УДК 517.956.4
С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник (Чернівец. ун-т)

ПРО ЗАДАЧУ КОШІ ДЛЯ $\overrightarrow{2b}$-ПАРАБОЛІЧНИХ СИСТЕМ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

For $\overrightarrow{2b}$-parabolic dissipative systems and systems with growing coefficients as $|x| \to \infty$, in the presence of degenerations in the initial hyperplane, we investigate the fundamental matrix of solutions and the solvability of the Cauchy problem.

Для $\overrightarrow{2b}$-параболічних дисипативних систем і систем зі зростаючими при $|x| \to \infty$ коефіцієнтами при наявності вироджень на початковій гіперплощині досліджено фундаментальну матрицю розв'язків і розв'язність задачі Коші.

При дослідженні коректної розв'язності та властивостей розв'язків задачі Коші важливу роль, як відомо, відіграє фундаментальна матриця розв'язків (ф. м. р.). Повнота результатів такого дослідження залежить від того, наскільки глибоко вивчені властивості ф. м. р. Найкращі результати в цьому напрямку на даний час одержані для рівномірно параболічних за Петровським [1, 2] і $\overrightarrow{2b}$-параболічних [3 – 5] систем з обмеженими гельдеровими коефіцієнтами. Відомими є також певні результати про ф. м. р. і її застосування для параболічних за Петровським систем з коефіцієнтами, які прямують до нескінченності при $|x| \to \infty$ (зі зростаючими коефіцієнтами) [1, 6 – 9].

В роботах [1, 7] введено поняття дисипативності системи. Для дисипативних параболічних за Петровським систем побудовано й досліджено ф. м. р. задачі Коші. Якщо параболічна система не є дисипативною, а її коефіцієнти в молодших членах відповідним чином зростають при $|x| \to \infty$, то її можна звести до дисипативної системи і, отже, для такої системи можна побудувати ф. м. р. задачі Коші.

Для дисипативних систем в [1, 7 – 9] використовуються два набори умов на коефіцієнти системи і так звану характеристику дисипації. Перший набір містить досить жорсткі обмеження на гладкість коефіцієнтів, але в ньому немає додаткових умов на характеристику дисипації. У другому ставляться мінімальні вимоги щодо гладкості коефіцієнтів, але характеристика дисипації підпорядкована певним додатковим умовам.

Для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем поняття дисипативності і теореми про існування та оцінки ф. м. р. задачі Коші наведені в [10 – 13], причому в [10, 12] використовується перший набір умов на коефіцієнти і характеристику дисипації, а в [10, 11, 13] — другий. Зазначимо, що в [10, 11, 13] розглядаються дисипативні $\overrightarrow{2b}$-параболічні системи при наявності певних вироджень на початковій гіперплощині.

У цій статті наводяться результати дослідження ф. м. р. і розв'язності задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з першим набором умов на коефіцієнти і характеристику дисипації, а також $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем, коефіцієнти групи молодших членів яких відповідним чином зростають при $|x| \to \infty$. Припускається, що в системах наявні деякі виродження на початковій гіперплощині.

1. Позначення і припущення. Скористаємось такими позначеннями: n, N, $b_1, \ldots, b_n$ — задані натуральні числа; $\overrightarrow{2b} \equiv (2b_1, \ldots, 2b_n)$; s — найменше спільне кратне чисел $b_1, \ldots, b_n$; $m_j \equiv s / b_j$, $q_j \equiv 2b_j / (2b_j - 1)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $q' \equiv \min_{1 \le j \le n} q_j$, $q'' \equiv \max_{1 \le j \le n} q_j$; $M \equiv \sum_{j=1}^{n} m_j$; $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів; $\mathbb{C}_N$ — сукупність усіх стовпців висоти N, елементами яких є комплексні числа; $\|k\| = \sum_{j=1}^{n} m_j k_j$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$; $x_1, \ldots, x_n$ — координати точки $x \in \mathbb{R}^n$;

$$p(x, y) \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} \left| x_j - y_j \right|^{2/m_j} \right)^{1/2}, \quad q(x, y) \equiv \left(\sum_{j=1}^{n} \left| x_j - y_j \right|^{q_j} \right)^{1/q''}$$

— спеціальні відстані між точками x і y з $\mathbb{R}^n$; T — задане додатне число; $\Pi_H \equiv \left\{ (t, x) \,\middle|\, t \in H,\ x \in \mathbb{R}^n \right\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; $K_R(y) \equiv \left\{ x \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, q(x, y) \le R \right\}$, якщо $y \in \mathbb{R}^n$; $K_R \equiv K_R(0)$; $\alpha : [0, T] \to [\,0, \infty)$, $\beta : [0, T] \to [\,0, \infty)$ — неперервні функції, для яких $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$ при $t \in (\,0, T]$ і $\alpha(0)\beta(0) = 0$;

$$B(t, \tau) \equiv \int_{\tau}^{t} \frac{\beta(\theta)}{\alpha(\theta)} d\theta, \quad E^d(t, \tau) \equiv \exp\{dB(t, \tau)\},$$

$$E_c(t, \tau, x) \equiv \exp\left\{ -c \sum_{j=1}^{n} (B(t, \tau))^{1-q_j} \left| x_j \right|^{q_j} \right\},$$

$$E_c^d(t, \tau, x) \equiv E_c(t, \tau, x) E^d(t, \tau), \quad 0 < \tau < t \le T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad c > 0, \quad d \in \mathbb{R};$$

I — одинична матриця порядку N; i — уявна одиниця.

Розглянемо систему N рівнянь вигляду

$$L(t, x, \partial_t, \partial_x) u(t, x) \equiv$$

$$\equiv \left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{\|k\| \le 2s} a_k(t, x) \partial_x^k \right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \tag{1}$$

і відповідну їй систему без виродження

$$\left(I \partial_t - \sum_{\|k\| \le 2s} a_k(t, x) \partial_x^k \right) u(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \tag{2}$$

де a_k, $\|k\| \le 2s$, — квадратні матриці порядку N.

