УДК 512.64

Б. З. Шаваровський (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ПРО НАПІВСКАЛЯРНУ ТА КВАЗІДІАГОНАЛЬНУ ЕКВІВАЛЕНТНОСТІ МАТРИЦЬ

For a chosen class of polynomial matrices $A(x)$, we consider the transformations $SA(x)R(x)$ with invertible matrices S and $R(x)$, i.e., the so-called half-scalar equivalent transformations. We indicate necessary and sufficient conditions of the matrix equivalence of this sort. We introduce a notion of quasidiagonal equivalence of numerical matrices. We find the relation of half-scalar and quasidiagonal equivalences to the problem of matrix pairs.

Для виділеного класу многочленних матриць $A(x)$ розглядаються перетворення $SA(x)R(x)$ з оборотними матрицями S і $R(x)$, тобто так звані напівскалярно еквівалентні перетворення. Вказано необхідні та достатні умови такої еквівалентності матриць. Введено поняття квазідіагональної еквівалентності числових матриць. Знайдено зв'язок між напівскалярною, квазідіагональною еквівалентностями та проблемою пар матриць.

Розглядається многочленна матриця $A(x)$ та перетворення $SA(x)R(x) = B(x)$ з оборотними матрицями S і $R(x)$. Такі перетворення називають напівскалярно еквівалентними і позначають $A(x) \sim B(x)$ [1]. Для виділеного класу многочленних матриць дається критерій напівскалярної еквівалентності, а також досліджується її зв'язок з проблемою пар матриць.

В роботі використовується поняття значення матриці $H(x)$ на системі коренів многочлена $\varphi(x)$, що позначається $M_{H(x)}(\varphi)$ [2]. Якщо $\varphi(x)$ має усі прості корені $\beta_1, \ldots, \beta_m$, то

$$M_{H(x)}(\varphi) = M_{H(x)}[\beta_1, \ldots, \beta_m] = \left\| \begin{matrix} H(\beta_1) \\ \vdots \\ H(\beta_m) \end{matrix} \right\|.$$

Нехай $A(x)$ — многочленна матриця порядку n над полем комплексних чисел C, тобто $A(x) \in M_n(C[x])$. Розглянемо випадок, коли матриця $A(x)$ має лише два різні інваріантні множники $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, причому всі корені многочлена $\delta(x) = \varphi_2(x)/\varphi_1(x)$ кратності 1. Не зменшуючи більше загальності, можемо вважати, що форма Сміта такої матриці має вигляд

$$\operatorname{diag}(1, \ldots, 1, \delta(x), \ldots, \delta(x))$$

і всі корені многочлена $\delta(x)$ прості. Позначимо через k і l числа інваріантних множників матриці $A(x)$, рівних відповідно 1 і $\delta(x)$, $k + l = n$. Використовуючи [1], можна довести, що матриця $A(x)$ напівскалярно еквівалентними перетвореннями зводиться до трикутного вигляду

$$A_1(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_k & O_{k,l} \\ \hline F(x) & \delta(x) E_l \end{array} \right\|, \tag{1}$$

де E_i — одинична матриця порядку i $(i = k, l)$, $O_{k,l}$ — нульова матриця розміру $k \times l$, $F(x)$ — многочленна матриця розміру $l \times k$ степеня $< \deg \delta$. Введемо позначення: $M_1 = M_{A_*(x)/\delta^{l-1}(x)}(\delta)$, $M_2 = M_{A^T(x)}(\delta)$ — значення матриць $A_*(x)/\delta^{l-1}(x)$ та $A^T(x)$ на системі коренів многочлена $\delta(x)$ ($*$ — операція взяття взаємної матриці, T — операція транспонування).

Твердження 1. *Якщо* $\operatorname{rang} M_1 = \operatorname{rang} M_2 = n$, *то матриця* $A(x)$ *напів-*

скалярно еквівалентними перетвореннями не зводиться до квазідіагонального вигляду

$$A_0(x) = \operatorname{diag}\{E_p, \delta(x)E_q, \tilde{A}(x)\}, \tag{2}$$

де $p \geq 1$ *або* $q \geq 1$, $\tilde{A}(x)$ — *многочленна матриця порядку* $n-p-q$. *Якщо ж* $\operatorname{rang} M_1 = n-p$ *або* $\operatorname{rang} M_2 = n-q$, *то* $A(x) \sim A_0(x)$, *причому матриця* $\tilde{A}(x)$ *до вигляду* (2) *не зводиться.*

Доведення. Припустимо спочатку, що за умов першої частини твердження $A(x) \sim A_0(x)$. Тоді, враховуючи твердження 4, 6 з § 2 розд. II [2] та будову матриць $A_{0*}(x)$, $A_0^T(x)$, маємо $\operatorname{rang} M_1 = \operatorname{rang} M_{A_{0*}(x)/\delta^{l-1}(x)}(\delta) \leq n-p$, або $\operatorname{rang} M_2 = \operatorname{rang} M_{A_0^T(x)}(\delta) \leq n-q$, що суперечить умові.

