УДК 517.9

В. С. Мельник
(Ин-т прикл. систем. анализа НАН Украины и М-ва образования и науки Украины, Киев)

МУЛЬТИВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА И ОПЕРАТОРНЫЕ ВКЛЮЧЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ОТОБРАЖЕНИЯМИ КЛАССА $(S)_+$

We prove theorems on the existence of solutions of variational inequalities and operator inclusions in the Banach spaces with multivariate mappings belonging to the class $(S)_+$. We justify the method of penalty operators for variational inequalities.

Доведено теорему існування розв'язків варіаційних нерівностей і операторних включень в банахових просторах з множиннозначними відображеннями класу $(S)_+$. Для варіаційних нерівностей обгрунтовано метод штрафних операторів.

1. Классы многозначных отображений. Пусть X — банахово пространство, X^* – его топологически двойственное, $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X^* \times X \to \mathbb{R}$ — каноническое спаривание, 2^X — совокупность всех непустых подмножеств пространства X, $A : X \to 2^{X^*}$ — многозначное отображение, $\operatorname{gr} A = \{(w; y) \in X^* \times X \mid w \in A(y)\}$ — его график. С отображением A связываем верхнюю $[A(y), w]_+ = \sup\limits_{d(y) \in A(y)} \langle d(y), w \rangle_X$ и нижнюю $[A(y), w]_- = \inf\limits_{d(y) \in A(y)} \langle d(y), w \rangle_X$ опорные функции, где $y, w \in X$, и отображения $\operatorname{co} A : X \to 2^{X^*}$, $\overset{*}{\overline{\operatorname{co}}}\, A : X \to 2^{X^*}$, определяемые соотношениями

$$\operatorname{co} A(y) = \operatorname{co}(A(y)), \qquad \overset{*}{\overline{\operatorname{co}}}\, A(y) = \overset{*}{\overline{\operatorname{co}}}\, (A(y)),$$

$\overset{*}{\overline{}}$ обозначает $*$-слабое замыкание в пространстве X^*. Всюду далее сильную, слабую и $*$-слабую сходимости будем обозначать соответственно $\to$, $\xrightarrow{w}$, $\xrightarrow{*}$. Пусть также

$$\|A(y)\|_+ = \sup_{d(y) \in A(y)} \|d(y)\|_{X^*}, \qquad \|A(y)\|_- = \inf_{d(y) \in A(y)} \|d(y)\|_{X^*}.$$

Предложение 1 [1]. *Для отображений $A, B : X \to 2^{X^*}$ справедливы соотношения:*

a) $[A(y), w_1]_+ + [A(y), w_2]_- \le [A(y), w_1 + w_2]_+ \le [A(y), w_1]_+ + [A(y), w_2]_+$, $[A(y), w_1]_- + [A(y), w_2]_- \le [A(y), w_1 + w_2]_- \le [A(y), w_1]_+ + [A(y), w_2]_-$ $\forall\, y, w_1, w_2 \in X$;

b) $[A(y) + B(y), w]_+ = [A(y), w]_+ + [B(y), w]_+ = -[A(y) + B(y), -w]_- = -[A(y), -w]_- - [B(y), -w]_-$ $\forall\, y, w \in X$;

c) $[A(y), w]_+ = [\overset{*}{\overline{\operatorname{co}}}\, A(y), w]_+$ $\forall\, y, w \in X$,
если $[A(y), w]_+ = [B(y), w]_+$ $\forall\, w \in X$, *то* $\overset{*}{\overline{\operatorname{co}}}\, A(y) = \overset{*}{\overline{\operatorname{co}}}\, B(y)$;

d) $[A(y), w]_+ \le \|A(y)\|_+ \|y\|_X$, $[A(y), w]_- \le \|A(y)\|_- \|y\|_X$, $[\overset{*}{\overline{\operatorname{co}}}\, A(y)]_+ = \|A(y)\|_+$ $\forall\, y, w \in X$.

Предложение 2 [2]. *Пусть $a_+(\cdot, \cdot) : X \times X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. При каждом $y \in X$ функционал $x \ni w \mapsto a_+(y, w)$ положительно однородный, выпуклый и полунепрерывный снизу тогда и только тогда, когда существует многозначное отображение $A : X \to 2^{X^*}$ такое, что $a_+(y, w) = [A(y), w]_+$ $\forall\, y, w \in X$.*

***Замечание* 1.** Фигурирующее в предложении 2 отображение A определяется, в силу предложения 1, с точностью до $\overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A$.

Предложение 3 [2]. $d \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)$ *тогда и только тогда, когда*

$$[A(y), w]_+ \ \geq \ \langle d, w\rangle_X \quad \forall\, w \in X.$$

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $d \in \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)$, тогда

$$\langle d, v\rangle_X \in \{\langle d, v\rangle_X \mid w \in \overset{*}{\overline{\text{co}}} A(y)\} \quad \forall\, v \in X$$

и в силу предложения 1

$$\langle d, v\rangle_X \leq [A(y), v]_+ = [\overset{*}{\overline{\text{co}}} A(y), v]_+.$$

Достаточность. Пусть $[A(y), v]_+ \geq \langle d, v\rangle_X \ \ \forall\, v \in X$ и $d \notin \overset{*}{\overline{\text{co}}}\, A(y)$. Множество $\overset{*}{\overline{\text{co}}} A(y)$ является выпуклым и замкнутым в $\sigma(X^*; X)$-топологии пространства X^*, следовательно, в силу теоремы отделимости найдется $v_0 \in X$ такое, что $[A(y), v_0]_+ = [\overset{*}{\overline{\text{co}}} A(y), v_0]_+ < \langle d, v_0\rangle_X$, а это противоречит условию. Предложение доказано.

