двумерных многообразиях получены в [1, 2], а на трехмерных — в [3, 4]. Если сопрягающие гомеоморфизмы — изотопные тождественному диффеоморфизмы, то в случае односвязных многообразий размерности больше 5 критерий сопряженности функций Морса приведен в [5].

1. Разложения на ручки с воротниками. Разложением на ручки с воротниками называется последовательность вложений $M_0 \subset M_0' \subset M_1 \subset M_1' \subset \subset M_2 \subset \ldots \subset M_N = M$ таких, что M_0 — объединение n-мерных дисков (0-ручек), M_i' получается из M_i с помощью приклейки воротника $N_i \times [0, 1]$, где $N_i = \partial M_i$, а M_{i+1} получается из M_i' с помощью приклейки ручек. На каждом воротнике задана проекция $\pi: N_i \times [0, 1] \to [0, 1]$.

Разложения на ручки с воротниками называются изоморфными, если существует гомеоморфизм между поверхностями, который переводит ручки в ручки, воротники в воротники, сохраняя разбиение воротников на слои.

По каждой функции Морса $f: M \to R^1$ с критическими значениями $\{1, 2, \ldots \ldots, N\}$ зададим разложение на ручки с воротниками так, что при этом внутренности воротников $N_i \times [0, 1]$ будут послойно гомеоморфны компонентам связности множества $M \setminus f^1(\{1, 2, \ldots, N\})$.

Пусть p — критическая точка. Рассмотрим такую покрывающую ее карту, что $p = (0, 0, \ldots, 0)$ и

$$f(x) = f(p) - \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2.$$

Обозначим через D^k, D^{n-k} диски достаточно малого радиуса ε:

$$D^k = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, 0, \ldots, 0) : \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \le \varepsilon^2\right\},$$

$$D^{n-k} = \left\{(0, 0, \ldots, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n) : \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \le \varepsilon^2\right\}.$$

Эти диски являются средним и косредним дисками ручки

$$H_j = D^k \times D^{n-k} = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \le \varepsilon^2,\ \sum_{i=k+1}^{n} x_i^2 \le \varepsilon^2\right\}.$$

Удалим из поверхности M критические уровни и так построенные ручки для каждой критической точки. Обозначим через W_i замыкание компонент связности полученного множества. Тогда W_i гомеоморфно (а после сглаживания углов диффеоморфно) $N_i \times [0, 1]$, где N_i — регулярный уровень, лежащий в W_i [3]. Последовательная приклейка ручек H_j и воротников $N_i \times [0, 1]$ задает разложение поверхности на ручки с воротниками.

Обратно, по каждому разложению на ручки с воротниками с помощью процедуры сглаживания углов можно построить функцию Морса, у которой каждая критическая точка — пересечение среднего и косреднего дисков соответствующей ручки. Тогда функции будут сопряженными тогда и только тогда, когда соответствующие разложения на ручки с воротниками изоморфны [3].

2. Критерий сопряженности функций Морса. Зададим на каждом воротнике такую структуру прямого произведения $N_i \times [0, 1]$, что существует $t \in (0,1)$ такое, что $N_i \times \{t\} = f^{-1}(y)$ для соответствующего регулярного значения y. Тогда после удаления из многообразия воротников и отождествления $N_i \times \{0\}$ с $N_i \times \{1\}$ получим разложение на ручки без воротников. Это разложение зависит от того, как мы зададим структуру прямого произведения на каждом воротнике. При этом разным структурам прямого произведения соответствует приклейка ручек по изотопным вложениям [3].

С помощью изотопий средних сфер любое разложение на ручки можно привести к такому, у которого средние и косредние сферы ручек пересекаются трансверсально, и такому, что каждая ручка приклеивается к границе объединения ручек меньшей размерности. Стягивая каждую ручку к средней сфере, получаем клеточное разбиение поверхности. Обратная процедура состоит в замене клеток регулярными окрестностями (минус внутренности клеток меньших размерностей).

Клеточное разбиение называется упорядоченным, если задано отображение множества клеток на множество $\{1, 2, \ldots, N\}$. Каждая функция Морса задает упорядочение на множестве клеток соответствующего ей разбиения на клетки: выбрав такое $h' : R^1 \to R^1$, что множество критических значений отобразится на множество номеров $\{1, 2, \ldots, N\}$, мы сопоставим каждой ручке номер соответствующей критической точки.

Упорядоченные клеточные разбиения (УКР) называются изоморфными, если существует гомеоморфизм поверхностей, который переводит клетки в клетки, сохраняя при этом упорядочение (номера) клеток.