Нехай тепер виконуються умови другої частини твердження. Тоді $\operatorname{rang} M_{A_{1*}(x)/\delta^{l-1}(x)}(\delta) = \operatorname{rang} M_{\|E_l F(x)\|}(\delta) = n-p$, або $\operatorname{rang} M_{A_1^T(x)}(\delta) = \operatorname{rang} M_{\|E_l F^T(x)\|}(\delta) = n-q$. Далі, зважаючи на твердження 3 з § 2 розд. II [2], одержуємо, що матриця $A_1(x)$ скалярно еквівалентна до матриці $A_0(x)$. Очевидно, що компонента $\tilde{A}(x)$ матриці $A_0(x)$ до вигляду (2) не зводиться, оскільки в противному разі $\operatorname{rang} M_1 < n-p$ або $\operatorname{rang} M_2 < n-q$. Твердження доведено.

Отже, для дослідження напівскалярної еквівалентності виділеного класу матриць досить розглядати лише об'єкти, які задовольняють умови першої частини твердження 1, тобто матриці, незвідні до вигляду (2).

Нехай $B(x)$ — деяка інша матриця із $M_n(\boldsymbol{C}[x])$, причому $B(x) \sim B_1(x)$,

$$B_1(x) = \left\| \begin{array}{c|c} E_k & O_{k,l} \\ \hline G(x) & \delta(x)E_l \end{array} \right\|. \tag{3}$$

Позначимо через $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{l-1}$ всі корені многочлена $\delta(x)$ і при побудові значень матриць на системі коренів цього многочлена завжди матимемо на увазі саме таку нумерацію його коренів. Можемо вважати, що для деякого фіксованого кореня многочлена $\delta(x)$, наприклад α_0, в матрицях $A_1(x)$ (1) і $B_1(x)$ (3) виконуються умови: $F(\alpha_0) = G(\alpha_0) = O_{l,k}$. Далі для визначеності припустимо, що $k \geq l$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Матриці* $A(x)$ *і* $B(x)$ *напівскалярно еквівалентні тоді і тільки тоді, коли рівняння*

$$XM_{\|E_l F(x)\|}(\delta) = M_{\|E_l G(x)\|}(\delta)Y, \tag{4}$$

де X *і* Y — *невідомі квадратні матриці порядків* lt *і* n *відповідно, має неособливий розв'язок* X_0, Y_0 $(\det X_0 \neq 0,\ \det Y_0 \neq 0)$ *вигляду*

$$X_0 = \operatorname{diag}\{X_{11}, \ldots, X_{tt}\}, \qquad Y_0 = \left\| \begin{array}{c|c} Y_{11} & O_{l,k} \\ \hline Y_{21} & Y_{22} \end{array} \right\|.$$

(X_{ii}, $i = 1, \ldots, t$, Y_{11} — *квадратні блоки порядку* l).

Доведення. *Необхідність.* Нехай $A(x) \sim B(x)$. Тоді, перейшовши в очевидній рівності $A_1(x)R(x) = SB_1(x)$, де $S \in \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C})$, $R(x) \in \mathrm{GL}(n, \boldsymbol{C}[x])$, до взаємних матриць і зобразивши при цьому матриці S_*, $R_*(x)$ у блочній формі, подібній до форми матриці $A_1(x)$ $(B_1(x))$, можемо записати рівність, яка після скорочення на $\delta^{l-1}(x)$ набере вигляду

$$\left\| \begin{array}{c|c} R_{11}(x) & R_{12}(x) \\ \hline R_{21}(x) & R_{22}(x) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} O_{k,l} & \delta(x)\, E_k \\ \hline E_l & F(x) \end{array} \right\| =$$

$$= \left\| \begin{array}{c|c} O_{k,l} & \delta(x)\, E_k \\ \hline E_l & G(x) \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} S_{11} & S_{12} \\ \hline S_{21} & S_{22} \end{array} \right\|. \tag{5}$$

