УДК 517.9

Б. В. Базалий, Н. В. Васильева
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

О РАЗРЕШИМОСТИ МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ HELE – SHAW В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ГЕЛЬДЕРА В ПЛОСКОМ УГЛЕ

We study a nonstationary boundary-value problem for the Laplace equation in a plane corner with time derivative in a boundary condition. We obtain coercive estimates in weight Hölder spaces.

Вивчається нестаціонарна крайова задача для рівняння Лапласа в плоскому куті з похідною за часом в граничній умові. Отримано коерцитивні оцінки у вагових просторах Гельдера.

Задача Hele – Shaw является математической моделью плоского движения вязкой несжимаемой жидкости со свободной границей. Кроме того, ее можно рассматривать как вариант известной задачи Стефана для эллиптического уравнения, поскольку условия на свободной границе имеют одинаковую форму в обеих задачах. Доказательство классической разрешимости в малом по времени такого рода нелинейных задач основано на получении коэрцитивных оценок решений линейных краевых модельных задач, содержащих производную по времени в граничном условии [1–3]. В случае регулярных начальных данных эти модельные задачи имеют постоянные коэффициенты и формулируются для полупространства. Ситуация меняется, если, например, свободная граница в начальный момент времени имеет угловые точки. В этом случае модельные задачи, связанные с наличием свободной границы, имеют переменные коэффициенты и рассматриваются в плоском угле, что значительно усложняет их исследование.

В работе [4] с помощью качественных методов была исследована задача Hele – Shaw с нерегулярной начальной границей. В частности, показано, что в случае расширяющихся областей тупые углы мгновенно сглаживаются, в то время как острые углы при некоторых условиях могут сохраняться на свободной границе в течение некоторого времени.

Представленные в данной работе результаты по изучению модельной задачи, соответствующей угловой точке на начальной свободной границе, частично подтверждают результаты [4], однако, нашей главной целью было описание весовых классов Гельдера, в которых имеют место коэрцитивные оценки решений модельной задачи, и доказательство этих оценок, что является основой для доказательства в дальнейшем классической разрешимости задачи Hele – Shaw с нерегулярной начальной границей. Аналогичная краевая задача ранее рассматривалась в работах [5, 6] в весовых пространствах Соболева, и мы существенно используем некоторые результаты из этих работ.

1. Постановка задачи и основной результат. Пусть

$$G = \left\{(y_1, y_2): -y_1 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2} < y_2 < 0, y_1 > 0\right\}, \qquad G_T = G \times (0, T),$$

$$g = \left\{(y_1, y_2): y_2 = -y_1 \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}, y_1 > 0\right\}, \qquad g_T = g \times (0, T),$$

n — внешняя к G нормаль, $r = \left(y_1^2 + y_2^2\right)^{1/2}$, (r, ϕ) — полярная система координат на плоскости (y_1, y_2). Модельная задача Hele – Shaw заключается в отыскании функции $u(y, t)$, удовлетворяющей условиям

$$\Delta_y u = f_0(y,t), \quad (y,t)\in G_T; \quad r^{1-\frac{\pi}{\omega}}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial n} + h\frac{\partial u}{\partial r} = f(y,t), \quad (y,t)\in g_T;$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y_2=0} = 0; \quad u(y,0) = 0, \quad y\in \overline{G}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(y,0) = 0, \quad y\in g, \tag{1}$$

где Δ_y — оператор Лапласа по переменным (y_1, y_2), $h = -\mathrm{tg}(\pi/2 - \omega/2)$, ω — заданный угол, $f_0(y,t)$, $f(y,t)$ — заданные функции, $f_0(y,0) = 0$, $f(y,0) = 0$. Если апеллировать к исходной постановке задачи Hele–Shaw, то можно сказать, что функция $u(y,t)$ имеет смысл отклонения потенциала скоростей от заданного начального значения. При этом предполагалось, что в окрестности угловой точки с углом ω начальная свободная граница состоит из прямолинейных отрезков и решение симметрично относительно биссектрисы этого угла. Для определенности рассматриваем случай $\omega < \pi/2$, так что $h < 0$. Случай $\omega = \pi/2$ рассматривался в [7].

Обозначим $\gamma = \pi/\omega - 2$, $[\gamma]$ — целая часть γ, $\gamma = [\gamma] + \{\gamma\}$, и введем в G систему координат (x_1, x_2) такую, что $r = e^{-x_1}$, $\phi = x_2$. Тогда образом G будет полоса $B = \{(x_1,x_2)\colon -\infty < x_1 < +\infty,\ x_2 \in (-\omega/2, 0)\}$, а образом g является $D = \{(x_1,x_2)\colon -\infty < x_1 < +\infty,\ x_2 = \omega/2\}$. В новых переменных задача (1) примет вид

$$\Delta_x u = e^{-2x_1} f_0(x_1,x_2,t), \quad (x,t)\in B_T = B\times(0,T);$$
$$u(x,0) = 0, \quad x\in \overline{B}, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x\in D,$$
$$e^{\gamma x_1}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x_2} - h\frac{\partial u}{\partial x_1} = e^{-x_1} f(x_1,t), \tag{2}$$
$$(x,t)\in D_T = D\times(0,T); \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0,$$

при этом для искомой функции $u(y(x),t)$ и правых частей задачи сохраним старые обозначения.