Определение 1. *Отображение* $A : X \to 2^{X^*}$ *удовлетворяет условию* α), *если из* $y_n \xrightarrow{w} y$ *в* X *и неравенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty} [A(y_n),\ y_n - y]_- \leq 0, \tag{1}$$

можно выделить такую подпоследовательность $\{y_m\} \subset \{y_n\}$, *что* $y_m \to y$ *в* X; *и условию* α_1), *если из* $y_n \xrightarrow{w} y$ *в* X, $d_n \in \overset{*}{\overline{\text{co}}} A(y_n)$ *и неравенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle d_n,\ y_n - y\rangle_X \leq 0 \tag{2}$$

вытекает существование подпоследовательностей $\{y_m\}$, $\{d_m\}$ *таких, что* $d_m \xrightarrow{*} d$ *и* $\langle d_m, y_m\rangle_X \to \langle d, y\rangle_X$.

***Замечание* 2.** Для однозначных отображений свойство α) введено И. В. Скрыпником [3]. Близкое ему свойство $(S)_+$ введено в работах Ф. Браудера [4]. Свойство α_1) является естественным расширением класса обобщенно псевдомонотонных отображений [4].

Будем говорить, что непрерывная функция $C:\ \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ принадлежит классу $\Phi_0(\Phi_1)$, если $t^{-1} C(r_1, t r_2) \to 0$ при $t \to +0$ для любых $r_1,\ r_2 \geq 0$ $(C(r, 0) \equiv 0)$.

Определение 2. *Отображение* $A : X \to 2^{X^*}$ *называется*:

1) *полумонотонным* (*соответственно субмонотонным*), *если для любых* $R > 0$ *и* $y_1,\ y_2 \in X$ *таких, что* $\|y_i\|_X \leq R$, $i = 1, 2$, *справедливо неравенство*

$$[A(y_1),\ y_1 - y_2]_- \geq [A(y_2),\ y_1 - y_2]_+ - C(R; \|y_1 - y_2\|_X), \tag{3}$$

где $C \in \Phi_0$ (*соответственно* $C \in \Phi_1$);

2) *оператором с полуограниченной вариацией* (*п. о. в.*) (*соответственно субограниченной вариацией* (*с. о. в.*)), *если из неравенства* $\|y_i\|_X \leq R$, $i = 1, 2$, *имеем*

$$[A(y_1),\ y_1 - y_2]_- \geq [A(y_2),\ y_1 - y_2]_+ - C\big(R; \|y_1 - y_2\|'_X\big), \tag{4}$$

где $C \in \Phi_0$ (*соответственно* $C \in \Phi_1$), *а норма* $\|\cdot\|'_X$ *компактна относительно* $\|\cdot\|_X$;

3) *l-полумонотонным (соответственно l-субмонотонным, l-п. о. в., l-с. о. в.), если первое слагаемое в правой части* (3), (4) *имеет вид* $[A(y_2), y_1 - y_2]_-$.

Замечание 3. Пусть $A = A_0 + A_1$, где $A_0 : X \to 2^{X^*}$ — монотонное отображение, а $A_1 : X \to 2^{X^*}$ — локально полулипшицево, т. е. для $\|y_i\|_X \le R$, $i = 1, 2$, выполняется неравенство

$$\operatorname{dist}(A_1(y_1), A_1(y_2)) \le k(R)\|y_1 - y_2\|_X,$$

где $k : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ — непрерывная неубывающая функция, $k(0) = 0$. Тогда A — полумонотонное отображение. Если $A_1 : X \to 2^{X^*}$ ограничено, то A — субмонотонное отображение.

Пусть $A_1 : Y \to 2^{Y^*}$ и $X \subset Y$ компактно, Y — нормированное пространство. Если A_1 — локально полулипшицево (ограничено) из Y в Y^*, то $A = A_0 + A_1$ — оператор с п. о. в. (с. о. в.).

Предложение 4 [1]. *Пусть отображение* $A_0 : X \to 2^{X^*}$ *удовлетворяет условию* α), $A_1 : X \to 2^{X^*}$ *— отображение с п. о. в. (с. о. в.).*

Тогда $A = A_0 + A_1$ *удовлетворяет условию* α).

Замечание 4. Предложение 4 остается в силе и для операторов $A_1 : X \to 2^{X^*}$ с l-п. о. в. (соответственно l-с. о. в.), если $A_1(y)$ — компакт в X^* $\forall y \in X$.