Пусть в клеточном разбиении поверхности две одномерные клетки a и b имеют общую вершину и в этой вершине являются смежными (т. е. в окрестности этой вершины образуют угол, не содержащий других одномерных клеток). Определим операцию сложения таких клеток: суммой $a + b$ называется одномерная клетка (замкнутая кривая), которая имеет своими концами концы клеток a и b, не совпадающие с их общей вершиной, если эти клетки — не петли, и гомотопная в трубчатой окрестности объединения a и b этому объединению с гомотопией, постоянной на концах.

Теорема 1. *Две функции Морса сопряжены тогда и только тогда, когда из УКР первой функции можно получить УКР, изоморфное УКР второй функции, с помощью замен одномерных клеток a_i на сумму $a_i + a_j$, если номер a_i больше a_j. При этом новая клетка $a_i + a_j$ имеет тот же номер, что и клетка a_i.*

Доказательство. *Необходимость.* Если функции Морса сопряжены, то соответствующие разложения на ручки с воротниками изоморфны, а в разложениях на простые ручки из одного можно получить другое после изотопий приклеивающих отображений ручек. Если при изотопии средние и косредние диски ручек одного индекса в какой-то момент времени пересекаются, то происходит скольжение одной ручки по другой, т. е. сложение соответствующих ручек, а при переходе к клеточному разбиению — сложение клеток. При этом заменяется на сумму ручка, которая приклеивается позже, т. е. та, у которой номер больше. Соответствующее ограничение возникает и при сложении клеток.

Достаточность. Пусть для двух функций Морса выполнены достаточные условия теоремы. Тогда сложение клеток и, соответственно, ручек получается при изотопии приклеивающих отображений, которые в свою очередь реализуются разными структурами прямых произведений воротников. Таким образом, соответствующие разложения на ручки изоморфны, а функции Морса сопряжены.

Предложение. *Упорядоченное клеточное разбиение задает (с точностью до сопряжения) функцию Морса тогда и только тогда, когда номер каждой двумерной и одномерной клетки больше номеров клеток, содержащихся в ее границе.*

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку клеткам, содержащимся в границе, соответствуют ручки, к объединению границ которых приклеивается соответствующая ручка, то номер приклеивающейся ручки больше номеров ручек, к которым она приклеивается. При переходе к клеточному разбиению получаем необходимое условие предложения.

Достаточность. Покажем, как по упорядоченному клеточному разбиению, удовлетворяющему необходимым условиям предложения, построить функцию Морса. Для этого по клеточному разбиению построим градиентно-подобное векторное поле Морса – Смейла, у которого источники совпадают с 0-мерными клетками, седла лежат на 1-мерных клетках, а стоки — на 2-мерных и так, что устойчивые многообразия особых точек совпадают с соответствующими клетками. Каждой особой точке присвоим номер соответствующей клетки. Тогда, как в [6], построим функцию Морса, у которой критические точки совпадают с особыми точками векторного поля и имеют значения, равные номерам этих особых точек. Эта функция и будет искомой.

3. Сопряженность отображений в окружность. Рассмотрим два способа проверки сопряженности отображений поверхности в окружность, у которых все критические точки изолированные и невырожденные.

Первый способ. Аналогично случаю функций Морса, начав с некоторого регулярного уровня (разрезав по нем поверхность), можно построить разбиение поверхности на ручки и воротники, склеив при этом границы первого и последнего воротников по выбранному регулярному уровню. Тогда последовательность воротников и приклеиваемых ручек будет циклически упорядоченной. Назовем такое разбиение поверхности циклическим разложением на ручки с воротниками.

Границы ручек и воротников образуют граф с окружностями, вложенными в поверхность. Обозначим через $\{a_i\}$ ребра этого графа и вложенные окружности и зададим на них произвольным образом ориентации. Запишем для каждой компоненты края ручки и воротника слово, состоящее из букв, встречающихся при обходе этой компоненты вдоль ориентации воротника или ручки, края ребер или окружности. При этом буква в слове будет иметь степень $+1$ или -1 в зависимости от совпадения ориентации обхода с ориентацией ребра или окружности. Для каждого воротника разобьем слова на упорядоченные пары, так что слова одной пары соответствуют границе одной компоненты связности воротника, и направление движения от первой компоненты края ко второй соответствует движению по ориентации окружности S^1. Таким образом мы построим для каждого воротника список слов, разбитых на упорядоченные пары, и для ручки список, состоящий из одного слова. Наборы списков слов называются изоморфными, если один из другого можно получить в результате циклических перестановок букв в словах, замен всех a_i на a_i^{-1} и a_i^{-1} на a_i и обращения порядка букв во всех словах одного списка [7].