Пусть $\Omega \subset R^n$, $\Omega_T = \Omega\times(0,T)$. Ниже используем пространства Гельдера $C^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$ [8] и пространства $C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)$, $k = \overline{0,2}$, $\alpha, \beta, \delta \in (0,1)$, со следующей нормой:

$$\|v\|_{C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{\Omega}_T)} = \sum_{l=0}^{k}\left[\max_{\overline{\Omega}_T}\left|D_x^l v\right| + \left\langle D_x^l v\right\rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} + \left\langle D_x^l v\right\rangle_{t,\Omega_T}^{(\beta)} + \left[D_x^l v\right]_{\Omega_T}^{(\beta,\delta)}\right],$$

где $\langle v\rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)}$, $\langle v\rangle_{t,\Omega_T}^{(\beta)}$ — постоянные Гельдера относительно переменных x и t соответственно и

$$[v]_{\Omega_T}^{(\beta,\delta)} = \sup_{x,z,t,\tau}\frac{|v(x,t) - v(z,t) - v(x,\tau) + v(z,\tau)|}{|x-z|^{\delta}|t-\tau|^{\beta}} \tag{3}$$

— полунорма, введенная в работе [9]. Задача (1) изучается в пространствах вида $E_{\aleph}^{k+\alpha,\beta,\delta}$. Будем говорить, например, что $u(y,t)\in E_{\aleph}^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{G}_T)$, соответственно $E_{\aleph}^{k+\alpha}(\overline{G})$, если $v(x,t) = e^{\aleph x_1}u(y(x),t) \in C^{k+\alpha,\beta,\delta}(\overline{B}_T)$, соответственно $C^{k+\alpha}(\overline{B})$.

Теорема 1. *Пусть* $\omega \in (0, \pi/2)$, $\aleph = \alpha + [\gamma]$, $0 < \alpha < \{\gamma\}$, $f_0(y,t)\in$

$\in E_{\varkappa-1}^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)$, $f(y,t) \in E_{\varkappa}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{g}_T)$, *тогда существует единственное решение задачи* (1) $u(y,t) \in E_{\varkappa+1}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)$, *для которого справедлива оценка*

$$\|u\|_{E_{\varkappa+1}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)} + \left\|u_t r^{-(\gamma+1)}\right\|_{E_{\varkappa}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{g}_T)} \le c\left(\|f_0\|_{E_{\varkappa-1}^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)} + \|f\|_{E_{\varkappa}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{g}_T)}\right). \tag{4}$$

Доказательство оценки (4) составляет основное содержание данной работы.

2. Интегральные представления решений задачи (2). Рассмотрим вспомогательную задачу

$$\Delta_y v = f_0(y,t), \quad (y,t) \in G_T, \quad \left.\frac{\partial v}{\partial y_2}\right|_{y_2=0} = 0, \quad v|_{g_T} = 0,$$
$$v(y,0) = 0, \quad y \in \overline{G}. \tag{5}$$

Из результатов [10] (гл. 6, § 4) следует, что при каждом $t \in [0,T]$ $v(y,t) \in E_{\varkappa+1}^{2+\alpha}(\overline{G})$ при $f_0(y,t) \in E_{\varkappa-1}^{\alpha}(\overline{G})$. Свойства гладкости функции $v(y,t)$ по параметру t определяются свойствами функции $f_0(y,t)$ и наличие в норме $E_{\varkappa-1}^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)$ полунорм вида (3) позволяет доказать справедливость оценки

$$\|u\|_{E_{\varkappa+1}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)} \le c\|f_0\|_{E_{\varkappa-1}^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T)}.$$

Из этой оценки следует, что $D_y v\big|_{g_T} \in E_{\varkappa}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{g}_T)$, и, следовательно, без потери общности задачи (1) и (2) можно рассматривать при $f_0(y,t) = 0$.

Обозначим преобразование Фурье по переменной x_1 и преобразование Лапласа по переменной t функции $u(x_1,x_2,t)$ через $\tilde{u}(\lambda,x_2,\sigma)$. Тогда из (2) следует (полагая там $f_0(y,t) \equiv 0$), что функция $\tilde{u}(\lambda,x_2,\sigma)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{dx_2^2} - \lambda^2 \tilde{u} = 0, \quad x_2 \in \left(0, -\frac{\omega}{2}\right); \quad \frac{\partial \tilde{u}}{dx_2}(\lambda,0,\sigma) = 0;$$
$$\sigma\tilde{u}\left(\lambda + i\gamma, -\frac{\omega}{2}, \sigma\right) - \frac{\partial \tilde{u}}{dx_2}\left(\lambda, -\frac{\omega}{2}, \sigma\right) + ih\lambda\tilde{u}\left(\lambda, -\frac{\omega}{2}, \sigma\right) = \tilde{f}(\lambda - i, \sigma). \tag{6}$$

Обозначив $c(\lambda,\sigma) = \tilde{u}(\lambda, -\omega/2, \sigma)$, из (6) получим

$$\sigma c(\lambda + i\gamma, \sigma) + 2c(\lambda,\sigma)\left[\operatorname{th}\frac{\lambda\omega}{2} + ih\right] = \tilde{f}(\lambda - i, \sigma). \tag{7}$$

Пусть $\lambda = i\gamma p$, $\theta = \gamma\omega/2$, $v(p,\sigma) = c(i\gamma p, \sigma)$, $\sigma_1 = \sigma/\gamma$, $g(p,\sigma) = \gamma^{-1} f(i\gamma(p-1) - i, \sigma)$. В этих обозначениях уравнение (7) принимает вид

$$\sigma_1 v(p+1,\sigma) - p v(p,\sigma)\Omega(p) = g(p+1,\sigma), \quad \Omega(p) = tgp\theta + h. \tag{8}$$

Уравнение вида (8) со сдвигом в аргументе искомой функции было предметом тщательного изучения в работе [5]. Там же получено интегральное представление для решения задачи (8), которым и воспользуемся. Пусть $\beta = -(\pi/2 - \omega/2)$ так, что $h = \operatorname{tg}\beta < 0$. Пусть, далее, $\Gamma(p)$ — гамма-функция,

$$L(p) = \Gamma(p)A(p)\sin\pi\left(p + \frac{\beta}{\theta}\right),$$

$$A(p) = \left(\frac{\theta\,\mathrm{tg}\beta}{\beta}\right)^{p-\frac{1}{2}} \Gamma\left(p+\frac{\beta}{\theta}\right) \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma(\gamma_n+p)\Gamma(1+\alpha_n-p)}{\Gamma(\alpha_n+p)\Gamma(1+\rho_n-p)} \times$$

$$\times \left(\frac{\alpha_n^2}{\gamma_n\rho_n}\right)^{p-\frac{1}{2}} \exp(\rho_n(\ln\rho_n-1)+\gamma_n(1-\ln\gamma_n)), \tag{9}$$

$$\gamma_n = \frac{n\pi+\beta}{\theta}, \quad \rho_n = \frac{n\pi-\beta}{\theta}, \quad \alpha_n = \frac{\pi(2n-1)}{2\theta}.$$

