УДК 517.547.2

П. В. Філевич (Львів. ун-т)

ПРО ІНДИКАТОР ФРАГМЕНА – ЛІНДЕЛЬОФА ДЛЯ ВИПАДКОВИХ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

We establish that, for the "majority" of entire functions of finite order, the generalized Phragmén–Lindelöf indicator of these functions is identically constant.

Встановлено, що для „більшості" цілих функцій скінченного порядку їх узагальнений індикатор Фрагмена – Ліндельофа тотожно дорівнює сталій.

Типовість деякої властивості для класу математичних об'єктів інколи вдається довести таким методом. У вказаному класі розглядають множину об'єктів, які цієї властивості не мають, і встановлюють, що така множина в певному розумінні (наприклад, в сенсі міри) є малою у порівнянні з усім класом. Іншими словами, „більшість" об'єктів класу цю властивість задовольняють.

Важливим поняттям, з допомогою якого вдається встановити типовість окремих властивостей аналітичних функцій, є поняття випадкової функції (див., наприклад, роботи [1 – 6] і наведену в них бібліографію). У даній роботі встановлено, що для „більшості" цілих функцій скінченного порядку їх узагальнений індикатор Фрагмена – Ліндельофа тотожно дорівнює їх типу відносно відповідного уточненого порядку. Як наслідок, отримаємо, що для таких функцій типовою є властивість, за якою порядок функції на кожному промені дорівнює порядку функції. Випливатимуть звідси і результати Г. Штейнгауза [1] та Р. Пелі і А. Зигмунда [2] щодо аналітичного продовження аналітичних в крузі функцій.

Для довільної цілої функції скінченного порядку і вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

використовуватимемо стандартні позначення (див. [7]):

1) $M(r,f)$ — максимум модуля;

2) $\mu(r,f)$ — максимальний член;

3) $\rho(f)$, $\rho_{\alpha,\beta}(f)$, $\rho_{\gamma}(f)$ — відповідно порядок, порядок в куті $\{z\colon \alpha \le \arg z \le \beta\}$ і порядок на промені $\{z\colon \arg z = \gamma\}$;

4) $\rho(r,f)$ — уточнений порядок, а $\sigma(f)$ — тип при ньому $(0 < \sigma(f) < +\infty)$;

5) $h_\theta(f)$ — узагальнений індикатор (відносно $\rho(r,f)$).

Нехай також

$$f_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_n(t) z^n$$

— випадкова ціла функція. Тут $\{Z_n\}$ — послідовність комплексних випадкових величин, заданих на ймовірнісному просторі Штейнгауза $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ [4, с. 9]; $\Omega = [0;1]$, P — міра Лебега на прямій, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин з [0; 1].

Позначимо через $\mathcal{Z}$ множину послідовностей $\{Z_n\}$ незалежних випадкових величин з нульовими математичними сподіваннями, для яких $|Z_n| = 1$, $n \ge 0$. Зокрема, послідовність Радемахера чи послідовність $\{\exp(2\pi i \omega_n)\}$, де $\{\omega_n\}$ — послідовність Штейнгауза (див. [4, с. 9, 10]), належать до $\mathcal{Z}$.

Якщо $\{Z_n\} \in \mathcal{Z}$, то для кожної з функцій f_t $(t \in [0; 1])$ виконуються рівності:

1) $\mu(r, f) = \mu(r, f_t)$, $r \geq 0$,

2) $\rho(f) = \rho(f_t)$.

Крім того, оскільки для кожної цілої функції скінченного порядку і вигляду (1)

$$\ln M(r, f) \sim \ln \mu(r, f), \qquad r \to +\infty,$$

то $\rho(r, f)$ є уточненим порядком, а $\sigma(f)$ — типом при ньому для кожної з f_t.

Теорема 1. *Нехай f — ціла функція скінченного порядку вигляду* (1), *а $\{Z_n\} \in \mathcal{Z}$. Тоді для майже всіх $t \in [0; 1]$ справджується тотожність $h_\theta(f_t) \equiv \equiv \sigma(f)$.*

При доведенні цієї теореми використовуються нерівність Пелі – Зигмунда [4, с. 48] та лема Бореля – Кантеллі [4, с. 18].

