УДК 512.542

В. Н. Тютянов (Гомел. ун-т, Беларусь)

О ТЕОРЕМАХ ТИПА СИЛОВА ДЛЯ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

We find a new class of finite groups for which the D_π-theorem is true.

Знайдено новий клас скінченних груп, для якого справедлива D_π-теорема.

Теоремы типа Силова играют в теории конечных групп, безусловно, весьма важную роль. В настоящей работе получено обобщение некоторых известных результатов о расширении D_π-групп из данного класса с помощью D_π-групп. Тем самым найден новый класс конечных групп, для которых вопрос, поставленный Л. А. Шеметковым в „Коуровской тетради" (вопрос 3.62 [1]), решается положительно.

1. Определения и основные результаты. Принятые обозначения, в основном, стандартны и соответствуют имеющимся в [2, 3]. Пусть π — некоторое фиксированное множество простых чисел. S_π-подгруппой конечной группы называется π-подгруппа, индекс которой является π'-числом; E_π-группа — группа, имеющая хотя бы одну S_π-подгруппу; D_π-группа — группа, имеющая свойство E_π, причем все ее S_π-подгруппы сопряжены и любая ее π-подгруппа содержится в некоторой S_π-подгруппе. Будем говорить, что группа G является S_4-свободной, если она не содержит секций, изоморфных симметрической группе S_4. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

Определение 1 (определение 3 [4]). *Класс групп W_1 назовем обобщенным π-классом Виландта, если он удовлетворяет следующим условиям:*

1) *W_1 — S-замкнутый гомоморф;*

2) *если $G \in W_1$, то каждая π-подгруппа из G имеет единичную 2-длину;*

3) *если $G \in W_1 \bigcap D_\pi$, то $N_G(M) \in D_\pi$ для любой π-подгруппы M из G.*

Определение 2. *Класс W_2 назовем общим классом Виландта относительно π, если он удовлетворяет следующим условиям:*

1) *W_2 — S-замкнутый гомоморф;*

2) *если $G \in W_2$, то каждая π-подгруппа из G имеет единичную 2-длину (в смысле определения Л. А. Шеметкова* [5, *с.* 394]);

3) *если $G \in W_2 \bigcap D_\pi$, то $N_G(M) \in D_\pi$ для любой π-подгруппы M из G.*

Напомним, что согласно [5] конечная группа имеет меру p-разрешимости 1, если она не имеет композиционных факторов порядка p. Для произвольной конечной группы G строим верхний p-ряд:

$$1 = P_0 \subseteq N_0 \subset P_1 \subset N_1 \subset \ldots \subset P_l \subseteq N_l = G,$$

где N_i/P_i — произведение тех инвариантных подгрупп группы G/P_i, которые имеют меру p-разрешимости 1; N_{i+1}/P_i — максимальная инвариантная p-подгруппа группы G/N_i. Число l (наименьшее для которого $N_l = G$) называется p-длиной группы G.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Любое расширение D_π-группы, принадлежащей общему π-классу Виландта, с помощью D_π-группы является D_π-группой.*

Понятно, что если в группе G π-подгруппа H имеет единичную 2-длину в смысле приведенного определения, то H не обязательно должна быть разрешимой. Поэтому $W_1 \subseteq W_2$, а пример группы $G \cong A_5 \times Z_p$, где $p \geq 7$ (для $\pi = \{2, 3, 5\}$), показывает, что $W_1 \neq W_2$.

Таким образом, найден новий класс конечных групп, для которых справедлива D_π-теорема, являющийся расширением класса групп из работы [4] (теорема 2).

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Пусть $G = M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_k$ и H — простая неабелева группа. Если $M_1, M_2, \ldots, M_k$ не содержат секций, изоморфных H, то таких секций не содержит и G.*

Доказательство. Достаточно доказать лемму 1 для $k = 2$. При произвольном k утверждение леммы 1 получается методом математической индукции. Предположим, что группа G содержит секцию $Y = A/B \cong H$, где $B \trianglelefteq A$. Пусть $L = A \bigcap M_1$. Предположим, что $L \neq 1$. Ясно, что $L \trianglelefteq A$. Покажем, что $L \subseteq B$. Если $L \nsubseteq B$, то группа $BL \trianglelefteq A$ и отлична от L и B. Тогда $L/B \bigcap \bigcap L \cong BL/B \trianglelefteq A/B \cong H$. Поскольку H — простая группа, то либо $L/B \bigcap L = 1$, либо $L/B \bigcap L \cong A/B \cong H$. В первом случае $L \subseteq B$. Во втором случае L содержит секцию, изоморфную H и $L \subseteq M_1$, что невозможно. Таким образом, $L \subseteq B$.