Припустимо, що виконуються наступні умови.

α_1. Система (2) є дисипативною $\overrightarrow{2b}$-параболічною в $\Pi_{[0, T]}$ системою з характеристикою дисипації D. Згідно з [10 – 13], це означає, що існує неперервна функція $D : \mathbb{R}^n \to [\,1, \infty)$ з такими властивостями: $D(x) \to \infty$ при $|x| \to \infty$; функції $b_k(t, x) \equiv a_k(t, x)(D(x))^{\|k\| - 2s}$, $(t, x) \in \Pi_{[0, T]}$, $\|k\| \le 2s$, обмежені; p-корені рівняння

$$\det\left(Ip - \sum_{\|k\| + k_{n+1} = 2s} b_k(t, x)(i\sigma)^k \mu^{k_{n+1}} \right) = 0 \tag{3}$$

задовольняють нерівність

$$\operatorname{Re} p(t, x, \sigma, \mu) \le -\delta \left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^{2b_j} + \mu^{2s} \right) \tag{4}$$

з деякою сталою $\delta > 0$ для всіх $(t, x) \in \Pi_{[0, T]}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$ і $\mu \in \mathbb{R}$.

α_2. Коефіцієнти a_k, $\|k\| \le 2s$, системи (1) мають неперервні похідні $\partial_x^l a_k$, $\|l\| \le 2s$, для яких справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^l a_k(t,x)\right| \le C(D(x))^{2s-\|k\|+\|l\|(1-\varepsilon)}, \qquad (t,x)\in \Pi_{[0,T]},$$

де $C>0$, $\varepsilon\in(0,1)$; b_k, $\|k\|\le 2s$, як функції t, є неперервними рівномірно щодо $x\in\mathbb{R}^n$.

α_3. Похідні $\partial_x^l a_k$, $\|k\| \le 2s$, $\|l\| \le 2s$, задовольняють локальну умову Гельдера по x з показником $\lambda\in(0,1)$ відносно відстані p рівномірно щодо $t\in$ $\in[0,T]$.

Нехай $g:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ — функція, яка задовольняє наступну умову.

α_4. $g(x)\to\infty$ при $|x|\to\infty$; існують локально неперервні за Гельдером похідні $\partial_x^k g$, $0<\|k\|\le 4s$, які пов'язані з характеристикою дисипації D умовою і

$$\left|\partial_x^k g(x)\right| \le C\eta(D(x))^{\|k\|(1-\varepsilon)}, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \qquad 0<\|k\|\le 4s,$$

де $C>0$, $\varepsilon\in(0,1)$, η — досить мале додатне число.

Розглянемо також систему (1) за інших умов. Нехай $b\equiv\max_{1\le j\le n} b_j$, $\delta_0\in$ $\in(0,1)$ і функція $\eta_0\in C^{4b}(\mathbb{R})$ така, що $\eta_0(r)\equiv|r|$ при $|r|\ge 1+\delta_0$, $\eta_0(r)\equiv 1$ при $|r|\le 1-\delta_0$ і $\left|\eta_0^{(k)}(r)\right|\le C$, $r\in\mathbb{R}$, $1\le k\le 4b$. Розглянемо функцію

$$D(x)\equiv\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\eta_0(x_j)\right)^{q_j}\right)^{(1-\varepsilon_0)/(2s)}, \qquad x\in\mathbb{R}^n, \tag{5}$$

і за умови $B(T,0)<\infty$ функцію

$$g(t,x)\equiv a\left(1-(Aa)^{2s-1}B(t,0)\right)^{-1/(2s-1)}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\eta_0(x_j)\right)^{q_j}\right)^{1-\varepsilon_0}, \quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]}, \tag{6}$$

де $\varepsilon_0\in(0,1)$, A — досить велике додатне число, а число $a>0$ таке, що справджується нерівність $B(T,0)\le\dfrac{1}{2}(Aa)^{1-2s}$.

Крім умов α_1–α_3, будемо використовувати наступний набір умов з функцією D, визначеною в (5).

β_1. Функції $b_k(t,x)\equiv a_k(t,x)(D(x))^{\|k\|-2s}$, $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$, $\|k\|\le 2s$, обмежені й система (2) рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічна в $\Pi_{[0,T]}$, тобто існує така стала $\delta>0$, що при довільних $(t,x)\in\Pi_{[0,T]}$ і $\sigma\in\mathbb{R}^n$ для p-коренів рівняння

$$\det\left(Ip-\sum_{\|k\|=2s}a_k(t,x)(i\sigma)^k\right)=0 \tag{7}$$

справджується нерівність

$$\operatorname{Re}p(t,x,\sigma)\le-\delta\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^{2b_j}. \tag{8}$$

β_2. Виконуються умови α_2 і α_3.

β_3. Має місце слабке виродження, тобто $B(T,0)<\infty$.

β_4. Для системи (2) існує спряжена за Лагранжем система, для коефіцієнтів якої виконується умова β_2.

***Зауваження* 1.** Нехай виконуються умови $\beta_1 - \beta_3$. Тоді за допомогою заміни

$$u(t,x) = e^{g(t,x)} v(t,x), \qquad (t,x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{9}$$

де g — функція з (6), система (1) зводиться до дисипативної $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи для v, яка задовольняє умови $\alpha_1 - \alpha_3$ з визначеною в (5) функцією D.