Определение 3. *Отображение* $A : X \to 2^{X^*}$ *называется:*

a) *псевдомонотонным, если из* $y_n \xrightarrow{w} y$ *в* X *и условия* (1) *можно выделить подпоследовательность* $\{y_m\} \subset \{y_n\}$, *для которой*

$$\varliminf_{m\to\infty} [A(y_m), y_m - w]_- \ge [A(y), y - w]_- \quad \forall w \in X;$$

b) *λ-псевдомонотонным, если из* $y_n \xrightarrow{w} y$ *и неравенства* (2), *где* $d_n \in \overset{*}{\overline{\text{co}}} A(y_n)$, *можно выбрать такие подпоследовательности* $\{y_m\}$, $\{d_m\}$, *что*

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - w\rangle_X \ge [A(y), y - w]_- \quad \forall w \in X;$$

c) *λ_s-псевдомонотонным, если для* $y_n \xrightarrow{w} y$ *и* (2) *найдутся* $\{d_m, y_m\} \subset \{d_n, y_n\}$ *и селектор* $d(y) \in \overset{*}{\overline{\text{co}}} A(y_n)$ *такие, что*

$$\varliminf_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - w\rangle_X \ge \langle d(y), y - w\rangle_X \quad \forall w \in X.$$

Предложение 5. 1. *Сумма двух псевдомонотонных отображений есть псевдомонотонное отображение.*

2. *Сумма двух λ-псевдомонотонных (соответственно λ_s-псевдомонотонных) отображений обладает этим же свойством, если один из них ограниченнозначный.*

Предложение 6. *Пусть отображение* $A : X \to 2^{X^*}$ *удовлетворяет условию* α_1) *и из* $(w_n; y_n) \in \operatorname{gr} \overset{*}{\overline{\text{co}}} A$, $y_n \xrightarrow{w} y$, $w_n \xrightarrow{*} w$ *в* X^* *вытекает, что* $(w; y) \in \operatorname{gr} \overset{*}{\overline{\text{co}}} A$.

Тогда A *—* λ_s*-псевдомонотонное отображение.*

Определение 4. *Отображение* $A : X \to 2^{X^*}$ *называется:*

a) *хеминепрерывным сверху (хн. св.), если для любого* $v \in X$ *функция* $X \ni x \mapsto [A(x), v]_+$ *полунепрерывна сверху;*

b) *радиально полунепрерывным сверху* (*р. пн.*), *если для любых* $y, w \in X$ *справедливо соотношение*

$$\varliminf_{t \to +0} [A(y - tw), w]_+ \geq [A(y), w]_- ;$$

c) s*-радиально полунепрерывным сверху* (s*-р. пн.*), *если для любого* $y \in X$ *существует* $d(y) \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}} A(y)$ *такой, что*

$$\varliminf_{t \to +0} [A(y - tw), w]_+ \geq \langle d(y), w \rangle_X \quad \forall w \in X.$$

***Замечание* 5.** Очевидно, справедливы импликации: a) $\Rightarrow$ b), c) $\Rightarrow$ b).

Предложение 7. *Пусть* $A : X \to 2^{X^*}$ — *р. пн.* (s*-р. пн.*) *оператор с п. о. в. Тогда* A — λ*-псевдомонотонный* (*соответственно* λ_s*-псевдомонотонный*) *оператор.*

***Замечание* 6.** Предложение 7 остается в силе, если вместо свойства п. о. в. оператор A полумонотонный и удовлетворяет условию α).

Предложение 8. *Каждое отображение* $A : X \to 2^{X^*}$ *из определения* 2 *имеет свойство* π): *если для некоторого ограниченного множества* $K \subset X$, *селектора* $d \in \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}} A$ *и элемента* $h \in X$ *имеет место*

$$\langle d(y), y - h \rangle_X \leq 0 \quad \forall y \in K,$$

то существует $k > 0$ *такое, что* $\|d(y)\|_{X^*} \leq k \ \ \forall y \in K$.

Определение 5. *Отображение* $A : X \to 2^{X^*}$ *называется демизамкнутым, если* $\mathrm{gr}\, \overset{*}{\overline{\mathrm{co}}} A$ *замкнут в* $X^* \times X$ *относительно сильной сходимости в* X *и* $*$*-слабой сходимости в* X^*.

Предложение 9. *Каждое псевдомонотонное* (*соответственно* λ*-псевдомонотонное,* λ_s*-псевдомонотонное*) *отображение демизамкнуто.*

2. Операторные включения. Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $A : X \to 2^{X^*}$ — многозначное отображение, $f \in X^*$ — фиксированный элемент, $K_f = \{y \in X \mid A(y) \ni f\}$.

В этом пункте изучим некоторые свойства множества K_f. Обозначим через $C_v(X^*)$ совокупность всех непустых замкнутых выпуклых подмножеств пространства X^*, $\overline{B}_r = \{y \in X \mid \|y\|_X \leq r\}$.

Теорема 1. *Пусть* $A : X \to C_v(X^*)$ — *ограниченное* λ*-псевдомонотонное отображение, удовлетворяющее условию коэрцитивности:*

$$\|y\|_X^{-1} [A(y), y]_+ \to +\infty \quad \text{при} \quad \|y\|_X \to \infty. \tag{5}$$

Тогда найдется такое $r > 0$, *что множество* $K_f \cap \overline{B}_r$ *непусто и слабо компактно.*

Доказательство. Пусть $F(X)$ — совокупность всех конечномерных подпространств пространства X, для $F \in F(X)$ через $I_F : F \to X$ обозначим каноническое вложение, а $I_F^* : X^* \to F^*$ — сопряженный оператор. Положим $A_F = I_F^* A I_F : F \to 2^{F^*}$.