Рассмотрим группу $F = AM_1 = M_1(A \bigcap M_2) = M_1 \times (F \bigcap M_2)$. Тогда $F/M_1 = AM_1/M_1 \cong A/A \bigcap M_1 \cong A/L$ содержит секцию, изоморфную H. С другой стороны, $F/M_1 = (M_1 \times (F \bigcap M_2))/M_1 \cong F \bigcap M_2$. Следовательно, M_2 содержит секцию H. Полученное противоречие показывает, что $A \bigcap M_1 = 1$. Аналогично доказывается, что $A \bigcap M_2 = 1$.

Имеем изоморфизмы: $M_1A/M_1 \cong A/A \bigcap M_1 \cong A$ и $M_1M_2/M_1 \cong M_2$. Так как $AM_1/M_1 \leq M_1M_2/M_1$, то M_2 содержит секцию, изоморфную H, что невозможно. Полученное противоречие доказывает лемму 1.

Будем говорить, что группа G имеет свойство I_π, если любая ее π-подгруппа содержится в некоторой S_π-подгруппе группы G.

Определение 3. *Определим класс групп W_3 следующим образом:*

1) W_3 — S-замкнутый гомоморф;

2) если $G \in W_3$, то каждая π-подгруппа из G имеет единичную 2-длину;

3) если $G \in W_3 \bigcap I_\pi$, то $N_G(M) \in I_\pi$ для любой π-подгруппы M из G.

Лемма 2. *Пусть конечная группа $G \in W_3 \bigcap I_\pi$ и содержит неразрешимую холлову π-подгруппу M, причем $3 \notin \pi$. Тогда G не является простой неабелевой группой.*

Доказательство. Пусть G — минимальный контрпример к лемме 2, являющийся простой неабелевой группой. Поскольку любая разрешимая подгруппа в M имеет 2-длину 1, то из [6] заключаем, что $O^{2'}(M/O(M))$ — центральное произведение 2-группы и групп, каждая из которых — расширение своего центра посредством группы Судзуки.

Пусть сначала G — группа Шевалле над полем нечетной характеристики p. Из строения группы M заключаем, что либо существует инволюция $t \in M$, централизатор которой в G содержит π-секцию, изоморфную группе Судзуки, либо все инволюции в силовской 2-подгруппе группы G коммутируют и $G \in \{U_3(2^n), Sz(2^n)\}$. Последнее невозможно, так как группа G определена над полем нечетной характеристики. Таким образом, для некоторой инволюции $t \in M$ $C_G(t)$ содержит π-секцию, изоморфную группе $Sz(2^n)$. Инволюция t является полупростым элементом в группе G, поэтому из [7] заключаем, что $C_G(t)$ содержит нормальную подгруппу $X = X_1 * X_2 * \ldots * X_l * R$, где X_i — группа Шевалле над полем характеристики p, а R — абелева p'-группа и X содержит π-секцию, изоморфную группе Судзуки. Покажем, что $X \in W_3 \cap \cap I_\pi$. Поскольку $G \in W_3 \cap I_\pi$, то согласно свойствам 1 и 3 определения 3 $C = C_G(t) \in W_3 \cap I_\pi$, и достаточно проверить, что $N_X(L) \in I_\pi$ для любой π-подгруппы L из X. Пусть L_1 — произвольная π-подгруппа в $N_X(L) = X \cap N_C(L) \leq \leq N_C(L)$. Так как $L_1 \subseteq N_C(L) \subseteq C \in W_3 \cap I_\pi$, то $L_1 \subseteq D$, где D — холлова π-подгруппа в $N_C(L)$. Из того, что $N_X(L) \trianglelefteq N_C(L)$, следует, что $D \cap N_X(L)$ является холловой π-подгруппой в $N_X(L)$, содержащей π-группу L_1. Таким образом, $N_X(L) \in I_\pi$ и $X \in W_3 \cap I_\pi$ (следует из $X \trianglelefteq C$).

Согласно лемме 1 можно считать, что X_1 содержит π-секцию $Sz(2^n)$, очевидно, отличную от X_1. Поскольку $X_1 \trianglelefteq X \in W_3 \cap I_\pi$, то ясно, что X_1 удовлетворяет условиям леммы 2. Отсюда нетрудно заключить (X_1 — группа Шевалле над полем нечетной характеристики), что в группе G имеется простая неабелева группа, удовлетворяющая условиям леммы 2. Противоречие с тем, что G — минимальный контрпример к лемме 2.

Случай, когда G — группа Шевалле над полем характеристики 2, исключается теоремой 3.1 [8].

Пусть G — знакопеременная группа. Холловы подгруппы в группе A_n описаны в [9, 10]. Из этого описания следует, что ни одна холлова подгруппа в G не удовлетворяет условиям леммы 2.