Справді, в результаті заміни (9) одержимо систему

$$\Bigg(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \Bigg(\sum_{\|k\| \le 2s} a_k(t,x) \partial_x^k + \sum_{\|k\| < 2s} \; \sum_{l > k, \|l\| \le 2s} C_l^k a_l(t,x) \times$$

$$\times\, e^{-g(t,x)} \partial_x^{l-k} e^{g(t,x)} \partial_x^k - \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \partial_t g(t,x) I \Bigg) \Bigg) v(t,x) = 0, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}. \tag{10}$$

Властивості коефіцієнтів цієї системи, які містяться в умовах $\alpha_1 - \alpha_3$, випливають з умов $\beta_1 - \beta_3$ і нерівностей

$$\left| \partial_x^k g(t,x) \right| \le C_1 (D(x))^{\|k\|(1-\varepsilon)}, \qquad 0 < \|k\| \le 4s, \tag{11}$$

$$C_2 A^{2s-1} a^{2s} \le \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} (D(x))^{-2s} \partial_t g(t,x) \le C_3 A^{2s-1} a^{2s}, \tag{12}$$

$$\left| \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} \partial_t \partial_x^l g(t,x) \right| \le C_4 A^{2s-1} a^{2s} (D(x))^{\|l\|(1-\varepsilon)}, \qquad 0 < \|l\| \le 2s, \tag{13}$$

$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}.$$

Щоб переконатися, що відповідна системі (10) система без виродження є дисипативною, розглянемо для неї характеристичне рівняння (3)

$$\det \Bigg(I \left(p + \frac{\alpha(t)}{\beta(t)} (D(x))^{-2s} \partial_t g(t,x) \mu^{2s} \right) -$$

$$- \sum_{\|k\| + k_{n+1} = 2s} b_k(t,x) (i\sigma)^k \mu^{k_{n+1}} - \sum_{\|k\| + k_{n+1} = 2s} \; \sum_{\substack{l > k, \\ \|l\| \le 2s}} C_l^k b_l(t,x) e^{-g(t,x)} \times$$

$$\times\, \partial_x^{l-k} e^{g(t,x)} (D(x))^{\|k\| - \|l\|} (i\sigma)^k \mu^{k_{n+1}} \Bigg) = 0.$$

На підставі (11) – (13) та умови β_1 коефіцієнти цього рівняння є обмеженими функціями від t, x, і при $\mu = 0$ воно збігається з рівнянням (7), для p-коренів якого справджується нерівність (8). Тому, щоб довести правильність нерівності (4), досить переконатися, що $\operatorname{Re} p(t,x,\sigma,\mu) \ne 0$ для всіх $(t,x) \in \Pi_{(0,T]}$, $\sigma \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$. Це можна здійснити на підставі (12) за рахунок вибору досить великого A.

***Зауваження* 2.** Від часової змінної $t \in (0, T]$ у системі (1) можна перейти до нової змінної τ за допомогою заміни $\tau = -B(T,t)$. При цьому величина τ змінюватиметься на інтервалі $(-B(T,0), 0]$, який у випадку сильного виродження, тобто $B(T,0) = \infty$, є необмеженим. Отже, система (1) зведеться до системи без виродження, яку потрібно розглядати, взагалі кажучи, в необмеженій відносно часової змінної області. Щоб залишати обмежений часовий інтервал і мати змогу використовувати відомі результати для систем з обмеженими коефіцієнтами, зазначену заміну здійснювати не будемо.

***Зауваження* 3.** Нехай виконується умова β_4. Розглянемо при $t_0 > 0$ диференціальний вираз

$$\left(L_0^* v\right)(t,x) \equiv -\partial_t v(t,x) - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{\|k\| \le 2s} (-\partial_x)^k \left(\overline{a}_k'(t,x) v(t,x)\right), \quad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}, \tag{14}$$

де штрих означає транспонування, а риска — комплексне спряження. Цей вираз є спряженим за Лагранжем з виразом

$$\left(L_0 u\right)(t,x) \equiv \left(I\partial_t - \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{\|k\| \le 2s} a_k(t,x) \partial_x^k\right) u(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[t_0,T]}. \tag{15}$$

Для виразів (14) і (15) справджується тотожність

$$\overline{v}' L_0 u - \left(\overline{L_0^* v}\right)' u = \partial_t(\overline{v}' u) + \frac{\beta(t)}{\alpha(t)} \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} B^j[v,u], \tag{16}$$

в якій $u : \Pi_{[t_0,T]} \to \mathbb{C}_N$ і $v : \Pi_{[t_0,T]} \to \mathbb{C}_N$ — довільні досить гладкі функції, а

$$B^j[v,u] \equiv -\sum_{0 < \|k\| \le 2s} \sum_{\nu_j = 0}^{k_j - 1} (-\partial_{x_1})^{k_1} \ldots (-\partial_{x_{j-1}})^{k_{j-1}} (-\partial_{x_j})^{\nu_j} (\overline{v}' a_k) \partial_{x_j}^{k_j - \nu_j} \partial_{x_{j+1}}^{k_{j+1}} \ldots \partial_{x_n}^{k_n} u,$$

$$j \in \{1, \ldots, n\},$$

де при $k_j = 0$ відповідна сума дорівнює нулеві.

2. Ф. м. р. задачі Коші. Оскільки система (1) при $t = 0$ вироджується, то не завжди для неї можна розглядати задачу Коші з початковими даними при $t = 0$ у звичайній постановці. Але можна говорити про ф. м. р. задачі Коші, тобто таку квадратну порядку N матрицю $Z(t,x;\tau,\xi)$, $0 < \tau < t \le T$, $\{x,\xi\} \subset \subset \mathbb{R}^n$, що за формулою

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}} Z(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(\tau,T]},$$

визначається розв'язок системи (1), який задовольняє умову $u(t,x)\big|_{t=\tau} = \varphi(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, для будь-якого $\tau \in (0,T]$ і довільної неперервної та обмеженої функції φ.

Одним з основних результатів цієї статті є наступна теорема, доведення якої наводиться в п. 4.