Лемма 1. *Для каждого* $F \in F(X)$, $A_F = \overline{\mathrm{co}} A_F$ *и является полунепрерывным сверху отображением.*

Доказательство. Для произвольного $x \in F$ множество $A_F(x)$ выпукло и замкнуто в F^*. Выпуклость очевидна, докажем замкнутость.

Пусть $z_n \in A_F(x)$ и $z_n \to z_0$ в F и рассмотрим $g_n \in A(x)$, $z_n = I_F^* g_n$. Последовательность $\{g_n\}$ ограничена в X^* и можем полагать, что $g_n \xrightarrow{w} g_0$ в X^*, причем $g_0 \in A(x)$, так как $A = \overline{\mathrm{co}}\, A$. Однако тогда $z_n \to z_0 \in A_F(x)$, т. е. $A_F(x) \in C_v(F^*)$ $\forall\, x \in F$. Докажем полунепрерывность сверху. Множество $A_F(x)$ ограниченное, а значит, компактное в F^*. Предположим, что в точке $x_0 \in F$ отображение A_F не является полунепрерывным сверху. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что в каждом шаре

$$B_{1/n}(x_0) = \left\{x \in F \mid \|x - x_0\|_F < 1/n\right\}$$

можно выбрать точку x_n такую, что $A_F(x_n) \not\subset B_\varepsilon(A_F(x_0)) = \{ z \in F^* \mid \mathrm{dist}\,(z, A_F(x_0)) < \varepsilon\}$.

Рассмотрим последовательности $\{x_n\}$, $\{z_n\}$, где $z_n \in A_F(x_n) \setminus B_\varepsilon(A_F(x_0))$, $x_n \in B_{1/n}(x_0)$. Последовательность $\{x_n\}$ сходится к x_0 в F, а последовательность $\{z_n\}$ ограничена в силу ограниченности отображения A_F. Без ограничения общности можем считать, что $z_n \to z_0$ в F^*. В силу предложения 9 отображение A демизамкнуто, откуда вытекает замкнутость A_F. Поэтому $z_0 \in A_F(x_0)$, что противоречит $z_n \notin B_\varepsilon(A_F(x_0))$. Лемма доказана.

Рассмотрим функцию $\gamma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $\gamma(r) = \inf\limits_{\|y\|_X = r} \|y\|_X^{-1} [A(y), y]_+$. Очевидно, $\lim\limits_{t \to \infty} \gamma(t) = +\infty$. Тогда

$$[A(y) - f, y]_+ \;\geq\; \left(\gamma(\|y\|_X) - \|f\|_{X^*}\right) \|y\|_X,$$

и найдется такое $r > 0$, что $[A(y) - f, y]_+ \geq 0$ для любого $y \in \partial B_r$. Для $F \in F(X)$ положим $\overline{B}_{r,F} = \overline{B}_r \cap F$ и получим аналогичную оценку для отображения A_F, т. е. для любого $x \in \partial \overline{B}_{r,F}$ $[A_F(x) - f_F, x]_+ \geq 0$, где $f_F = I_F^* f$.

Для отображения A_F применимо следствие 4.3 из [5], т. е. для любого $F \in F(X)$ существует $y_F \in F$ такое, что

$$A_F(y_F) \ni f_F, \tag{6}$$

причем $y_F \in \overline{B}_{r,F}$.

В силу предложения 3 включение (6) эквивалентно следующему неравенству:

$$[A_F(y_F), x]_+ \;\geq\; \langle f_F, x \rangle_F \quad \forall\, x \in F. \tag{7}$$

Для произвольного $F_0 \in F(X)$ положим

$$G_{F_0} = \bigcup_{F \supset F_0} \left\{ y_F \in \overline{B}_{r,F} \mid y_F \text{ удовлетворяет (7)} \right\}.$$

Множество $G_{F_0} \neq \varnothing$ и содержится в замкнутом шаре $\overline{B}_r$. Более того, для произвольного конечного набора $F_1, \ldots, F_n \in F(X)$ и $F \in F(X)$ таких, что $F \supset \bigcup_{i=1}^n F_i$, имеем $\varnothing \neq G_F \subset \bigcap_{i=1}^n G_{F_i}$, т. е. система множеств $\{\overline{G}_F^w\}$ центрирована, где $\overline{G}_F^w$ — слабое замыкание множества G_F в X. Тогда из рефлексивности пространства X существует $y_0 \in \bigcap_{F \in F(X)} \overline{G}_F^w$. Докажем, что $y_0 \in K_f$. Выберем $F_0 \in F(X)$ из условия $y_0 \in F_0$. Тогда найдется последовательность

$\{y_n\} \subset G_{F_0}$ такая, что $y_n \xrightarrow{w} y_0$ в X, а также $d'_n \in A_{F_n}(y_n)$, причем $d'_n = f_n$, где $y_n \in F_n \cap \overline{B}_r$, $F_0 \subset F_n \in F(X)$, $f_n = I^*_{F_n} f$. Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y_0 \rangle_X = \lim_{n\to\infty} \langle f, y_n - y_0 \rangle_X = 0,$$

где $d'_n = I^*_{F_n} d_n$, а так как отображение A λ-псевдомонотонное, то найдутся подпоследовательности $\{d_m\} \subset \{d_n\}$, $\{y_m\} \subset \{y_n\}$, для которых

$$\underline{\lim}_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - w \rangle_X \geq [A(y_0), y_0 - w]_- \quad \forall w \in X,$$

откуда $[A(y_0), y_0 - w]_- \leq \langle f, y_0 - w \rangle_X$ или $[A(y_0), w - y_0]_+ \geq \langle f, w - y_0 \rangle_X$ $\forall w \in X$, что эквивалентно включению $A(y_0) \ni f$. Таким образом, доказано, что $K_f \neq \varnothing$. Слабая компактность K_f легко проверяется. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $A : X \to C_v(X^*)$ — ограниченное демизамкнутое отображение, удовлетворяющее условию* α) *и условию коэрцитивности* (5). *Тогда $K_f \cap \overline{B}_r$ непусто и компактно.*

Доказательство является простой модификацией доказательства теоремы 1.