Решение задачи (8) можно представить в виде контурного интеграла

$$v(p,\sigma) = \int\limits_{L_{-\delta}} d\zeta \frac{L(p)}{L(p+1+\zeta)} \sigma_1^{\zeta} \frac{g(p+1+\zeta,\sigma)}{e^{i\pi\zeta}-e^{-i\pi\zeta}}, \tag{10}$$

где $L_{-\delta}$ — контур в комплексной плоскости ζ, который при $\delta \in (0,1)$ совпадает с прямой $\mathrm{Re}\,\zeta = -\delta$. Используя представление (10), в работе [11] была доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть*

$$\gamma > 0, \quad f_0(x,t) = e^{-(\aleph-1)x_1}\varphi_0(x,t), \quad \varphi_0(x,0) = 0, \quad \varphi_0(x,t) \in C^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{B}_T),$$

$$f(x,t) = e^{-\aleph x_1}\varphi(x,t), \quad \varphi(x,0) = 0, \quad \varphi(x,t) \in C^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{D}_T),$$

тогда существует единственное решение задачи (2) *и выполняется неравенство*

$$\max_{x,t}\left|\exp([1+\alpha+\delta\gamma+[\gamma]]x_1)u(x,t)\right| +$$

$$+ \max_{x,t}\left|\exp([1+\alpha+\delta\gamma+[\gamma]]x_1)\nabla u(x,t)\right| \le$$

$$\le c(T,\delta)\left(\|\varphi_0\|_{C^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{B}_T)} + \|\varphi\|_{C^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{D}_T)}\right), \quad \delta \in (0,1).$$

***Замечание* 1.** Если воспользоваться представлением, которое получается из (10) после предельного перехода при $\delta \to 0$, для решения задачи (2) можно получить оценку

$$\max_{x,t}\left|\exp([1+\alpha+[\gamma]]x_1)u(x,t)\right| + \max_{x,t}\left|\exp([1+\alpha+[\gamma]]x_1)\nabla u(x,t)\right| \le$$

$$\le c\left(\|\varphi_0\|_{C^{\alpha,\beta,\alpha}(\overline{B}_T)} + \|\varphi\|_{C^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{D}_T)}\right) \tag{11}$$

с постоянной c, не зависящей от δ. В соответствии с неравенством (11) решение задачи (2) будем искать в виде $u(x,t) = e^{-(\aleph+1)x_1}w(x,t)$, при этом функция $w(x,t)$ является решением задачи

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} - 2(1+\aleph)\frac{\partial w}{\partial x_1} + (1+\aleph)^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0,$$

$$(x,t) \in B_T; \quad w(x,0) = 0, \quad x \in \overline{B}; \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0, \quad x \in D; \tag{12}$$

$$e^{\gamma x_1}\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial x_2} - h\frac{\partial w}{\partial x_1} = e^{\aleph x_1} f - h(1+\aleph)w, \quad (x,t) \in D_T; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0.$$

В свою очередь положим $w(x,t) = w_1(x,t) + w_2(x,t)$, где $w_1(x,t)$ — решение задачи

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial x_1^2} - 2(1+\aleph)\frac{\partial w_1}{\partial x_1} + (1+\aleph)^2 w_1 + \frac{\partial^2 w_1}{\partial x_2^2} = 2(1+\aleph)\frac{\partial w_2}{\partial x_1} - (1+\aleph)^2 w_2 \equiv F(x_1,x_2,t), \tag{13}$$

$$(x, t) \in B_T; \quad w_1|_{D_T} = 0, \quad \left.\frac{\partial w_1}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0, \quad w_1(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{B},$$

а функция $w_2(x, t)$ удовлетворяет условиям

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w_2}{\partial x_2^2} = 0, \quad (x, t) \in B_T; \quad w_2(x, 0) = 0, \quad x \in \overline{B};$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad x \in D;$$

$$e^{\gamma x_1}\frac{\partial w_2}{\partial t} - \frac{\partial w_2}{\partial x_2} - h\frac{\partial w_2}{\partial x_1} = e^{\aleph x_1} f - h(1+\aleph) w_2 + \frac{\partial w_1}{\partial x_2} \equiv \psi(x, t), \tag{14}$$

$$(x, t) \in D_T, \quad \left.\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} = 0.$$

Сначала проанализируем задачу (14), которая при заданной функции $\psi(x_1, t)$ совпадает с задачей (2). Используя те же соображения, которые привели к представлению (10), получаем следующее представление решения задачи (14) на границе D_T:

$$w_2\left(x_1, -\frac{\omega}{2}, t\right) = \frac{1}{4\pi}\left[\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, \frac{(t-\tau)^{-1-iy}\gamma^{-1-iy}}{\Gamma(-iy)\sin iy\pi}\psi(x_1-\xi, \tau)\, e^{i(x_1-\xi)\gamma y} \times \right.$$

$$\left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda\xi}\frac{L(-i\lambda/\gamma)}{L(-i\lambda/\gamma + iy + 1)} + \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda e^{i\lambda x_1}\frac{\tilde{\psi}(\lambda, t)\, d\lambda}{(-i\lambda/\gamma)\Omega(-i\lambda/\gamma)}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{4\pi}[a(x_1, t) + b(x_1, t)], \tag{15}$$

где $\tilde{\psi}(\lambda, t)$ — преобразование Фурье функции $\psi(x_1, t)$ по переменной x_1. При получении (15) сначала устремляем δ к нулю в (10), обходя полюс в точке $\xi = 0$ слева (этим объясняется появление второго слагаемого в (15)), а затем применяем обратное преобразование Фурье и Лапласа, используя теорему об интегральных преобразованиях свертки.