Теорема 1. 1. *Нехай виконуються умови* α_1–α_3, *тоді існує ф. м. р.* Z *задачі Коші для системи* (1), *для якої справджуються оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right| \le C(B(t,\tau))^{-(M+\|k\|)/(2s)} E_c^d(t,\tau,x-\xi),$$
$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \|k\| \le 2s, \tag{17}$$

а також оцінки

$$\left|\partial_x^k Z(t,x;\tau,\xi)\right| \le$$
$$\le C \sum_{l=0}^{\|k\|} (B(t,\tau))^{-(M+\|k\|-l)/(2s)} (D(x))^{l(1-\varepsilon)} E_c^d(t,\tau,x-\xi) \exp\{g(x) - g(\xi)\},$$
$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \|k\| \le 2s, \tag{18}$$

з будь-якою функцією g, *яка задовольняє умову* α_4. *В оцінках* (17) *і* (18) $C > 0$, $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$ *і* $\varepsilon \in (0, 1)$.

2. *Якщо виконуються умови* $\beta_1 - \beta_3$, *то для системи* (1) *існує ф. м. р.* Z *задачі Коші, для якої правильними є оцінки*

$$\left|\partial_x^k Z(t, x; \tau, \xi)\right| \le$$

$$\le C \sum_{l=0}^{\|k\|} (B(t, \tau))^{-(M + \|k\| - l)/(2s)} (D(x))^{l(1-\varepsilon)} E_c(t, \tau, x - \xi) \exp\{g(t, x) - g(\tau, \xi)\},$$

$$0 \le \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \|k\| \le 2s, \tag{19}$$

де $C > 0$, $c > 0$, D *і* g — *функції відповідно з* (5) *і* (6).

3. *Нехай додатково до умов* $\beta_1 - \beta_3$ *виконується умова* β_4. *Тоді для будь-якого* $t_0 \in (0, T)$ *існує ф. м. р.* $Z^*(\tau, \xi; t, x)$, $t_0 \le \tau < t \le T$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, *задачі Коші для спряженої системи*

$$(L_0^* v)(\tau, \xi) = 0, \quad (\tau, \xi) \in \Pi_{[t_0, T]},$$

де вираз $L_0^* v$ *визначений в* (14). *Для* Z^* *і* Z *справджуються рівності*

$$Z^*(\tau, \xi; t, x) = \overline{Z}'(t, x; \tau, \xi), \tag{20}$$

$$Z(t, \xi; \tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \gamma, y) Z(\gamma, y; \tau, \xi)\, dy, \quad 0 < \tau < \gamma < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{21}$$

***Зауваження* 4.** У випадку слабкого виродження в оцінках (17) і (18) функцію E_c^d можна замінити на E_c і брати $\tau = 0$.

3. Розв'язність задачі Коші та задачі без початкових умов. Сформульовані в п. 2 результати про ф. м. р. задачі Коші для системи (1) дають можливість дослідити для неоднорідних систем розв'язність задачі Коші у випадку слабкого виродження і задачі без початкових умов, коли виродження сильне. Наведемо деякі результати такого дослідження. Вони одержуються за допомогою належної модифікації досить складної методики вивчення властивостей інтегралів Пуассона та об'ємних потенціалів для параболічних за Петровським і $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з обмеженими коефіцієнтами (як без виродження, так і з виродженням на початковій гіперплощині) [1, 4, 5, 14 – 18], а також для параболічних за Петровським систем зі зростаючими коефіцієнтами [1, с. 277 – 286].

Означимо необхідні норми і простори. Нехай c_0, $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — задані числа такі, що $0 < c_0 < c$, $0 \le \gamma_j < c_0 T^{1-q_j}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, c — стала з оцінок (18) чи (19). Розглянемо функції

$$k_j(t) \equiv c_0 \gamma_j \left(c_0^{2b_j - 1} - (T - B(T, t)) \gamma_j^{2b_j - 1}\right)^{1 - q_j}, \ j \in \{1, \ldots, n\} \quad ;$$

$$k(t) \equiv (k_1(t), \ldots, k_n(t));$$

$$\Phi_\nu(t, x) \equiv \exp\left\{-\nu \sum_{j=1}^n k_j(t) \left|x_j\right|^{q_j}\right\};$$

$$\Psi_\nu(x) \equiv \exp\{-\nu g(x)\}, \quad \Psi_\nu(t, x) \equiv \exp\{-\nu g(t, x)\},$$

де $t \in [0, T]$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\nu \in \{-1, 1\}$, g — функція відповідно з оцінок (18) і (19).

Зауважимо, що кожна з функцій k_j, $j \in \{1, \ldots, n\}$, монотонно зростає і має таку властивість:

$$-c_0(B(t,\tau))^{1-q_j}|x-\xi|^{q_j} + k_j(\tau)|\xi|^{q_j} \le k_j(t)|x|^{q_j},$$

$$0<\tau<t\le T, \qquad \{x,\xi\} \subset \mathbb{R},$$

з якої випливає нерівність

$$E_{c_0}(t,\tau,x-\xi)\Phi_{-1}(\tau,\xi) \le \Phi_{-1}(t,x), \qquad 0<\tau<t\le T, \qquad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n. \tag{22}$$

Для вимірної по x при кожному фіксованому $t\in[0,T]$ функції $u\colon \Pi_{[0,T]} \to \mathbb{C}_N$ означимо норми

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t),g(\cdot)} \equiv \|u(t,\cdot)\Phi_1(t,\cdot)\Psi_1(\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$\|u(t,\cdot)\|_p^{k(t),g(t,\cdot)} \equiv \|u(t,\cdot)\Phi_1(t,\cdot)\Psi_1(t,\cdot)\|_{L_p(\mathbb{R}^n)},$$

$$1\le p\le\infty, \qquad t\in[0,T].$$

Позначимо через $L_p^{k(0),g(\cdot)}$ і $L_p^{k(0),g(0,\cdot)}$ простори всіх вимірних функцій $\varphi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}_N$, для яких скінченними є відповідно норми $\|\varphi\|_p^{k(0),g(\cdot)}$ і $\|\varphi\|_p^{k(0),g(0,\cdot)}$, а через $M^{k(0),g(\cdot)}$ і $M^{k(0),g(0,\cdot)}$ — простори всіх $\mathbb{C}_N$-значних узагальнених борельових мір μ, що задовольняють відповідно умови

$$\|\mu\|^{k(0),g(\cdot)} \equiv \int_{\mathbb{R}^n}\Phi_1(0,x)\Psi_1(x)\,d|\mu|(x) < \infty$$