Замечание 7. Очевидно, утверждение теоремы 1 сохраняется как для псевдомонотонных, так и λ_s-псевдомонотонных отображений.

3. Мультивариационные неравенства. Метод штрафа. Пусть K — замкнутое выпуклое множество пространства X, $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ — выпуклая функция, $\operatorname{dom} \varphi = \{y \in X \mid \varphi(y) \neq +\infty\} \neq \varnothing$. Здесь мы рассматриваем следующие неравенства с многозначными отображениями $A : X \to 2^{X^*}$:

$$[A(y), v - y]_+ \geq \langle f, v - y \rangle_X \quad \forall v \in K, \tag{8}$$

$$[A(y), v - y]_+ + \varphi(v) - \varphi(y) \geq \langle f, v - y \rangle_X \quad \forall v \in K, \quad f \in X^*. \tag{9}$$

Предположим далее, что $X = V \cap W$, где V и W — рефлексивные банаховы пространства

$$A : V \to 2^{V^*}, \quad f \in V^* + W^*, \quad \|\cdot\|_X = \|\cdot\|_V + \|\cdot\|_W,$$

$\beta : X \to W^*$ — монотонный, ограниченный, деминепрерывный оператор штрафа, соответствующий множеству K, т. е. $K = \{y \in X \mid \beta(y) = 0\}$ [6].

Определение 6. а) *Элемент $y \in X$ называется решением неравенства* (8) (*соответственно* (9)), *если $y \in K$ и выполнено* (8) (*соответственно* (9));

b) *элемент $y \in X$ называется строгим решением неравенства* (8) (*соответственно* (9)), *если $y \in K$ и найдется селектор $d(y) \in \overline{\operatorname{co}} A(y)$ такой, что*

$$\langle d(y), w - y \rangle_V \geq \langle f, w - y \rangle_X \quad \forall w \in K$$

и соответственно

$$\langle d(y), w - y \rangle_V + \varphi(w) - \varphi(y) \geq \langle f, w - y \rangle_X \quad \forall w \in K.$$

Теорема 3. *Пусть $A : V \to 2^{V^*}$ — ограниченное λ-псевдомонотонное отображение и выполнено следующее условие коэрцитивности:*

найдутся $\varepsilon_0 > 0$ и $y_0 \in K$ такие, что

$$\|y\|_X^{-1}\left\{[A(y), y-y_0]_+ + \frac{1}{\varepsilon_0}\langle\beta(y), y-y_0\rangle_W\right\} \to +\infty, \quad \|y\|_X \to +\infty. \tag{10}$$

Тогда при каждом $0<\varepsilon\le\varepsilon_0$ *операторное включение*

$$A_\varepsilon(y) \;=\; \overline{\mathrm{co}}\,A(y) + \frac{1}{\varepsilon}\beta(y) \ni f \tag{11}$$

разрешимо и из последовательности его решений $\{y_\varepsilon\}$ *можно извлечь такую подпоследовательность* $\{y_\tau\}$, *что* $y_\tau \xrightarrow{w} y$ *в* X *и* y *является решением неравенства* (8).

Доказательство. При каждом $\varepsilon>0$ оператор $A_\varepsilon : X \to 2^{X^*}$ является ограниченным и λ-псевдомонотонным. Из условия (10) найдем $r_0 = r_0(\varepsilon_0)$ такое, что $[A_{\varepsilon_0}(y)-f,\, y-y_0]_+ \ge 0 \;\; \forall\, y\in\, \partial B_{r_0}$. Тогда для любого $\varepsilon\le\varepsilon_0$

$$\begin{aligned}&[A(y)-f,\, y-y_0]_+ + \frac{1}{\varepsilon}\langle\beta(y)-\beta(y_0),\, y-y_0\rangle_W \;\ge\\ &\ge\; [A_{\varepsilon_0}(y)-f,\, y-y_0]_+ \;\ge\; 0 \quad\; \forall\; y\in\, \partial B_{r_0}.\end{aligned} \tag{12}$$

Значит, в силу теоремы 1 при каждом $\varepsilon\le\varepsilon_0$ включение (11) имеет решение $y_\varepsilon\in\, \overline{B}_{r_0}$, где r_0 не зависит от $\varepsilon\le\varepsilon_0$.