Рассмотрим случай, когда G является спорадической группой.

1. $G \in \{M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}; J_1, J_2, J_3\}$.

Из [11] следует, что в этом случае $C_G(t)$ не содержит секций, изоморфных группе Судзуки для любой инволюции $t \in G$, что невозможно.

2. $G \in \{Co_1, Co_2, Co_3, Fi_{22}, Fi_{23}, Fi'_{24}, F_2, F_1, Hs, He, Suz, M^cL, Ly, O'N, F_3, F_5\}$.

Во всех этих случаях централизатор любой инволюции $t \in G$ либо разрешим, либо не содержит секции, изоморфной группе $Sz(2^n)$, либо $C_G(t)/O_2(C_G(t))$ содержит нормальную простую неабелеву группу, отличную от $Sz(2^n)$. Поскольку для некоторой инволюции $t_1 \in G$ $C_G(t_1)$ содержит секцию, изоморфную группе $Sz(2^n)$, то для t выполняется последний случай. Но тогда группа $\overline{G} = C_G(t_1)/O_2(C_G(t_1))$ содержит нормальную простую неабелеву группу $\overline{G}_1$, для которой, очевидно, выполняются условия леммы 2. Противоречие с тем, что G — минимальный контрпример.

3. $G \cong Ru$.

В этом случае в G имеется π-подгруппа порядка 5, нормализатор которой в G изоморфен $Z_5 \times A_5$, не содержащей холловой $\{2, 5\}$-группы, что невозможно.

4. $G \cong J_4$.

В группе J_4 имеется два класса сопряженных инволюций. $C_G(t_1)$ — полупрямое произведение элементарной абелевой группы порядка 2^{11} на

$\mathrm{Aut}(M_{22})$ и мы можем применить рассуждения из п. 2. $C = C_G(t_2) = EM$, где $E \cong Q^4$ — экстраспециальная группа порядка 2^{13}, $|M: M'| = 2$, $|Z(M')| = 6$ и $M'/Z(M') \cong M_{22}$. Пусть $\overline{C} = C/EZ(M')$. Тогда $\overline{C}$ содержит нормальную простую группу M_{22} и снова можно применить рассуждения из п. 2. Лемма 2 доказана.

Пусть θ и η — классы групп, замкнутые относительно взятия субнормальных подгрупп, причем расширение любой π-группы из класса θ с помощью π-группы из класса η является группой из класса η. Рассмотрим группу, удовлетворяющую следующим трем условиям:

1) G имеет нормальную подгруппу $K \in D_\pi \cap \theta$, причем $G/K \in D_\pi \cap \eta$;

2) G не принадлежит D_π, но все ее нетривиальные подгруппы и фактор-группы, удовлетворяющие условию 1, принадлежат D_π;

3) $|G| + |K|$ имеет наименьшее значение среди всех пар $(G; K)$, удовлетворяющих условиям 1 и 2.

Из леммы 18.3 [12] следует, что группа G имеет S_π-подгруппу G_π, максимальную π-подгруппу M, не совпадающую с G_π^x ни при каком $x \in G$, причем $G = KM$. В этих обозначениях справедлива следующая лемма.

Лемма 3 ([4], лемма 6). *K — простая неабелева группа, не являющаяся ни π-группой, ни π'-группой.*

Доказательство теоремы. Из теоремы 2 [4] следует, что $2 \in \pi$ и S_π-подгруппа из K неразрешима (группа K имеет тот же смысл, что и в лемме 3). Группа S_π не содержит секций S_4. Действительно, если имеется секция $Y = A/B \cong S_4$, где $B \trianglelefteq A$, то получим ряд, у которого 2-длина не меньше 2. Последнее невозможно.

Пусть $3 \in \pi$. Покажем, что K — S_4-свободна. Пусть имеется секция $A/B \cong S_4$, где $B \trianglelefteq A$. Обозначим через H добавление к B. Тогда по лемме 11.1 [12] $A = BH$ и $B \cap H = \Phi(H)$. Кроме того, по лемме 11.2 [12] $\pi(H) = \pi(A/B) = \{2, 3\}$ и ясно, что H — $\{2, 3\}$-группа, у которой 2-длина не меньше двух. Противоречие со свойством 2 определения 2.

Пусть сначала силовская 2-подгруппа в K неабелева. Из результата Глаубермана [13] получим, что $K \in \{Sz(2^n), U_3(2^n)\}$.

a) $K \cong Sz(2^n)$.

Данный случай невозможен, так как порядок группы Судзуки не делится на 3.

b) $K \cong U_3(2^2)$.