і

$$\|\mu\|^{k(0),g(0,\cdot)} \equiv \int_{\mathbb{R}^n}\Phi_1(0,x)\Psi_1(0,x)\,d|\mu|(x) < \infty.$$

Використовуватимемо ще простори $L_1^{-k(T),-g(\cdot)}$ і $L_1^{-k(T),-g(T,\cdot)}$ вимірних функцій $\psi\colon\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}_N$, для яких скінченними є відповідно норми

$$\left\|\Phi_{-1}(T,\cdot)\Psi_{-1}(\cdot)\psi(\cdot)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \quad \text{і} \quad \left\|\Phi_{-1}(T,\cdot)\Psi_{-1}(T,\cdot)\psi(\cdot)\right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)},$$

а також простори $C_0^{-k(T),-g(\cdot)}$ і $C_0^{-k(T),-g(T,\cdot)}$ таких неперервних функцій $\psi\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{C}_N$, що відповідно при $|x|\to\infty$

$$\Phi_{-1}(T,x)\Psi_{-1}(x)|\psi(x)|\to 0 \quad \text{і} \quad \Phi_{-1}(T,x)\Psi_{-1}(T,x)|\psi(x)|\to 0.$$

Розглянемо неоднорідну систему

$$L(t,x,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = f(t,x), \quad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}, \tag{23}$$

де L визначено в (1).

Для функції $f\colon\Pi_{(0,T]}\to\mathbb{C}_N$ будемо використовувати наступні умови:

$\gamma_{1p})$ f неперервна і задовольняє таку умову Гельдера:

$$\forall R>0 \;\; \exists C>0 \;\; \exists\lambda\in(0,1] \;\; \forall t\in(0,T] \;\; \forall\{x,\xi\}\subset K_R:$$

$$|f(t,x)-f(t,\xi)| \le C(p(x,\xi))^{\lambda},$$

γ_{2p}) $\forall t \in (0, T]$: $F_p(t) \equiv \int\limits_0^t \| f(\tau, \cdot)\|_p^{k(\tau), g(\cdot)} \dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty, \quad 1 \le p \le \infty;$

γ_3) f неперервна і задовольняє таку умову Гельдера:

$$\forall R > 0 \;\; \exists C > 0 \;\; \exists \lambda \in (0,1] \;\; \forall t \in (0,T] \;\; \forall \{x, \xi\} \subset K_R:$$
$$| f(t,x) - f(t,\xi)| \le C\delta(t) E^{-d}(T,t)(\rho(x,\xi))^{\lambda},$$

де δ: $(0,T] \to [0,\infty)$ — функція, яка задовольняє умову $\int_0^T (\delta(t)/\alpha(t))\,dt < \infty$, а d — стала з оцінок (18);

γ_4) $\forall t \in (0,T]$: $F(t) \equiv \int\limits_0^t E^d(T,\tau)\| f(\tau,\cdot)\|_\infty^{k(\tau), g(\cdot)} \dfrac{d\tau}{\alpha(\tau)} < \infty$, де стала d така ж, як в умові γ_3.

Теорема 2. *Нехай система* (23) *має слабке виродження і виконуються умови* $\alpha_1 - \alpha_3$. *Тоді правильними є такі твердження:*

1) *якщо* $\varphi \in L_p^{k(0), g(\cdot)}$ *і функція* f *задовольняє умови* γ_1 *та* γ_{2p}, $1 \le p \le \infty$, *то функція*

$$u(t,x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\,d\xi,$$
$$(t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{24}$$

є розв'язком системи (23) *таким, що*

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in (0,T]: \| u(t,\cdot)\|_p^{k(t), g(\cdot)} \le C\left(\|\varphi\|_p^{k(0), g(\cdot)} + F_p(t)\right),$$

при $1 \le p < \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \| u(t,\cdot) - \varphi\|_p^{k(t), g(\cdot)} = 0$$

і при $p = \infty$

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x) u(t,x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x)\varphi(x)\,dx$$

для будь-якої функції $\psi \in L_1^{-k(T), -g(\cdot)}$;

2) *якщо* $\mu \in M^{k(0), g(\cdot)}$ *і для функції* f виконуються *умови* γ_1 *та* γ_{21}, *то функція*

$$u(t,x) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;0,\xi)\,d\mu(\xi) + \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} Z(t,x;\tau,\xi) f(\tau,\xi)\,d\xi, \quad (t,x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{25}$$

є розв'язком системи (23), *який задовольняє такі умови:*

$$\exists C > 0 \quad \forall t \in (0,T]: \| u(t,\cdot)\|_1^{k(t), g(\cdot)} \le C\left(\|\mu\|^{k(0), g(\cdot)} + F_1(t)\right),$$

і

$$\lim_{t\to 0+} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x) u(t,x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi'(x)\,d\mu(x)$$

для довільної функції $\psi \in C_0^{-k(T), -g(\cdot)}$.

Теорема 3. *Якщо для системи* (23) *виконуються умови* $\beta_1 - \beta_3$, *а для функції* f — *умова* γ_1 *та умова, яка одержується з умови* γ_{2p} *заміною* $g(\cdot)$ *на* $g(\tau, \cdot)$, *то правильні обидва твердження теореми* 2, *тільки в них* $g(\cdot)$ *потрібно замінити відповідно на* $g(0, \cdot)$, $g(t, \cdot)$ *і* $g(T, \cdot)$.