Тут $R_{11}(x)$ і S_{11} — квадратні блоки порядків k і l відповідно. З останньої рівності підстановкою $x = \alpha_0$ отримуємо $S_{12} = O_{l,k}$ і переходом до значень матриць на системі коренів многочлена $\delta(x)$ будемо мати

$$\operatorname{diag}\{R_{22}(\alpha_0), R_{22}(\alpha_1), \ldots, R_{22}(\alpha_{t-1})\} M_{\|E_l\, F(x)\|}(\delta) =$$

$$= M_{\|E_l\, G(x)\|}(\delta) \left\| \begin{array}{c|c} S_{11} & O_{l,k} \\ \hline S_{21} & S_{22} \end{array} \right\|. \tag{6}$$

Оскільки S, $R(x)$ — оборотні матриці і, як видно з рівності (5), $R_{12}(x) = \delta(x) S_{21}$, то $\det R_{22}(\alpha_j) \neq 0$, $j = 0, 1, \ldots, t-1$, $\det S_{11} \neq 0$, $\det S_{22} \neq 0$. Отже, рівність (6) свідчить про те, що рівняння (4) має вказаний в теоремі розв'язок.

Достатність. Навпаки, нехай X_0, Y_0 — потрібний розв'язок рівняння (4). За елементами блоків X_{ii} матриці X_0 побудуємо многочленну матрицю $R_{22}(x)$ так, що $R_{22}(\alpha_{i-1}) = X_{ii}$, $i = 1, \ldots, t$. Поклавши $S_{11} = Y_{11}$, $S_{21} = Y_{21}$, $S_{22} = Y_{22}$, переконуємось, що $R_{22}(x) = S_{11} + G(x) S_{21}$ і має місце рівність (6). Оскільки, як видно з цієї рівності,

$$G(x) S_{22} - S_{11} F(x) - G(x) S_{21} F(x) \equiv O_{l,k} \pmod{\delta(x)},$$

то

$$R_{21}(x) = \big(G(x) S_{22} - S_{11} F(x) - G(x) S_{21} F(x)\big) / \delta(x) \in M_{l,k}(C[x]).$$

Поклавши далі $R_{11}(x) = S_{22} - S_{21} F(x)$ і $R_{12}(x) = \delta(x) S_{21}$, можемо впевнитись в оборотності блочної матриці $\| R_{uv}(x) \|_{2,2}$ і в справедливості рівності (5). З останньої випливає, що $A_1(x) \sim B_1(x)$, звідки $A(x) \sim B(x)$. Теорему доведено повністю.

Щоб відповісти на питання існування вказаного в теоремі 1 розв'язку матричного рівняння (4), замінимо це рівняння еквівалентною системою із lnt скалярних лінійних однорідних рівнянь відносно елементів матриць X, Y. Розв'язуючи отриману систему, знаходимо її загальний розв'язок і складаємо за його компонентами матриці X, Y. Якщо одночасно $\det X \not\equiv 0$, $\det Y \not\equiv 0$, то потрібний розв'язок існує. В противному разі відповідь негативна. Таким чином, теорема 1 дає критерій напівскалярної еквівалентності матриць $A(x)$ і $B(x)$.

***Зауваження* 1.** Щоб отримати аналогічний результат у випадку $k < l$, досить покласти в теоремі 1 замість $F(x)$, $G(x)$ і l відповідно $F^T(x)$, $G^T(x)$ і k.

Для продовження вивчення задачі напівскалярної еквівалентності многочленних матриць і встановлення її зв'язку з проблемою пар матриць, введемо далі таке означення.

Означення. *Числові матриці* $C = \| C_{uv} \|_{t,p}$, $D = \| D_{uv} \|_{t,p}$, *де* C_{uv}, D_{uv} — $l \times l$*-блоки, називаються еквівалентними, якщо виконується співвідношення* $C = \operatorname{diag}\{K_1, \ldots, K_t\} D \operatorname{diag}\{L_1, \ldots, L_p\}$, *де* $\det K_u \neq 0$, $\det L_v \neq 0$, $u = 1, \ldots, t$, $v = 1, \ldots, p$.