***Доведення теореми* 1.** Нехай f — ціла функція скінченного порядку і вигляду (1). Легко переконатись, що існує зростаюча до $+\infty$ послідовність $\{r_n\}$ додатних дійсних чисел, а також пов'язані з нею послідовності $\{m_n\}$ і $\{k_n\}$ натуральних чисел, для яких:

i) $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln M(r_n, f)}{r_n^{\rho(r_n, f)}} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln \mu(r_n, f)}{r_n^{\rho(r_n, f)}} = \sigma(f)$;

ii) $m_1 < k_1 < m_2 < k_2 < m_3 < k_3 < \ldots$;

iii) $\sum\limits_{p \notin [m_n; k_n]} |a_p| r_n^p \leq \dfrac{\mu(r_n, f)}{4}$.

Нехай далі $\{Z_n\} \in \mathcal{Z}$, а θ — довільне число з півінтервалу $[0; 2\pi)$. Розглянемо послідовність подій

$$A_n = \left\{ \left| \sum_{p = m_n}^{k_n} a_p Z_p r_n^p e^{i\theta p} \right| > \frac{1}{2} \mu(r_n, f) \right\}, \quad n \geq 1.$$

За теоремою Пелі – Зигмунда [4, с. 48] $P(A_n) > 3/16$, $n \geq 1$, тобто $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$. Оскільки, згідно з властивістю ii), події A_n є незалежними, то за лемою Бореля – Кантеллі для майже всіх $t \in [0; 1]$ виконується нескінченна кількість цих подій. Тому, враховуючи властивість iii), отримуємо на деякій підпослідовності $\{r_{n_l}\}$ послідовності $\{r_n\}$ нерівність

$$\left| f_t(r_{n_l} e^{i\theta}) \right| \geq \left| \sum_{p = m_{n_l}}^{k_{n_l}} a_p Z_p r_{n_l}^p e^{i\theta p} \right| - \sum_{p \notin [m_{n_l}; k_{n_l}]} |a_p| r_{n_l}^p > \frac{1}{4} \mu\left(r_{n_l}, f\right),$$

тобто за властивістю i) $h_\theta(f_t) = \sigma(f)$ для майже всіх $t \in [0; 1]$.

Нехай тепер I — зліченна і щільна на $[0; 2\pi)$ множина. За доведеним для всіх $\theta \in I$ майже напевно (за t) виконується рівність $h_\theta(f_t) = \sigma(f)$. Із зліченної адитивності міри Лебега випливає, що ця рівність майже напевно справедлива для всіх $\theta \in I$. Оскільки індикатор — неперервна функція, то для майже всіх $t \in [0; 1]$ внаслідок щільності множини I отримуємо $h_\theta(f_t) \equiv \sigma(f)$.

Наведемо деякі наслідки з теореми 1.

Про порядок на промені. Розглянемо цілу функцію вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{\lambda_n}, \tag{2}$$

де $\{\lambda_n\}$ — строго зростаюча послідовність невід'ємних цілих чисел.

Д. Пойа [8] довів, що якщо функція (2) має скінченний порядок ρ і виконується умова Фабрі

$$\frac{n}{\lambda_n} \to 0, \quad n \to +\infty, \tag{3}$$

то для довільних α і β, $\alpha < \beta$, справедлива рівність $\rho_{\alpha,\beta}(f) = \rho(f)$. У 1969 р. В. Фукс [9], скориставшись своїми оцінками інтеграла по малих дугах від логарифмічної похідної цілої функції, встановив, що справедливе сильніше твердження: $\rho_\gamma(f) \equiv \rho(f)$.

***Зауваження* 1.** Результат В. Фукса, як довів Й. Кюн [10], є точним у класі вимірних за Пойа послідовностей $\{\lambda_n\}$: для довільної послідовності показників $\{\lambda_n\}$ такої, що $n/\lambda_n \to \Delta > 0$, $n \to +\infty$, знайдеться ціла функція f вигляду (2), яка має порядок $\rho(f) = \Delta/2$ і є обмеженою на додатному промені.