Якщо ж додатково припускати виконання умови β_4, *то розв'язки, що визначаються формулами* (24) *і* (25), *є єдиними.*

Теореми 2 і 3 стосуються випадку слабкого виродження. Якщо виродження сильне, то звичайну початкову умову при $t = 0$ задовольнити, взагалі кажучи, не можливо. У наступній теоремі наводяться умови, за яких існує єдиний розв'язок сильно виродженої системи (23) без початкових умов.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови* $\alpha_1 - \alpha_3$ *і* $B(T, 0) = \infty$. *Якщо* f *задовольняє умови* γ_3 *і* γ_4, *то функція*

$$u(t, x) \equiv \int_0^t \frac{d\tau}{\alpha(\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; \tau, \xi) f(\tau, \xi)\, d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(0,T]}, \tag{26}$$

є розв'язком системи (23), *для якого справджується оцінка*

$$\| u(t, \cdot)\|_{\infty}^{k(t), g(\cdot)} \le C E^{-d}(T, t) F(t), \quad t \in (0, T].$$

Цей розв'язок єдиний, якщо єдиним є відповідний розв'язок задачі Коші для системи (1) *в* $\Pi_{[t_0, T]}$ *при довільному* $t_0 \in (0, T)$.

Доведення тверджень з теорем 2 – 4 про існування відповідних розв'язків грунтується на детальному вивченні властивостей інтегралів з (24) – (26). Єдиність розв'язку в теоремі 3 доводиться за допомогою такої формули Гріна – Остроградського, яка одержується в результаті інтегрування тотожності (16):

$$\int_{t_1}^{t_2} d\tau \int_{K_R} \left(\overline{v}' L_0 u - \left(\overline{L_0^* v}\right)' u \right)(\tau, \xi)\, d\xi = \int_{K_R} (\overline{v}' u)(\tau, \xi) \Big|_{\tau = t_1}^{\tau = t_2} d\xi \, +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} \frac{\beta(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau \int_{\partial K_R} \sum_{j=1}^{n} B^j [v, u](\tau, \xi) \nu_j \, dS_\xi, \tag{27}$$

де $t_1 < t_2$, $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ — орт зовнішньої нормалі до межі ∂K_R кулі K_R.

Для доведення єдиності розв'язку в теоремі 4 досить установити, що розв'язок системи (1), для якого справджується нерівність

$$\| u(t, \cdot)\|_{\infty}^{k(t), g(\cdot)} \le C E^{-d}(T, t) \varepsilon(t), \quad t \in (0, T], \tag{28}$$

де $C > 0$ і функція $\varepsilon : (0, T] \to (0, \infty)$ така, що $\varepsilon(t) \underset{t \to 0+}{\to} 0$, є тотожним нулем. Доведемо це останнє твердження.

Нехай (t, x) — довільно фіксована точка в $\Pi_{(0,T]}$, а t_0 — фіксоване число з $(0, t/2)$. Розв'язок u, який розглядається, очевидно, задовольняє умову

$$u(t, x)\Big|_{t = t_0} = u(t_0, x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{29}$$

причому $\| u(t_0, \cdot)\|_{\infty}^{k(t_0), g(\cdot)} < \infty$. На підставі припущення про єдиність розв'язку задачі (1), (29) маємо зображення

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; t_0, \xi) u(t_0, \xi)\, d\xi. \tag{30}$$

Перейдемо в ньому до границі при $t_0 \to 0+$. Оскільки, враховуючи (18), (22) і (28), маємо

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} Z(t, x; t_0, \xi) u(t_0, \xi) d\xi \right| \le$$

$$\le C\varepsilon(t_0)\Psi_{-1}(x) \int_{\mathbb{R}^n} E^d_{c-c_0}(t, t_0, x-\xi)\Big(E_{c_0}(t, t_0, x-\xi) \times$$

$$\times \Phi_{-1}(\tau, \xi)\Big) E^{-d}(T, t_0)(B(t, t_0))^{-M/(2s)} d\xi \le$$

$$\le C\varepsilon(t_0)\Psi_{-1}(x)\Phi_{-1}(t, x)E^{-d}(T, t) \underset{t_0 \to 0+}{\to} 0,$$

то з (30) одержуємо, $u(t, x) = 0$. Звідси випливає, що $u = 0$ в $\Pi_{(0, T]}$.

4. Доведення теореми 1. Щоб побудувати ф. м. р. Z задачі Коші для системи (1) за умов $\alpha_1 - \alpha_3$, скористаємось методом Леві, згідно з яким Z будемо шукати у вигляді

$$Z(t, x; \tau, \xi) = \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; x) + \int_\tau^t \frac{d\theta}{a(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{Z}(t, x; \theta, y; x)\varphi(\theta, y; \tau, \xi) dy,$$

$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{31}$$

Потрібно описати головний член $\hat{Z}$ формули (31) і підібрати матрицю φ так, щоб функція $Z(\cdot, \cdot; \tau, \xi)$ була розв'язком системи (1) в $\Pi_{(\tau, T]}$ для будь-якої фіксованої точки $(\tau, \xi) \in \Pi_{(0, T]}$.

Щоб визначити $\hat{Z}$, розглянемо таку допоміжну систему з додатковою просторовою змінною x_{n+1}:

$$\left(\alpha(t) I \partial_t - \beta(t) \sum_{\|k\| + k_{n+1} = 2s} b_k(t, y) \partial_x^k (-i\partial_{x_{n+1}})^{k_{n+1}} \right) v(t, x, x_{n+1}) = 0,$$

$$(t, x, x_{n+1}) \in \Pi_{(0, T]} \times \mathbb{R}, \tag{32}$$

де y — фіксована точка з $\mathbb{R}^n$. З умови α_1 випливає, що відповідна (32) система без вироджень є $\overrightarrow{2B}$-параболічною, де $\overrightarrow{2B} \equiv (2b_1, \ldots, 2b_n, 2s)$. Тому на підставі результатів з [4, 17 – 18] існує ф. м. р. Z_0 задачі Коші для системи (32), для якої справджуються оцінки

$$\left| \partial_x^k \partial_{x_{n+1}}^{k_{n+1}} Z_0(t, x; \tau, \xi; x_{n+1} - \xi_{n+1}; y) \right| \le$$

$$\le C_{kk_{n+1}} (B(t, \tau))^{-(M+1+\|k\|+k_{n+1})/(2s)} E_c^d(t, \tau, x-\xi) \times$$

$$\times \exp\left\{ -c(B(t, \tau))^{1-q} \left| x_{n+1} - \xi_{n+1} \right|^q \right\},$$

$$0 < \tau < t \le T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad \{x_{n+1}, \xi_{n+1}\} \subset \mathbb{R},$$