Свойства ядер в представлении (15) описываются следующим образом. Полюсы функции $A(p)$ расположены на вещественной оси вне интервала $(-(\pi+\beta)/\theta, 1+\pi/(2\theta))$. Полюсы функции $\Gamma(p)$, как известно, расположены в точках $p = 0, -1, \ldots$. Нули функции $L(p)$ расположены на вещественной оси вне интервала $(-\pi/(2\theta), 1-\beta/\theta)$. Для гамма-функции будем использовать хорошо известное асимптотическое разложение при $|p| \to \infty$

$$\Gamma(p) = c\exp\left\{\left(p - \frac{1}{2}\right)\ln p - p\right\}\left(1 + O\left(|p|^{-1}\right)\right). \tag{16}$$

В работе [5] для функции $A(p)$ получено следующее асимптотическое представление:

$$A(p) = c[\Omega(p)]^{p-\frac{1}{2}} e^p\left(1 + O\left(|p|^{-1}\right)\right) \quad \text{при} \quad |\operatorname{Im} p| \to \infty$$

$$|\Omega(p)| \to |h \pm i|, \quad \arg\Omega(p) \to \pm\left(\pi + \operatorname{arctg}\frac{1}{h}\right) \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} p \to \pm\infty. \tag{17}$$

3. Доказательство теоремы 1. В этом пункте сначала оценим константы Гельдера старших производных по переменным x_1, t и смешанных полунорм вида (3) функции $w_2(x_1, -\omega/2, t)$ из (15), а затем покажем, что аналогичные оценки справедливы для функции $w(x_1, x_2, t)$ в области $\overline{B}_T$. Для первого слагаемого в (15) легко получить соотношение

$$\frac{\partial^2 a(x_1, t)}{\partial x_1^2} = -\int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left[\psi_\xi(x_1 - \xi, \tau) e^{i(x_1-\xi)\gamma y} - \psi(x_1 - \xi, \tau) e^{i(x_1-\xi)\gamma y} i\gamma y\right] \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{(t-\tau)^{-1-iy}\gamma^{-1-iy}}{\Gamma(-iy)\sin iy\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{i\lambda L(-i\lambda/\gamma)}{L(iy+1-i\lambda/\gamma)} e^{i\lambda\xi}. \qquad (18)$$

Обозначим $q(t, x) = \ln \gamma t - \gamma x$, $\lambda/\gamma = \mu$, $\mu = \mu_1 + i\mu_2$,

$$B(x, \xi, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{e^{-iyq(t, x)}}{\Gamma(-iy)\sin iy\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-i\mu L(-i\mu)}{L(iy+1-i\mu)} e^{i\gamma\xi(\mu-y)} d\mu_1.$$

Пусть

$$c(x, t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{d\tau}{t-\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} s(x-\xi, \tau) B(x, \xi, t-\tau) d\xi. \qquad (19)$$

Ясно, что оценки первого слагаемого в квадратных скобках в (18) эквивалентны оценкам функции $c(x, t)$. Оценки, соответствующие второму слагаемому в (18), аналогичны. Отметим также, что свойства функции $c(x, t)$ определяются поведением ядра $B(x, \xi, t)$, и поскольку по своему содержанию задача (14) близка к задаче Неймана, следует ожидать, что функция $B(x, \xi, t)$ имеет особенность вида $1/\xi$. Полагаем, что $s(x, t) \in C^{\alpha, \beta, \alpha}(D_t)$, поэтому для сходимости внутреннего интеграла в (19) нужно также показать,что $B(x, \xi, t)$ имеет достаточно быстрое убывание при $\xi \to \pm\infty$. Поведение ядра $B(x, \xi, t)$ по переменным x, t, ξ описывается следующей леммой.

Лемма 1. *Функция $B(x, \xi, t)$ удовлетворяет соотношениям:*

$$1)\quad B(x, \xi, t) = \frac{m(x, \xi, t)}{(iq(t, x)+b)^2} e^{-a\gamma|\xi|}\left[1+\frac{1}{\xi\gamma}\right] \quad \forall\, (x, \xi) \in R^2,\ t \in [0, T], \qquad (20)$$

где a, b — положительные постоянные, $0 < a < 1$, $0 < b < -\operatorname{arctg}(1/h)$, функции $m(x, \xi, t)$, $m_x(x, \xi, t)$, $m_\xi(x, \xi, t)$ непрерывные и равномерно ограниченные по совокупности переменных, $|m_t(x, \xi, t)| \le m_1/t$, m_1 — положительная постоянная;

$$2)\quad \left|\int_{-\infty}^{+\infty} B(x, \xi, t) d\xi\right| \le \frac{m_2}{q^2(t, x)+b^2}, \qquad (21)$$

$$\left|\int_{0}^{+\infty} dt \frac{B(x, \xi, t)}{t}\right| \le m_3 e^{-a\gamma|\xi|}\left(1+\frac{1}{|\xi\gamma|}\right), \qquad (22)$$

$$\left|\int_{0}^{+\infty} \frac{dt}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} B(x, \xi, t) d\xi\right| \le m_4, \qquad (23)$$