В зв'язку з цим означенням виникає питання про класифікацію $lt \times lp$-матриць з точністю до l-квазідіагональної еквівалентності. У випадку $l = 1$ дістаємо поняття діагональної еквівалентності, введене і вивчене автором в роботі [3].

Твердження 2. *Задача про l-квазідіагональну еквівалентність $lt \times lp$-матриць при $l > 1$ є дикою.*

Доведення. Неважко переконатись, що для l-квазідіагональної еквівалентності матриць

$$C = \begin{Vmatrix} E_l & E_l & E_l \\ E_l & C_{22} & C_{23} \end{Vmatrix}, \quad D = \begin{Vmatrix} E_l & E_l & E_l \\ E_l & D_{22} & D_{23} \end{Vmatrix}$$

(C_{22}, C_{23}, D_{22} і D_{23} — $l \times l$-блоки) необхідно і достатньо подібності пар матриць (C_{22}, C_{23}) і (D_{22}, D_{23}). А це означає, що наша задача є дикою. Твердження доведено.

Повернемося знову до виділеного на початку роботи класу многочленних матриць. Нехай число l інваріантних множників $\delta(x)$ матриці $A(x)$ ділить число k інваріантних множників, рівних 1. Тоді $k = l(p-1)$. Цікавим є випадок, коли ранг $n = lp$ матриці $M_{A_*(x)/\delta^{l-1}(x)}(\delta)$ досягається уже на деяких p коренях многочлена $\delta(x)$, наприклад на коренях α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$.

Твердження 3. *Якщо* $\operatorname{rang} M_{A_*(x)/\delta^{l-1}(x)}[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}] = n = lp$, *то матриця $A(x)$ напівскалярно еквівалентна до матриці*

$$A_2(x) = \left\Vert \begin{array}{c|c} E_k & O_{k,l} \\ \hline F_1(x) \mid \ldots \mid F_{p-1}(x) & \delta(x)\, E_l \end{array} \right\Vert, \tag{7}$$

де $F_m(x)$, $m = 1, \ldots, p-1$, — $l \times l$-блоки, причому $F_i(\alpha_j) = \delta_{ij} E_l$, $i, j = 0, 1, \ldots$ $\ldots, p-1$, $F_0(x) = E_l - F_1(x) - \ldots - F_{p-1}(x)$, δ_{ij} — символ Кронекера.

Доведення. Як уже зазначалось, в матриці $A_1(x)$ маємо $F(\alpha_0) = O_{l,k}$ і, згідно з твердженням 4 з § 2 розд. II [2], $\operatorname{rang} M_{\|E_l F(x)\|}[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}] = n$. Тому квадратна матриця $P = M_{F(x)}[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}]$ неособлива. Легко впевнитись, що матриця $A_2(x) = \operatorname{diag}\{P, E_l\} A_1(x) \operatorname{diag}\{P^{-1}, E_l\}$ має вигляд (7) та властивості, вказані в твердженні 3. Твердження доведено.

Зауваження 2. Умова $\operatorname{rang} M_{A_*(x)/\delta^{l-1}(x)}[\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}] = n$, як видно з теореми 2 з § 4 розд. II [2], рівносильна умові виділеності з матричного многочлена $A(x)$ лінійного регулярного множника з l-кратними характеристичними коренями α_0, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$.

Для матриці $A(x)$ за матрицею $A_2(x)$ (7) побудуємо числову $lt \times lp$-матрицю $\tilde{F} = M_{\|F_0(x)\, F_1(x) \ldots F_{p-1}(x)\|}(\delta)$. Аналогічно для деякої іншої матриці $B(x)$ з трикутною формою $B_1(x)$ (3) знаходимо спочатку напівскалярно еквівалентну матрицю

$$B_2(x) = \left\Vert \begin{array}{c|c} E_k & O_{k,l} \\ \hline G_1(x) \mid \ldots \mid G_{p-1}(x) & \delta(x)\, E_l \end{array} \right\Vert$$

з властивостями, аналогічними до властивостей матриці $A_2(x)$, а потім побудуємо числову $lt \times lp$-матрицю $\tilde{G} = M_{\|G_0(x)\, G_1(x) \ldots G_{p-1}(x)\|}(\delta)$. Існування потрібної матриці $B_2(x)$ є необхідною умовою, щоб $A(x) \sim B(x)$.