де $k \in \mathbb{Z}_+^n$, $k_{n+1} \in \mathbb{Z}_+^1$, $C_{kk_{n+1}} > 0$, $c > 0$, $d \in \mathbb{R}$, $q \equiv 2s / (2s-1)$. Зокрема, похідні $\partial_x^k Z_0(t, x; \tau, \xi; z; y)$, $z = z' + iz'' \in \mathbb{C}$, як функції аргументу $(B(t, \tau))^{-1/(2s)} z$ при фіксованих t, τ, x і ξ, є цілими функціями, для яких справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^k Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)\right| \le C_k(B(t,\tau))^{-(M+1+\|k\|)/(2s)} E_c^d(t,\tau,x-\xi) \times$$
$$\times \exp\left\{-c(B(t,\tau))^{1-q}|z'|^q + c'(B(t,\tau))^{1-q}|z''|^q\right\},$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n, \quad z\in\mathbb{C}, \tag{33}$$

де $C_k>0$, $c>0$, $c'>0$, $d\in\mathbb{R}$.

Нехай $\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y) \equiv F_{z\to\eta}[Z_0(t,x;\tau,\xi;z;y)]$, де $F_{z\to\eta}$ — перетворення Фур'є за змінною z. Тоді $\hat{Z}_0$ — ф. м. р. задачі Коші для системи

$$\left(\alpha(t)I\partial_t - \beta(t)\sum_{\|k\|+k_{n+1}=2s} b_k(t,y)\eta^{k_{n+1}}\partial_x^k\right)\hat{v}(t,x) = 0, \qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]},$$

для довільно фіксованих точок $\eta\in\mathbb{R}$ і $y\in\mathbb{R}^n$. З (33) на підставі леми 1.1 з [1, с. 36] випливають оцінки

$$\left|\partial_x^k\hat{Z}_0(t,x;\tau,\xi;\eta;y)\right| \le C_k(B(t,\tau))^{-(M+\|k\|)/(2s)} E_c^d(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\exp\left\{-cB(t,\tau)\eta^{2s}\right\}, \quad 0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n, \quad \eta\in\mathbb{R},$$

з допомогою яких для матриці

$$\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y) \equiv \hat{Z}(t,x;\tau,\xi;D(y);y), \quad 0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n, \tag{34}$$

одержуємо оцінки

$$\left|\partial_x^k\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\right| \le C_k(B(t,\tau))^{-(M+\|k\|)/(2s)} E_c^d(t,\tau,x-\xi)\times$$
$$\times\exp\left\{-cB(t,\tau)(D(y))^{2s}\right\}, \quad 0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Зауважимо, що матриця (34) є ф. м. р. задачі Коші для системи

$$L(t,y,\partial_t,\partial_x)u(t,x) = 0, \qquad (t,x)\in\Pi_{(0,T]}.$$

Далі будуть потрібні властивості матриці (34) як функції параметра y. Так, як в [1, 4], доводиться, що за умов α_1–α_3 існують похідні $\partial_x^k\partial_y^l\hat{Z}$, $k\in\mathbb{Z}_+^n$, $\|l\|\le 2s$, для яких справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^k\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y)\right| \le$$
$$\le C_k(B(t,\tau))^{-(M+\|k\|+\|l\|(1-\varepsilon))/(2s)} E_c^d(t,\tau,x-\xi)\exp\left\{-cB(t,\tau)(D(y))^{2s}\right\},$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi,y\}\subset\mathbb{R}^n; \tag{35}$$

$$\forall R>0 \quad \exists C_k>0 \quad \forall\{y,y'\}\subset K_R:$$
$$\left|\partial_x^k\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y) - \partial_x^k\partial_y^l\hat{Z}(t,x;\tau,\xi;y')\right| \le$$
$$\le C_k(p(y,y'))^{\lambda}(B(t,\tau))^{-(M+\|k\|+\|l\|(1-\varepsilon))/(2s)} E_c^d(t,\tau,x-\xi), \tag{36}$$
$$0<\tau<t\le T, \quad \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Отже, в (31) як головний член розглядаємо матрицю (34) при $y = x$ і припускаємо, що шукана матриця φ є неперервною і для неї правильні оцінки

$$\left|\varphi(t, x; \tau, \xi)\right| \leq C\beta(t)(B(t, \tau))^{-1-(M-\zeta)/(2s)} E_c^d(t, \tau, x-\xi),$$
$$0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n; \tag{37}$$

$$\forall R > 0 \quad \exists C > 0 \quad \forall \{x, x'\} \subset K_R:$$
$$\left|\varphi(t, x; \tau, \xi) - \varphi(t, x'; \tau, \xi)\right| \leq$$
$$\leq C\beta(t)(p(x, x'))^{\zeta_1}(B(t, \tau))^{-1-(M-\zeta_2)/(2s)}\left(E_c^d(t, \tau, x-\xi) + E_c^d(t, \tau, x'-\xi)\right),$$
$$0 < \tau < t \leq T, \quad \xi \subset \mathbb{R}^n. \tag{38}$$

де $\zeta \in (0, 1]$, $\zeta_1 < \zeta$, $\zeta_2 \equiv \zeta - \zeta_1$.