Наступна теорема, що є наслідком з теореми 1, вказує на типовість властивості функцій вигляду (2), (3) у класі всіх цілих функцій скінченного порядку.

Теорема 2. *Нехай f — ціла функція скінченного порядку вигляду* (1), *а* $\{Z_n\} \in \mathcal{Z}$. *Тоді для майже всіх* $t \in [0; 1]$ *справджується тотожність* $\rho_\gamma(f_t) \equiv \equiv \rho(f)$.

Про аналітичне продовження. Використовуючи теорему Пойа [7, с. 114] про спряжену діаграму цілої функції скінченного степеня, з теореми 1 легко отримати наступне твердження.

Теорема 3. *Нехай f — аналітична в одиничному крузі* $\{z: |z|<1\}$ *функція вигляду* (1) *з одиничним радіусом збіжності, а* $\{Z_n\} \in \mathcal{Z}$. *Тоді для майже всіх* $t \in [0; 1]$ *функцію* f_t *не можна продовжити через коло* $\{z: |z|=1\}$.

Доведення. Якщо функція f вигляду (1) — аналітична в одиничному крузі і її радіус збіжності дорівнює 1, тобто $\overline{\lim}_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n} = 1$, то такою є і кожна з функцій f_t. Розглянемо функцію

$$g_t(z) = \frac{1}{z} f_t\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n Z_n(t)}{z^{n+1}},$$

яка є асоційованою за Борелем для функції

$$G_t(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n Z_n(t)}{n!} z^n.$$

Легко бачити, що $\rho(G_t) = 1$ і $\sigma(G_t) = 1$. З теореми 1 випливає, що для майже всіх $t \in [0; 1]$ спряжена діаграма функції G_t — це коло $\{z: |z|=1\}$. За теоремою Пойа дане коло майже напевно є індикаторною діаграмою для g_t, а отже, і природною межею для f_t.

***Зауваження* 2.** У випадку, коли $Z_n = \exp(2\pi i \omega_n)$, $n \ge 0$ ($\{\omega_n\}$ — послідовність Штейнгауза), теорема 3 дає відомий результат Г. Штейнгауза [1], а у випадку, коли $\{Z_n\}$ — послідовність Радемахера, — результат Р. Пелі та

А. Зигмунда [2]. Окрім того, теорема 3 доповнює відому теорему К. Риль-Нарджевського [11] про аналітичне продовження випадкових рядів Тейлора (див. також [4, с. 62], теорема 1).

1. *Steinhaus H.* Über die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Konvergenzreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grence ist // Math. Z. – 1929. – **31**. – S. 408 – 416.
2. *Paley R. E. A. C., Zygmund A.* A note on analytic functions in the unit circle // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1932. – **28**. – P. 266 – 272.
3. *Offord A. C.* The distribution of zeros of series whose coefficients are independent random variables // Indian J. Math. – 1967. – **9**. – P. 175 – 196.
4. *Кахан Ж.-П.* Случайные функциональные ряды. – М.: Мир, 1973. – 302 с.
5. *Філевич П. В.* Деякі класи цілих функцій, в яких майже напевне можна покращити нерівність Вімана – Валірона // Мат. студії. Пр. Львів. мат. т-ва. – 1996. – Вип. 6. – С. 59 – 66.
6. *Філевич П.В.* Оцінки типу Вімана – Валірона для випадкових цілих функцій // Допов. НАН України. – 1997. – № 12. – С. 41 – 43.
7. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 632 с.
8. *Fólya G.* Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen // Math. Z. – 1929. – **29**. – S. 549 – 640.
9. *Fuchs W. H. J.* Proof of a conjecture of G. Pólya concerning gap series // Ill. J. Math. – 1963. – **7**. – P. 661 – 667.
10. *Kühn J.* Über das Wachstum reeller Potenzreihen mit weniger Vorzeichenwechseln und über das Wachstum ganzer Dirichlet-Reihen // Mitt. Math. Semin. Giessen. – 1967. – Hf. 75. – 77 S.
11. *Ryll-Nardzewski C.* D. Blackwell's conjecture on power series with random coefficients // Stud. math. – 1953. – **13**. – P. 30 – 36.

Одержано 26.06.98