где m_i, $i = \overline{2, 4}$, — положительные постоянные;

$$3)\quad B(x_1,\xi,t)-B(x_2,\xi,t) = \frac{(x_1-x_2)m_5(\bar{x},\xi,t)}{(iq(t,\bar{x})+b)^2}e^{-a\gamma|\xi|}\left[1+\frac{1}{\xi\gamma}\right],$$

$$\bar{x}\in(x_1,x_2)\quad \forall\,\xi\in R^1,\quad t\in[0,T], \tag{24}$$

$$B(x,\xi_1,t)-B(x,\xi_2,t) = (\xi_1-\xi_2)\left[m_6\left(x,\bar{\xi},t\right)+\frac{1}{\bar{\xi}\gamma}\right]B\left(x,\bar{\xi},t\right),$$

$$\bar{\xi}\in(\xi_1,\xi_2),\quad \forall\,x\in R^1,\quad t\in[0,T], \tag{25}$$

$$B(x,\xi,t_1)-B(x,\xi,t_2) = \frac{(t_1-t_2)m_7(x,\xi,\bar{t})}{\bar{t}}B(x,\xi,\bar{t}),$$

$$\forall\,(x,\xi)\in R^2,\quad \bar{t}\in(t_1,t_2), \tag{26}$$

где $m_i(x,\xi,t)$, $i=\overline{5,7}$, *— ограниченные и непрерывные функции по совокупности переменных вместе со своими производными первого порядка по* x,ξ;

$$4)\quad \left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\xi\,[B(x_1,\xi,t)-B(x_2,\xi,t)]\right| \le m_8|x_1-x_2|, \tag{27}$$

$$\left|\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\xi\left[\frac{B(x,\xi,t_1)}{t_1}-\frac{B(x,\xi,t_2)}{t_2}\right]\right| \le \frac{|t_1-t_2|m_9}{\bar{t}^2\left[q^2(\bar{t},x)+b^2\right]}\quad \forall\,x\in R^1,\ \bar{t}\in(t_1,t_2), \tag{28}$$

$$\left|\int\limits_0^{+\infty}\frac{dt}{t}[B(x,\xi_1,t)-B(x,\xi_2,t)]\right| \le \frac{|\xi_1-\xi_2|m_{10}}{\bar{\xi}^2}e^{-a\gamma|\bar{\xi}|}$$

$$\forall\,x\in R^1,\quad \bar{\xi}\in(\xi_1,\xi_2), \tag{29}$$

где m_i, $i=\overline{8,10}$, *— положительные постоянные.*

Доказательство леммы проведем для случая $\xi>0$ (в случае $\xi<0$ рассуждения аналогичны). Поскольку функция $(L(-i\mu)/L(-i\mu+iy+1))e^{i\gamma\xi\mu}$, как это следует из представления (9) функции $L(p)$ и ее свойств (см. (16), (17)), аналитична при $-(\gamma+3)/\gamma<\operatorname{Im}\mu<(\gamma+1)/\gamma$, за исключением точек $\operatorname{Im}\mu=0$, $-1,\ldots$, и убывает при $|\operatorname{Re}\mu|\to\infty$, то справедливо следующее соотношение:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{-i\mu L(-i\mu)}{L(-i\mu+iy+1)}e^{i\gamma\xi\mu}d\mu_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{(-i\mu_1+a)L(-i\mu_1+a)}{L(-i\mu_1+iy+a+1)}e^{i\gamma\xi\mu_1-\gamma\xi a}d\mu_1.$$

Обозначим $k=y-\mu$, $k=k_1+ik_2$, тогда для функции $B(x,\xi,t)$ справедливо представление

$$B(x,\xi,t) = e^{-a\gamma\xi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\frac{(a+i(k_1-y))L(a+i(k_1-y))}{L(ik_1+a+1)}e^{-i\gamma\xi k_1}\frac{e^{-iyq(t,x)}}{\Gamma(-iy)\sin\pi iy} \equiv$$

$$\equiv e^{-a\gamma\xi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dk_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\exp\{-iyq(t,x)-b|y|\}\Phi(y,y-k_1,\xi),$$

$$\Phi(y,y-k_1,\xi) = \frac{(a+i(k_1-y))L(a+i(k_1-y))}{L(ik_1+a+1)}\frac{e^{b|y|-i\gamma\xi k_1}}{\Gamma(-iy)\sin\pi iy},$$

где постоянная b выбирается из интервала $\left(0,-\operatorname{arctg}\left(h^{-1}\right)\right)$, и при таком выборе b функции $\Phi(y, y-k_1, \xi)$, $\Phi_y(y, y-k_1, \xi)$ экспоненциально убывают по y при $|y| \to \infty$. Интегрируя по частям дважды относительно y, получаем

$$B(x, \xi, t)e^{a\gamma\xi} = \frac{2b}{b^2+q^2(t,x)} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \Phi(0, -k_1, \xi) +$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \left[\frac{1}{[b+iq(t,x)]^2} \Phi_y(y, y-k_1, \xi)\Big|_{y=+0} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{[b-iq(t,x)]^2} \Phi_y(y, y-k_1, \xi)\Big|_{y=-0} \right] +$$

$$+ \frac{1}{[b-iq(t,x)]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{0} dy\, e^{-iyq(t,x)+by} \Phi_{yy}(y, y-k_1, \xi) +$$

$$+ \frac{1}{[b+iq(t,x)]^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_1 \int_{0}^{+\infty} dy\, e^{-iyq(t,x)-by} \Phi_{yy}(y, y-k_1, \xi) \equiv \sum_{i=1}^{4} B_i(x, \xi, t). \qquad (30)$$

При доказательстве представления (20) здесь ограничимся рассмотрением слагаемого $B_4(x, \xi, t)$, поскольку остальные слагаемые в (30) изучаются аналогично. В связи с тем, что подынтегральная функция в выражении для $B_4(x, \xi, t)$ имеет различное асимптотическое поведение в различных подобластях области интегрирования, в дальнейшем удобно использовать следующее разбиение полуплоскости $(y, k_1)_+ = \left\{(y, k_1)\colon y > 0, k_1 \in R^1\right\}$:

$$\begin{aligned}
G_1 &= \{(y, k_1): y \in (0, 2M),\ k_1 \ge 3M\}, \\
G_2 &= \{(y, k_1): y \ge 2M,\ k_1 \ge y + M\}, \\
G_3 &= \{(y, k_1): y \ge 2M,\ y - M < k_1 \le y + M\}, \\
G_4 &= \{(y, k_1): y \ge 2M,\ M < k_1 \le y - M\}, \\
G_5 &= \{(y, k_1): y \ge 2M,\ -M < k_1 \le M\}, \\
G_6 &= \{(y, k_1): y \ge 2M,\ k_1 \le -M\}, \\
G_7 &= \{(y, k_1): y \in (0, 2M),\ k_1 \le -3M\}, \\
G_8 &= \{(y, k_1): y \in (0, 2M),\ -3M < k_1 < 3M\}.
\end{aligned} \qquad (31)$$