Следовательно, можно считать, что $y_\varepsilon \xrightarrow{w} y$ в X (в противном случае нужно перейти к подпоследовательности). Поскольку отображение A ограничено, то

$$|\langle\beta(y_\varepsilon), y_\varepsilon\rangle_W| \;\le\; \varepsilon\big(\|f\|_{X^*}\|y_\varepsilon\|_X + \|A(y_\varepsilon)\|_+\|y_\varepsilon\|_V\big) \;\le\; \varepsilon k$$

и при $\varepsilon\to 0$ $\langle\beta(y_\varepsilon), y_\varepsilon\rangle_W \to 0$. Аналогично $\langle\beta(y_\varepsilon), v\rangle_W \to 0 \;\;\; \forall\; v\in X$. Отсюда с учетом монотонности β находим $\langle\beta(v), y-v\rangle_W \le 0 \;\; \forall\, v\in X$, откуда следует, что $\beta(y)=0$, т. е. $y\in K$.

Пусть $d_\varepsilon\in\; \overline{\mathrm{co}}\,A(y_\varepsilon)$ и $d_\varepsilon + \beta(y_\varepsilon)/\varepsilon = f$, тогда для каждого $w\in K$

$$\langle d_\varepsilon,\, w-y_\varepsilon\rangle_V \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\langle\beta(w)-\beta(y_\varepsilon),\, w-y_\varepsilon\rangle_W \;+\; \langle f,\, w-y_\varepsilon\rangle_X \;\ge\; \langle f,\, w-y_\varepsilon\rangle_X. \tag{13}$$

Следовательно,

$$\varlimsup_{\varepsilon\to 0}\, \langle d_\varepsilon,\, y_\varepsilon - y\rangle_V \;\le\; 0,$$

а так как $A : V\to 2^{V^*}$ — λ-псевдомонотонное отображение, то (снова переходя при необходимости к подпоследовательностям) получаем

$$\varliminf_{\varepsilon\to 0}\, \langle d_\varepsilon,\, y_\varepsilon - w\rangle_V \;\ge\; [A(y),\, y-w]_- \qquad \forall\, w\in K,$$

откуда с учетом неравенства (13) следует

$$\langle f,\, y-w\rangle_X \;\ge\; [A(y),\, y-w]_- \qquad \forall\, w\in K,$$

т. е. y — решение (8). Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть* $A : V\to 2^{V^*}$ — *ограниченное демизамкнутое отображение, удовлетворяющее условию* α) *и условию коэрцитивности* (10). *Тогда справедливы все утверждения теоремы* 3 *и, кроме того,* $y_\tau \to y$ *в* V.

Изучим теперь неравенство вида (9) и наряду с этим рассмотрим

$$[A(y),\, w-y]_+ + \frac{1}{\varepsilon}\langle \beta(y),\, w-y\rangle_W + \varphi(w) - \varphi(y) \geq \langle f,\, w-y\rangle_X \quad \forall\, w \in \operatorname{dom}\varphi. \tag{14}$$

Теорема 5. *Пусть* $A : V \to 2^{V^*}$ *— ограниченное* λ*-псевдомонотонное отображение,* $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *— собственная, выпуклая, полунепрерывная снизу функция,* $\overline{\operatorname{spen}\operatorname{dom}\varphi} = X$ *и выполнено условие коэрцитивности:* $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, $y_0 \in K \bigcap \operatorname{dom}\varphi$ *такие, что*

$$\|y\|_X^{-1}\left\{[A(y), y-y_0]_- + \frac{1}{\varepsilon_0}\langle \beta(y), y-y_0\rangle_W + \varphi(y)\right\} \to +\infty, \quad \|y\|_X \to +\infty. \tag{15}$$

Тогда при каждом $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ *неравенство* (14) *разрешимо и из последовательности его решений* $\{y_\varepsilon\}$ *можно выделить такую подпоследовательность* $\{y_\tau\}$, *что* $y_\tau \xrightarrow{w} y$ *в* X, *причем* y *— решение* (9).

Доказательство. Используя метод Моско [7], определим $\hat{X} = X \times \mathbb{R}$, $\hat{K} = \operatorname{epi}\varphi = \{(y;\mu) \in X \times \mathbb{R} \mid \varphi(y) \leq \mu\}$, $\hat{A}(\hat{y}) = (A(y);0) \subset \hat{X}^* = X^* \times \mathbb{R}$, $\hat{y} = (y;\alpha) \in \hat{X}$.

Множество $\hat{K}$ — замкнутое и выпуклое и аналогично теореме 3 из [2] доказывается эквивалентность (14) и неравенства

$$\left[\hat{A}_\varepsilon(\hat{y}),\, \hat{w}-\hat{y}\right]_+ \geq \left\langle \hat{f},\, \hat{w}-\hat{y}\right\rangle_{\hat{X}} \quad \forall\, \hat{w} \in \hat{K}, \tag{16}$$

где $\hat{f} = (f;1)$.

Для каждого $R > 0$ рассмотрим множество

$$\hat{K}_R = \left\{(y;\alpha) = \hat{y} \in \hat{K} \mid \|y-y_0\|_X + |\alpha - \varphi(y_0)| \leq R\right\},$$

которое ограничено в $\hat{X}$, и изучим неравенство (16) при $\hat{w} \in \hat{K}_R$. Его разрешимость вытекает из следующего утверждения, имеющего самостоятельный интерес.

Предложение 10. *Пусть* X *— рефлексивное банахово пространство,* $A : X \to 2^{X^*}$ *— ограниченное* λ*-псевдомонотонное отображение,* K *— замкнутое, выпуклое, ограниченное подмножество в* X.