Так построенный граф вместе с циклически упорядоченным набором списков слов назовем диаграммой отображения поверхности в окружность. Две диаграммы эквивалентны, если существует изоморфизм графов такой, что при замене во втором наборе списков слов букв на соответствующие буквы первого графа получится набор списков слов, изоморфный первому набору.

Теорема 2. *Два отображения поверхности в окружность с невырожденными критическими точками сопряжены тогда и только тогда, когда их диаграммы эквивалентны.*

Доказательство. *Необходимость.* Как и для функций Морса, если по отображению построить два различных циклических разложения на ручки с воротниками, то существует изотопия, переводящая одно разложение в другое. Сопрягающий гомеоморфизм между двумя функциями Морса переводит разложение на ручки с воротниками первой функции в такое же второй. Тогда его ограничение на графы с окружностями задает искомый изоморфизм. При этом ограничение гомеоморфизма на границы областей задает искомое отображение слов.

Достаточность. Если диаграммы двух отображений эквивалентны, то можно построить гомеоморфизм поверхностей, который переводит граф в граф и окружности в окружности. Тогда этот гомеоморфизм отображает ручки в ручки, а воротники в воротники.

Разрежем поверхности по границе одного из воротников и построим сопрягающий гомеоморфизм h для функций Морса на полученных поверхностях. Пусть h' — ограничение этого гомеоморфизма на края разрезанной поверхности, а g — естественный гомеоморфизм краев, возникающий при разрезании поверхности. Покажем, как можно подправить гомеоморфизм h до такого, что $h'g = gh'$. Из построения следует, что h' изотопно $gh'g^{-1}$. Рассмотрим эту изотопию как отображение регулярной окрестности края и продолжим ее на всю поверхность тождественным образом. Тогда, после взятия композиции этого отображения с гомеоморфизмом h, получим подправленный гомеоморфизм поверхностей с краем, который, в силу тождества, после склеивания поверхности по краям задает сопрягающий гомеоморфизм замкнутой поверхности.

Второй способ. Разрежем поверхность по некоторому регулярному уровню. Получим поверхность с краем и функцию Морса на ней. Стянув каждую компоненту края в точку, получим функцию Морса на замкнутом многообразии. При этом каждой компоненте края будет соответствовать точка максимума или минимума. Разобьем эти точки на пары, так что минимум и максимум будут в одной паре, если они соответствуют одной окружности из регулярного уровня, по которому разрезалась первоначальная поверхность.

Теорема 3. *Два отображения ориентированной поверхности в окружность с невырожденными критическими точками сопряжены тогда и только тогда, когда найдутся такие их регулярные уровни, что построенные по ним функции Морса будут сопряжены. При этом сопрягающий гомеоморфизм должен сохранять разбиение минимумов и максимумов на пары.*

Доказательство. *Необходимость* следует из построения. Докажем *достаточность.* Сопрягающий гомеоморфизм для функций Морса будет задавать гомеоморфизм разрезанной поверхности (кроме точек края). Продолжим по непрерывности этот гомеоморфизм на края. Из условия сохранения разбиения минимумов и максимумов на пары и сохранения ориентации следует, что эти отображения краев изотопны естественным гомеоморфизмам g краев (все сохраняющие ориентацию гомеоморфизмы окружности изотопны тождественному гомеоморфизму). Тогда, так же, как и при доказательстве теоремы 2, этот гомеоморфизм подправляется до гомеоморфизма, который задает сопрягающий гомеоморфизм замкнутых поверхностей.

1. *Sharko V. V.* On topological equivalence of Morse functions on surfaces // Int. Conf. Chelyabinsk State Univ.: Low-dimensional Topology and Combinatorial Group Theory. – 1996. – P. 19–23.
2. *Kulinich E. V.* On topological equivalence of Morse functions on surfaces // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1998. – № 1. – P. 22–28.
3. *Пришляк А. О.* Сопряженность функций Морса // Некоторые вопросы современной математики: Пр. Ін-ту математики НАН України. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – **25**. – С. 319–325.
4. *Prishlyak A. O.* Equivalence of Morse functions on 3-manifolds // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1999. – **5**, № 3. – P. 49–53.
5. *Шарко В. В.* Функции на многообразиях (алгебраические и топологические аспекты). – Киев: Наук. думка, 1990. – 196 с.
6. *Smale S.* On gradient dynamical systems // Ann. Math. – 1961. – **74**, № 1. – P. 199–206.
7. *Пришляк А. О.* О вложенных в поверхность графах // Успехи мат. наук. – 1997. – **52**, вып. 4. – С. 211–212.

Получено 08.07.98