В разбиении (31) число $M > 0$ выберем настолько большим, чтобы в указанных областях можно было бы воспользоваться асимптотическими разложениями соответствующих функций. Исходя из разбиения (31), представляем функцию $B_4(x, \xi, t)$ в виде

$$B_4(x, \xi, t) = \frac{1}{[b+iq(t,x)]^2} \sum_{i=1}^{8} D_i(x, \xi, t). \qquad (32)$$

Использовав (16), (17), выпишем главные члены асимптотик следующих функций при $m \to \infty$, $\operatorname{Im} m = 0$:

$$\Gamma(im+d)\sin\pi(im+d) \sim b_1(\operatorname{sign} m)\exp\left\{im\ln|m| + |m|\frac{\pi}{2} - (im+d)\right\}|m|^{d-\frac{1}{2}},$$

$$(33)$$

$$L(im+d) \sim b_2(\operatorname{sign} m)\exp\left\{im\ln|m| - |m|\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctgh}\frac{1}{h}\right) + im\ln|h+i|\right\}|m|^{d-\frac{1}{2}},$$

где d — некоторое вещественное число и

$$b_1(\operatorname{sign} m) = -\frac{\operatorname{sign} m}{2i} \exp\left\{-i\left(d+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\operatorname{sign} m\right\},$$

$$b_2(\operatorname{sign} m) = -\frac{\operatorname{sign} m}{2i} \exp\left\{i\left(d-\frac{1}{2}\right)\ln|h+i| + \right.$$

$$\left. + \; i\left(d-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\pi + \operatorname{arctgh}\frac{1}{h}\right)\operatorname{sign} m - i\pi\left(d+\frac{\beta}{\theta}\right)\operatorname{sign} m\right\}. \tag{34}$$

Проиллюстрируем получение представлений для слагаемых $D_i(x, \xi, t)$, $i = \overline{1, 8}$, в сумме (32) на примере функции

$$D_2(x, \xi, t) = \int\limits_{2M}^{+\infty} dy \int\limits_{y+M}^{+\infty} dk_1 \exp\{-iyq(t, x) - by\}\Phi_{yy}(y, y-k_1, \xi). \tag{35}$$

Используя асимптотические выражения (33), нетрудно показать, что при $(y, k_1) \in G_2$, т. е. $k_1 \geq 3M$, $k_1 - y \geq M$, для функции $\Phi_{yy}(y, y-k_1, \xi)$ справедливо следующее асимптотическое представление:

$$\Phi_{yy}(y, y-k_1, \xi) = c\exp\left\{iy\ln\frac{y}{|h+i|} + y\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{h} + b\right)\right\} \times$$

$$\times \; y^{1/2}(k_1-y)^{a+1/2}k_1^{-a-1/2}\exp\{i(k_1-y)\ln(k_1-y) - ik_1\ln k_1 - ik_1\gamma\xi\} \times$$

$$\times \; [1 + \ln y + O(1/k_1) + O(1/(k_1+y))], \tag{36}$$

где постоянная c определяется функциями типа (34). Пусть

$$I(x, \xi, t) = \int\limits_{2M}^{+\infty} dy \exp\left\{-iyq(t, x) + iy\ln\frac{y}{|h+i|} + y\operatorname{arctg}\frac{1}{h}\right\} y^{1/2}[1+\ln y] \times$$

$$\times \int\limits_{y+M}^{\infty} dk_1\, k_1^{-a-1/2}(k_1-y)^{a+1/2}\exp\{i(k_1-y)\ln(k_1-y) - ik_1\ln k_1 - ik_1\gamma\xi\}, \tag{37}$$

т. е. главная часть интеграла в (35), полученная по старшему члену асимптотики (36). Во внутреннем интеграле в (37) сделаем замену переменных $k_1 = yz$ и получим

$$N(y, \xi) = ye^{-iy\ln y}\int\limits_{1+M/y}^{+\infty} dz\left(1-\frac{1}{z}\right)^{a+1/2}\exp(iy[(z-1)\ln(z-1) - z\ln z] - i\gamma y\xi z).$$

Поведение функции $N(y, \xi)$ в своей главной части определяется свойствами функции

$$K(y, \xi) = ye^{-iy\ln y}\int\limits_{1}^{+\infty} dz\exp\{iy[(z-1)\ln(z-1) - z\ln z] - i\gamma y\xi z\} = (z-1 = \nu) =$$

$$= ye^{-iy\ln y}\int\limits_{0}^{+\infty} d\nu\exp\{iy[\nu\ln\nu - (\nu+1)\ln(\nu+1)] - i\gamma y\nu\xi - iy\gamma\xi\}.$$

Введем обозначения

$$\nu\xi\gamma = u, \quad p = \gamma\xi, \quad H\left(\frac{u}{p}\right) = \frac{u}{p}\ln\frac{u}{p} - \left(\frac{u}{p}+1\right)\ln\left(\frac{u}{p}+1\right)$$

(заметим, что сейчас рассматривается случай $\xi > 0$, следовательно, $p > 0$). Тогда

$$K(y,\xi) = \frac{ye^{-iy(\ln y+p)}}{p}\int_0^\infty du\exp\left\{iyH\left(\frac{u}{p}\right)-iu\right\} =$$

$$= \frac{ye^{-iy(\ln y+p)}}{p}\left[\int_0^\infty du\cos u\exp\left\{iyH\left(\frac{u}{p}\right)\right\}-i\int_0^\infty du\sin u\exp\left\{iyH\left(\frac{u}{p}\right)\right\}\right]. \qquad (38)$$