Застосувавши диференціальний вираз L з (1) до функції (31) і використавши припущення щодо φ, одержимо для φ інтегральне рівняння

$$\varphi(t, x; \tau, \xi) = K(t, x; \tau, \xi) + \int_\tau^t \frac{d\theta}{\alpha(\theta)} \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \theta, y)\varphi(\theta, y; \tau, \xi)\, dy,$$
$$0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{39}$$

ядро якого визначається за формулою

$$K(t, x; \tau, \xi) \equiv -\beta(t) \sum_{0 < \|k\| \leq 2s} a_k(t, x) \sum_{l < k} C_k^l \partial_x^l \partial_y^{k-l} \hat{Z}(t, x; \tau, \xi; y)\Big|_{y=x}$$

і на підставі (35) та умови α_2 має оцінку

$$\left|K(t, x; \tau, \xi)\right| \leq C\beta(t)(B(t, \tau))^{-1-(M-\zeta)/(2s)} E_c^d(t, \tau, x-\xi),$$
$$0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{40}$$

де $\zeta \equiv \min_{1 \leq j \leq n}(m_j \varepsilon)$.

Використавши оцінку (40), аналогічно випадку параболічних систем з обмеженими коефіцієнтами і без вироджень [1, 4], можна застосувати до рівняння (39) метод послідовних наближень, за допомогою (35), (36) довести апріорні припущення (37), (38) і одержати оцінки (17).

В оцінках (17) відсутня характеристика дисипації $D^{\cdot}$. Щоб якось її врахувати, розглянемо функцію g, що задовольняє умову α_4, і в системі (1) здійснимо аналогічну (9) заміну

$$u(t, x) = e^{g(x)} v(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{(0, T]}.$$

В результаті одержимо систему, яка відрізняється від системи (10) тим, що в ній $g(t, x)$ замінено на $g(x)$. Можна легко перевірити, що при досить малому η з умови α_4 для цієї системи виконуються умови α_1–α_3. Отже, для неї існує ф. м. р. Z_1, для якої справджуються оцінки (17). Ця матриця зв'язана з ф. м. р. Z задачі Коші для системи (1) рівністю

$$Z(t, x; \tau, \xi) = \exp\{g(x) - g(\xi)\} Z_1(t, x; \tau, \xi),$$
$$0 < \tau < t \leq T, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{41}$$

З рівності (41), оцінок (17) та умови α_4 випливають оцінки (18).

Доведення другої частини теореми 1 грунтується на зауваженні 1 і твердженні її першої частини.

Існування матриці Z^* доводиться так само, як і матриці Z, якщо врахувати обернену $\overrightarrow{2b}$-параболічність спряженої системи.

Рівності (20) і (21), як і у випадку параболічних систем з обмеженими коефіцієнтами [1, 4], встановлюються за допомогою формули (27).

1. *Эйдельман С. Д.* Параболические системы. – М.: Наука, 1964. – 443 с.
2. *Эйдельман С. Д.* Параболические ураввения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направлення. Итоги науки и техники – М.: ВИНИТИ, 1990. – Т. 63. – С. 201 – 313.
3. *Эйдельман С. Д.* Об одном классе параболических систем // Докл. АН СССР. – 1960. – **133**, № 1. – С. 40 – 43.
4. *Ивасишен С. Д., Эйдельман С. Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системн // Тр. сем. по функц. анализу. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1968. – Вып. 1. – С. 3 – 175, 271 – 273.
5. *Ивасишен С.Д.* Интегральные представления и начальные значения решений $\overrightarrow{2b}$-параболических систем // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 500 – 506.
6. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для параболических систем линейных уравнений в частных производых с растущими коэффициентами // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 1. – С. 55 – 74.
7. *Эйдельман С. Д.* О задаче Коши для параболических систем с растущими коэффициентами // Докл. АН СССР. – 1959. – **127**, № 4. – С. 760 – 763.
8. *Эйдельман С. Д., Порпер Ф. О.* О поведении решений параболических уравнений второго порядка с диссипацией // Дифференц. уравнения. – 1971. – **7**, № 9. – С. 1684 – 1695.
9. *Эйдельман С. Д., Порпер Ф. О.* Исследование поведения L_2-норм решений сильно параболических систем с диссипацией // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 3. – С. 676 – 690.
10. *Пасічник Г. С.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Сучасні проблеми математики: Мат. міжнар. наук. конф. Ч. 2. – Чернівці–Київ, 1998. – С. 183 – 186.
11. *Івасишен С. Д., Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Допов. НАН України. – 1999. – № 6. – С. 18 – 22.
12. *Пасічник Г. С.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для дисипативних $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 140 – 151.
13. *Пасічник Г. С., Івасишен С. Д.* Про фундаментальну матрицю розв'язків задачі Коші для одного класу параболічних систем з необмеженими коефіцієнтами і виродженнями на початковій гіперплощині // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту. Математика. – 2000. – Вип. 76. – С. 82 – 91.
14. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Задача Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині // Допов. НАН України. – 1994. – № 6. – С. 7 – 11.
15. *Возняк О. Г., Івасишен С. Д.* Фундаментальні матриці розв'язків задачі Коші для параболічних систем з виродженням на початковій гіперплощині. – Чернівці, 1995. – 51 с. – Деп. в ДНТБ України, № 1808-Ук95.
16. *Возняк О.Г.* Про інтегральне зображення розв'язків параболічних систем з виродженням // Мат. міжн. мат. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці: Рута, 1995. – С. 42 – 60.
17. *Березан Л. П., Івасишен С. Д.* Фундаментальна матриця розв'язків задачі Коші для $\overrightarrow{2b}$-параболічних систем з виродженнями на початковій гіперплощині // Допов. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 7 – 12.
18. *Березан Л. П.* Інтегральне зображення розв'язків узагальненої задачі Коші для сильно виродженої на початковій гіперплощині $\overrightarrow{2b}$-параболічної системи // Наук. вісн. Чернівец. ун-ту. Математика. – 1999. – Вип. 46. – С. 13 – 18.

Одержано 07.07.2000