Теорема 2. *Для напівскалярної еквівалентності матриць $A(x)$ і $B(x)$ необхідно і достатньо l-квазідіагональної еквівалентності матриць $\tilde{F}$ і $\tilde{G}$.*

Доведення легко провести на основі теореми 1. Для цього потрібно записати рівняння (4) на основі матриць $A_2(x)$, $B_2(x)$ і взяти до уваги те, що матриці $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ відрізняються відповідно від матриць

$$M_{\|E_l\, F_1(x)\, \dots\, F_{p-1}(x)\|}(\delta), \qquad M_{\|E_l\, G_1(x)\, \dots\, G_{p-1}(x)\|}(\delta)$$

правим множником

$$\left\|\begin{matrix} E_l & & \\ \vdots & \ddots & \\ E_l & & E_l \end{matrix}\right\|.$$

З теореми 2 на основі твердження 2 випливає такий наслідок.

Наслідок. *Задача про напівскалярну еквівалентність матриць* $A(x)$ *і* $B(x)$ *є дикою.*

Зупинимось тепер на застосуванні одержаних результатів до задачі про класифікацію деяких класів наборів матриць з точністю до подібності.

Нехай

$$(A_1, \dots, A_s) \tag{8}$$

— набір квадратних порядку n числових матриць. Співставимо йому многочленну матрицю $A(x) = E_n x^s + A_1 x^{s-1} + \dots + A_s$. Припустимо, що $A(x)$ належить до розглядуваного в цій роботі класу многочленних матриць, тобто матриця $A(x)$ зводиться до матриці $A_2(x)$ вигляду (7) з властивостями, вказаними в твердженні 3. За матрицею $A_2(x)$ будуємо числову матрицю $M_{\|F_0(x)\, F_1(x)\, \dots\, G_{p-1}(x)\|}[\alpha_p, \dots, \alpha_{t-1}]$ і, якщо, наприклад всі блоки першого блочного рядка і першого блочного стовпця неособливі, то зведемо її l-квазідіагонально еквівалентними перетвореннями до матриці

$$\left\|\begin{matrix} E_l & E_l & \dots & E_l \\ E_l & B_{22} & \dots & B_{2p} \\ \hdotsfor{4} \\ E_l & B_{t-p,2} & \dots & B_{t-p,p} \end{matrix}\right\|.$$

Враховуючи наслідок 2 з [1] і теорему 2, робимо висновок, що задача класифікації наборів (8) матриць порядку n в цьому випадку зводиться до задачі класифікації наборів $(B_{22}, \dots, B_{2p}, \dots, B_{t-p,2}, \dots, B_{t-p,p})$ матриць порядку l, $l < n$. Остання розв'язана для $l = 4$ в роботі [4].

Зауваження 3. Якщо k ділить l, то справедливі твердження, аналогічні до твердження 3 і теореми 2. Для цього матриці $A_2(x)$, $\tilde{F}$ і $\tilde{G}$ потрібно подати у вигляді

$$A_2(x) = \left\|\begin{array}{c|c} E_k & O_{k,l} \\ \hline F_1(x) & \\ \cline{1-1} \vdots & \delta(x)\, E_l \\ \cline{1-1} F_{p-1}(x) & \end{array}\right\|,$$

$$\tilde{F} = M_{\|F_0^T(x)\, F_1^T(x) \dots F_{p-1}^T(x\|}(\delta),$$

$$\tilde{G} = M_{\|G_0^T(x)\, G_1^T(x) \ldots G_{p-1}^T(x\|}(\delta)$$

і в тексті замінити l на k.

***Зауваження* 4.** Якщо $k = 1$ або $l = 1$, то задача напівскалярної еквівалентності є ручною. Вона розв'язана автором в роботах [3, 5].

1. *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. – Київ: Наук. думка, 1977. – С. 61–66.
2. *Казімірський П. С.* Розклад матричних многочленів на множники. – Київ: Наук. думка, 1981. – 224 с.
3. *Шаваровский Б. З.* Полускалярная эквивалентность полиномиальных матриц с попарно различными корнями их характеристического многочлена // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1984. – Вып. 19. – С. 33–37.
4. *Сергейчук В. В., Галинский Д. В.* Классификация пар линейных операторов в четырехмерном векторном пространстве // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1993. – С. 413–430.
5. *Шаваровський Б. З.* Квазідіагональна редукція одного класу многочленних матриць // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1997. – Вип. 40, № 3. – С. 7–12.

Одержано 14.07.98,
після доопрацювання — 29.11.99