Первый интеграл в правой части (38) найдем как $\lim\limits_{\delta\to 0}\int_0^\infty du\left(e^{iyH(u/p)}/u^\delta\right)\cos u$. Интегрирование по частям и разбиение интеграла на сумму двух интегралов приводит к равенству

$$\int_0^\infty du\frac{e^{iyH(u/p)}}{u^\delta}\cos u = \int_0^{\pi/2} du\frac{e^{iyH(u/p)}}{u^{1+\delta}}\left[\delta-iyuH_u\left(\frac{u}{p}\right)\right]\sin u +$$

$$+ \int_{\pi/2}^\infty du\frac{e^{iyH(u/p)}}{u^{2+\delta}}\cos u\left[y^2u^2H_u^2\left(\frac{u}{p}\right)+2i\delta yuH_u\left(\frac{u}{p}\right)-iyu^2H_{uu}\left(\frac{u}{p}\right)-\delta(\delta+1)\right]. \qquad (39)$$

Поскольку функции

$$uH_u\left(\frac{u}{p}\right) = -\frac{u}{p}\ln\left(1+\frac{p}{u}\right), \qquad u^2H_{uu}\left(\frac{u}{p}\right) = \frac{u}{u+p}$$

ограничены при всех $u/p>0$, то в (39) возможен предельный переход по $\delta\to$ $\to 0$. Таким образом, имеем

$$\int_0^\infty du\, e^{iyH(u/p)}\cos u = d_1(y), \qquad d_1(y) = O\left(y^2\right),$$

$d_1(y)$ — регулярная по y функция. Аналогичные рассуждения дают возможность получить подобное соотношение и для второго интеграла в правой части (38). Возвращаясь к $N(y,\xi)$ получаем

$$N(y,\xi) = d_2(y)\exp\{-iy(\ln y+\gamma\xi)\}\left[\frac{1}{\xi\gamma}+1\right], \qquad (40)$$

где $d_2(y)$ — регулярная функция не более, чем степенного роста. Исходя из (40), для функции $I(x,\xi,t)$ в (37) имеем

$$I(x,\xi,t) = \int_{2M}^{+\infty} dy\exp\left\{-iyq(t,x)-iy\ln|h+i|-iy\xi\gamma+y\operatorname{arctg}\frac{1}{h}\right\}\times$$

$$\times\ d_2(y)y^{1/2}[1+\ln y]\left[1+\frac{1}{\gamma\xi}\right] \equiv \left[1+\frac{1}{\gamma\xi}\right]I_1(x,\xi,t). \qquad (41)$$

Нетрудно видеть, что интеграл $I_1(x,\xi,t)$ является абсолютно сходящимся, и именно интегралы такого типа будут определять гладкость функции $m(x,\xi,t)$ в (20). Легко показать, что $I_1(x,\xi,t)$, I_{1x}, $I_{1\xi}$ — ограниченные и непрерывные функции своих переменных, а $|I_{1t}|\le c_1/t$, здесь c_1 — положительная постоянная. Возвращаясь к функции $D_2(x,\xi,t)$, заметим, что учет младших членов в асимптотическом разложении (36) не приводит к дополнительным трудностям, и в результате получим

$$D_2(x,\xi,t) = \left[1+\frac{1}{\gamma\xi}\right]I_2(x,\xi,t),$$

где функция $I_2(x,\xi,t)$ имеет такую же гладкость, как и $I_1(x,\xi,t)$. В итоге получаем представление

$$B_4(x, \xi, t) = \left[1 + \frac{1}{\gamma\xi}\right] \frac{\overline{m}(x, \xi, t)}{(b + iq(t, x))^2}, \tag{42}$$

где $\overline{m}(x, \xi, t)$ имеет такие же свойства, как и функция $I_1(x, \xi, t)$. Возвращаясь к выражению для функции $B(x, \xi, t)$ и используя представления типа (42), получаем (20).

Оценки (21)–(23) следуют из представления (20) и свойств регулярности функции $m(x, \xi, t)$ Применение теоремы о среднем и представления (20) дает возможность получить соотношения (24)–(26), интегрирование которых по соответствующим переменным приводит к оценкам (27)–(29). Это и завершает доказательство леммы 1.

Лемма 2. *Пусть* $s(x, t) \in C^{\alpha, \beta, \alpha}(D_T)$, *тогда функция* $c(x, t) \in C^{\alpha, \beta, \alpha}(D_T)$ *и выполнено неравенство*

$$\langle c \rangle_{x, D_T}^{(\alpha)} + \langle c \rangle_{t, D_T}^{(\beta)} + [c]_{D_T}^{(\alpha, \beta)} \leq a \| s \|_{C^{\alpha, \beta, \alpha}(D_T)}. \tag{43}$$

Доказательство леммы 2 сводится к получению оценок

$$\langle c \rangle_{x, D_T}^{(\alpha)} \leq a_1 \left[\langle s \rangle_{x, D_T}^{(\alpha)} + \max_{x, t \in D_t} |s| \right],$$

$$\langle c \rangle_{t, D_T}^{(\beta)} + [c]_{D_T}^{(\alpha, \beta)} \leq a_2 \left[\langle s \rangle_{t, D_T}^{(\beta)} + [s]_{D_T}^{(\alpha, \beta)} \right],$$

причем первое из этих неравенств является аналогом оценки потенциала двойного слоя для эллиптической краевой задачи (см., например, [8], гл. 3). Что касается второго неравенства, то оно является следствием представления функции $c(x, t)$ и наличия полунорм вида (3) в определении пространств $C^{\alpha, \beta, \alpha}$, при этом техника получения этой оценки основана на методах из [12] (гл. 4).