Тогда для каждого $f \in X^*$ *найдется, по крайней мере, одно решение неравенства* (8), *совокупность которых слабо компактна.*

Доказательство. Пусть $F(X)$ — фильтр конечномерных подпространств в X для $F \in F(X)$, $K_F = F \bigcap K$ и рассмотрим конечномерное неравенство

$$[A_F(y_F),\, w_F - y_F]_+ \geq \langle f_F,\, w_F - y_F\rangle_F \quad \forall\, w_F \in K_F, \tag{17}$$

где $A_F = I_F^* A I_F$, $f_F = I_F^* f$.

Пусть $v_1, \ldots, v_k$ — базис в F и наделим F структурой гильбертова пространства со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_F$, отождествляя F и F^*.

При этом $A_F(y_F) = \sum_{i=1}^k \langle A(y_F), v_i\rangle_X v_i$ и (17) эквивалентно следующему неравенству:

$$(y_F,\, w_F - y_F)_F \geq [y_F + f_F - \overline{\operatorname{co}}\, A_F(y_F),\, w_F - y_F]_- \quad \forall\, w_F \in K_F, \tag{18}$$

причем

$$\overline{\mathrm{co}}\, A_F(y_F) = I_F^* \overline{\mathrm{co}}\, A(y_F).$$

В силу леммы 1 отображение $\overline{\mathrm{co}}\, A_F : F \to C_V(F)$ полунепрерывно сверху, а значит, для любого $\varepsilon > 0$ существует его ε-аппроксимация [8], т. е. такое непрерывное однозначное отображение $d_\varepsilon : F \to F$, что

$$\rho_*(\mathrm{gr}\, d_\varepsilon, \mathrm{gr}\, \overline{\mathrm{co}}\, A_F) = \sup_{w \in \mathrm{gr}\, d_\varepsilon} \rho(w, \mathrm{gr}\, \overline{\mathrm{co}}\, A_F) < \varepsilon,$$

где ρ — естественная метрика на $F \times F$. Для $\varepsilon > 0$ рассмотрим ε-аппроксимацию d_ε и ассоциированное с ней вариационное неравенство

$$(y_F, w_F - y_F)_F \geq (y_F + f_F - d_\varepsilon(y_F), w_F - y_F)_F \quad \forall\, w_F \in K_F. \tag{19}$$

Пусть $\pi_K : F \to K_F$ — оператор проектирования на множество K_F. Как известно, для каждого $y_F \in F$ элемент $\pi_K(y_F)$ полностью характеризуется условием

$$(\pi_K(y_F) - y_F, w_F - \pi_K(y_F))_F \geq 0 \quad \forall\, w_F \in K_F,$$

а значит, неравенство (19) эквивалентно соотношению

$$y_F = \pi_K(y_F + f_F - d_\varepsilon(y_F))$$

и в силу теоремы Брауэра существует $y_F^\varepsilon \in K_F$, удовлетворяющее (19). Последовательность $\{y_F^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ ограничена ввиду ограниченности K_F, а из ограниченности A_F и того, что $d_\varepsilon(K_F) \subset \overline{\mathrm{co}}\, A_F(K_F)$ [8], получаем ограниченность последовательности $\{d_\varepsilon(y_F^\varepsilon)\}_{\varepsilon>0}$ в F. Следовательно, можем считать, что $y_F^\varepsilon \to y_F^0$ и $d_\varepsilon(y_F^\varepsilon) \to d^0$ в F, причем $d^0 \in \overline{\mathrm{co}}\, A_F(y_F^0)$ [8]. Тогда, подставляя в (19) y_F^ε вместо y_F и переходя к пределу, получаем

$$\left(y_F^0, w_F - y_F^0\right)_F \geq \left(y_F^0 + f_F - d^0, w_F - y_F^0\right)_F \quad \forall\, w_F \in K_F,$$

а так как $d^0 \in \overline{\mathrm{co}}\, A_F(y_F^0)$, то

$$\left[A_F(y_F^0), w_F - y_F^0\right]_+ \geq \left\langle d^0, w_F - y_F^0\right\rangle_F \geq \left(f_F, w_F - y_F^0\right)_F \quad \forall\, w_F \in K_F,$$

и тем самым доказана разрешимость неравенства (18) при каждом $F \in F(X)$, причем $\|y_F\|_X \leq l$. Для $F_0 \in F(X)$ положим

$$G_{F_0} = \bigcup_{F \supset F_0} \left\{ y_F \in K_F \mid [A_F(y_F) - f_F, w_F - y_F]_+ \geq 0 \ \ \forall\, w_F \in K_F \right\}$$

Система $\left\{\overline{G}_F^w\right\}$, где $\overline{G}_F^w$ — слабое замыкание G_F, центрирована, а значит, найдется $y_0 \in \bigcap_{F \in F(X)} \overline{G}_F^w$, причем $y_0 \in K$. Пусть $y_0 \in K_{F_0}$, тогда найдутся $y_n \in G_{F_0}$, $d_n \in \overline{\mathrm{co}}\, A(y_n)$ такие, что $y_n \xrightarrow{w} y_0$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \langle d_n, y_n - y_0\rangle_X = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} [A(y_n), y_n - y_0]_- \leq \lim\limits_{n\to\infty} \langle f, y_n - y_0\rangle_X = 0$, а в силу λ-псевдомонотонности отображения A получаем (для соответствующих подпоследовательностей)

$$\langle f, y_0 - w\rangle_X \geq \underline{\lim}_{m\to\infty} \langle d_m, y_m - w\rangle_X \geq [A(y_0), y_0 - w]_- \quad \forall\, w \in K,$$

т. е. y_0 — решение неравенства (8). Слабая компактность множества решений является следствием ограниченности K и λ-псевдомонотонности отображения A. Предложение доказано.