Из работы Хартли [14] следует, что $U_3(2^n) \cong U_3(q)$ имеет максимальные подгруппы следующих порядков: $q^3(q^2-1)/d$; $(q+1)^2 q(q-1)/d$; $6(q+1)^2/d$; $3(q^2-q+1)/d$; $(\lambda^3+1)\lambda(\lambda^2-1)/d$ или $3(\lambda^3+1)\lambda(\lambda^2-1)/d$, где $q = \lambda^m$, m — нечетное число, а $d = (3, q+1)$, 36, 72, 168, 216, 360, 720 или 2520 с некоторыми ограничениями на q. Отсюда следует, что единственной максимальной подгруппой, содержащей 2-силовскую подгруппу, будет борелевская подгруппа порядка $q^3(q^2-1)/d$, являющаяся разрешимой. Противоречие следует из теоремы 2 [4].

Рассмотрим случай, когда силовская 2-подгруппа в K абелева. В этом случае $K \in \{L_2(q), q \equiv 3, 5 \pmod 8; L_2(2^n); J_1; {}^2G_2(3^n)$, где n — нечетное число и $n > 1\}$.

1. $K \cong J_1$.

$C_G(K) = 1$, иначе группа K будет содержать нетривиальную нормальную π-подгруппу, что невозможно по лемме 3. Следовательно, $G/K \subseteq \mathrm{Out}(K) = 1$ и $G = K$, что невозможно.

2. $K \cong L_2(2^n)$.

Из теоремы Диксона следует, что единственной максимальной подгруппой в $L_2(2^n)$, содержащей силовскую 2-подгруппу группы K, будет подгруппа Бореля. Противоречие следует из теоремы 2 [4].

3. $K \cong L_2(q)$, $q \equiv 3, 5 \pmod 8$.

Из теоремы Диксона следует, что единственной максимальной неразрешимой холловой подгруппой группы K, содержащей силовскую 2-подгруппу группы K, может быть группа A_5 при $q^2 - 1 \equiv 0 \pmod 5$. В этом случае (см. [15]) в K имеется два класса несопряженных подгрупп, изоморфных A_5. Следовательно, условие D_π не выполняется.

4. $K \cong {}^2G_2(3^{2m+1})$.

Из [16] следует, что группа K не имеет неразрешимых холловых подгрупп и противоречие следует из теоремы 2 [4].

Таким образом, $3 \notin \pi$. Поскольку $W_2 \subseteq W_3$, то согласно лемме 2 группа K не является простой неабелевой группой. Противоречие с леммой 3. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую признательность проф. Л. А. Шеметкову за постоянное внимание к данной работе.

1. *Нерешенные* вопросы теории групп / Коуровская тетрадь. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1992.
2. *Чунихин С. А., Шеметков Л. А.* Конечные группы // Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки и техники) – М.: ВИНИТИ, 1971. – С. 7–70.
3. *Шеметков Л. А.* Два направления в развитии теории непростых конечных групп // Успехи мат. наук. – 1975. – **30**, № 2. – С. 179–198.
4. *Казарин Л. С.* Теоремы силовского типа для конечных групп // Структурные свойства алгебраических систем. – Нальчик: Кабардино-Балкар. ун-т, 1981. – С. 42–52.
5. *Шеметков Л. А.* О p-длине произвольных конечных групп // Докл. АН БССР. – 1969. – **13**, № 5. – С. 394–395.
6. *Мазуров В. Д.* Конечные группы с единичной 2-длиной разрешимых подгрупп // Алгебра и логика. – 1972. – **11**, № 4. – С. 438–469.
7. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 1 (247). – С. 57–96.
8. *Gross F.* Hall subgroups of order not divisible by 3 // Roky Mountain J. Math. – 1993. – **23**, № 2. – P. 569–591.
9. *Hall P.* Theorems like Sylow's // Proc. Math. Soc. – 1956. – **6**, № 11. – P. 286–304.
10. *Thompson J.* Hall subgroups of the symmetric groups // J. Combin. Theory. Ser. A. – 1966. – **1**. – P. 271–279.
11. *Conway Y. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. – Oxford, 1985. – 252 p.
12. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
13. *Glauberman G.* Factorizations in lokal subgroups of finite groups // Reg. Conf. Ser. Math. – 1977. – № 33. – 77 p.
14. *Hartley R. W.* Determination of the ternary collineation groups whose coeffizients lie in the $GF(2^n)$ // Ann. Math. – 1925. – **27**. – P. 140–158.
15. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. – М.: Наука, 1968. – 112 с.
16. *Kleidman P.* The maximal subgroups of Chevalley groups $G_2(q)$ with q odd, the Ree groups ${}^2G_2(q)$, and their automorphism groups // J. Algebra. – 1988. – **117**. – P. 30–71.

Получено 30.07.98