Вторая производная функции $b(x_1, t)$ из (15) оценивается по той же схеме, что и функция $c(x, t)$. Поэтому следствием оценки (43) является неравенство

$$\left\langle w_{2x_1x_1} \right\rangle_{x, D_T}^{(\alpha)} + \left\langle w_{2x_1x_1} \right\rangle_{t, D_T}^{(\beta)} + \left[w_{2x_1x_1} \right]_{D_T}^{(\alpha, \beta)} \leq c \| \psi \|_{C^{1+\alpha, \beta, \alpha}(\overline{D}_T)}. \tag{44}$$

Отметим, что из оценки $\left\langle w_{2x_1x_1} \right\rangle_{t, D_T}^{(\beta)}$ можно получить оценку $\max_{x, t \in D_T} \left| w_{2x_1x_1} \right|$, оценки же младших полунорм функции $w_2(x_1, -\omega/2, t)$ получаются так же, как и оценка (44). На основании этого получим следующий результат для функции $w_2(x_1, -\omega/2, t)$.

Лемма 3. *Пусть функция* $\psi(x, t) \in C^{1+\alpha, \beta, \alpha}(\overline{D}_T)$, *тогда граничное значение решения задачи* (14) $w_2(x_1, -\omega/2, t) \in C^{2+\alpha, \beta, \alpha}(\overline{D}_T)$, *и для него справедлива оценка*

$$\| w_2 \|_{C^{2+\alpha, \beta, \alpha}(\overline{D}_T)} \leq c_1 \| \psi \|_{C^{1+\alpha, \beta, \alpha}(\overline{D}_T)}. \tag{45}$$

Из неравенства (45) и результатов гл. 3 из [8] следует, что для любого $t \in [0, T]$

$$\| w_2 \|_{C^{2+\alpha}(\overline{B})} \leq c_2 \| \psi \|_{C^{1+\alpha}(\overline{D})},$$

или, обращаясь к определению функции $\psi(x_1, t)$ в задаче (14), имеем

$$\| w_2 \|_{C^{2+\alpha}(\overline{B})} \leq c_3 \left[\| \varphi \|_{C^{1+\alpha}(\overline{D})} + \| w_2 \|_{C^{1+\alpha}(\overline{D})} + \left\| w_{1x_2} \right\|_{C^{1+\alpha}(\overline{D})} \right]. \tag{46}$$

Решение задачи (13) имеет оценку

$$\|w_1\|_{C^{2+\alpha}(\overline{B})} \le c_4 \|w_2\|_{C^{1+\alpha}(\overline{B})}, \quad t \in [0, T], \tag{47}$$

что следует из [10], гл. 6, § 4. Применяя интерполяционное неравенство и замечание 1, из (46), (47) получаем

$$\|w\|_{C^{2+\alpha}(\overline{B})} \le c_5 \|\varphi\|_{C^{1+\alpha}(\overline{D})}.$$

Наконец, используя уравнение в (12) для оценки разностей вида $w(x, t_1) - w(x, t_2)$, $w(x_1, t_1) - w(x_2, t_1) - w(x_1, t_2) + w(x_2, t_2)$, получаем необходимые оценки для функции $w(x, t)$ в пространстве $C^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{B}_T)$:

$$\|w\|_{C^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{B}_T)} \le c_5 \|\varphi\|_{C^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{D}_T)}. \tag{48}$$

Из граничного условия в (12) и оценки (48) следует включение $e^{\gamma x_1} w_t \in C^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{D}_T)$ и оценка

$$\left\|e^{\gamma x_1} w_t\right\|_{C^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{D}_T)} \le c_6 \|\varphi\|_{C^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{D}_T)}. \tag{49}$$

Переходя в оценках (48), (49) к функциям $u(r, \phi, t)$ и $f(r, t)$, получаем оценку (4) и включение

$$u(r, \phi, t) \in E_{1+\aleph}^{2+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{G}_T), \qquad r^{-(\gamma+1)} u_t \in E_{\aleph}^{1+\alpha,\beta,\alpha}(\overline{g}_T),$$

что и доказывает теорему 1.

1. *Базалий Б. В.* Об одном доказательстве классической разрешимости задачи Hele – Shaw со свободной границей // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1452–1462.
2. *Escher I., Simonett G.* Classical solutions for Hele – Shaw model with surface tension // Adv. Different. Equat. – 1997. – **2**, № 4. – P. 619–642.
3. *Prokert G.* Existence results for Hele – Shaw flow driven by surface tension // Eur. J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 195–221.
4. *King I. R., Lacey A. A., Vazquez I. L.* Persistance of corners in free boundaries in Hele – Shaw flow // Ibid. – 1995. – **6**. – P. 445–490.
5. *Солонников В. А., Фролова Е. В.* Исследование задачи для уравнения Лапласа с краевым условием специального вида в плоском угле // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1990. – **182**. – С. 149–167.
6. *Солонников В. А., Фролова Е. В.* О задаче с третьим краевым условием для уравнения Лапласа в плоском угле и ее применении к параболическим задачам // Алгебра и анализ. – 1990. – **2**, № 4. – С. 213–241.
7. *Базалий Б. В.* Модельная задача Hele – Shaw в прямом угле // Допов. НАН України. – 1999. – № 11. – С. 7–12.
8. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1973. – 576 с.
9. *Солонников В. А.* О разрешимости второй начально-краевой задачи для линейной нестационарной системы уравнений Навье – Стокса // Зап. научн. сем. ЛОМИ. – 1977. – **69**. – С. 200–218.
10. *Grisvard P.* Elliptic problems in nonsmooth domains. – Pitman, 1985. – 600 p.
11. *Bazaliy B. V., Vasyl'eva N. V.* Estimates of solutions of Hele – Shaw model problems in nonsmooth domains. – 1999. – 21 p. – (Preprint / Donetsk Inst. App. Math. and Mech. NAS Ukraine; № 99. 05).
12. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.

Получено 17.07.2000