Из ограниченности и λ-псевдомонотонности отображения A_ε следуют аналогичные свойства отображения $\hat{A}_\varepsilon$, поэтому в силу предложения 10 найдется $\hat{y}_R \in \hat{K}_R$ такое, что

$$[\hat{A}_\varepsilon(\hat{y}_R), \hat{w} - \hat{y}_R]_+ \geq \langle \hat{f}, \hat{w} - \hat{y}_R \rangle_{\hat{X}} \quad \forall\, \overline{w} \in \hat{K}_R. \tag{20}$$

Поскольку $\hat{y}_0 = (y_0; \varphi(y_0)) \in \hat{K}_R$, то, подставляя $\hat{w} = \hat{y}_0$ в (20), имеем

$$[A_\varepsilon(y_R), y_R - y_0]_- + \varphi(y_R) \leq \langle f, y_R - y_0 \rangle_X + \varphi(y_0) \leq$$

$$\leq \|f\|_{X^*} \|y_R - y_0\|_X + C_1 \leq C\big(1 + \|y_R\|_X\big).$$

Отсюда и из условия (15) выводим оценку $\|y_R\|_X \leq l$ и

$$\mu_R \leq \langle f, y_R - y_0 \rangle_X + \varphi(y_0) + [A_\varepsilon(y_R), y_0 - y_R]_+ \leq$$

$$\leq \big(\|f\|_{X^*} + \|A_\varepsilon(y_R)\|_+\big) \|y_R - y_0\|_X + \varphi(y_0) \leq k.$$

С другой стороны, полагая

$$C_\varepsilon(r) = \inf_{\|y\|_X = r} \|y\|_X^{-1} \big([A_\varepsilon(y), y - y_0]_- + \varphi(y)\big),$$

с учетом (15) и ограниченности A_ε находим

$$\mu_R \geq \varphi(y_R) \geq C_\varepsilon\big(\|y_R\|_X\big) \|y_R\|_X - [A_\varepsilon(y_R), y_R - y_0]_- \geq$$

$$\geq C_\varepsilon\big(\|y_R\|_X\big) \|y_R\|_X - \|A_\varepsilon(y_R)\|_- \|y_R\|_V - \|A_\varepsilon(y_R)\|_- \|y_0\|_V \geq \tilde{C} \|y_R\|_X.$$

Таким образом, $\|y_R\|_X + |\mu_R| \leq C_1$, где постоянная C_1 не зависит от R и

$$\|y_R - y_0\|_X + |\mu_R - \varphi(y_0)| \leq C_2.$$

При $R > C_2$ элемент $\hat{y}_R = (y_R; \mu_R)$ является решением неравенства (16), а поскольку (16) эквивалентно (14), то разрешимость последнего установлена. Для $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ рассмотрим последовательность $\{y_\varepsilon\}$ решений неравенства (14). Она ограничена в X вследствие условия коэрцитивности (15) и оценки

$$[A(y_\varepsilon), y_\varepsilon - y_0]_- + \frac{1}{\varepsilon_0} \langle \beta(y_\varepsilon), y_\varepsilon - y_0 \rangle_W + \varphi(y_\varepsilon) \leq$$

$$\leq [A(y_\varepsilon), y_\varepsilon - y_0]_- + \frac{1}{\varepsilon} \langle \beta(y_\varepsilon) - \beta(y_0), y_\varepsilon - y_0 \rangle_W + \varphi(y_\varepsilon) \leq$$

$$\leq \langle f, y_\varepsilon - y_0 \rangle_X + \varphi(y_0),$$

поэтому можем считать, что $y_\varepsilon \xrightarrow{w} y$ в X, а из оценки

$$\varphi(y_\varepsilon) \leq \varphi(y_0) + \big(\|A(y_\varepsilon)\|_+ + \|f\|_{X^*}\big) \|y_\varepsilon - y_0\|_X \leq k_0,$$

и полунепрерывности снизу функции φ получаем $y \in \operatorname{dom} \varphi$. Далее имеем

$$\langle \beta(y_\varepsilon), y_\varepsilon - v \rangle_W \leq \varepsilon\big(\|f\|_{X^*} + \|A(y_\varepsilon)\|_+\big) \|y_\varepsilon - v\|_X + \varepsilon\varphi(v) - \varepsilon\varphi(y_\varepsilon) \quad \forall\, v \in \operatorname{dom} \varphi,$$

поэтому

$$\overline{\lim_{\varepsilon \to 0}} \langle \beta(y_\varepsilon), y_\varepsilon - v \rangle_W \leq 0.$$

Тогда в силу монотонности β заключаем

$$\langle \beta(v), y - v \rangle_W \leq 0 \qquad \forall v \in \operatorname{dom} \varphi .$$

Отсюда нетрудно доказать, что $\langle \beta(y), w \rangle_W = 0 \;\; \forall w \in \operatorname{int} \operatorname{dom} \varphi$, а так как $\operatorname{spen} \operatorname{dom} \varphi$ плотно в X, то $\beta(y) = 0$, т. е. $y \in K \bigcap \operatorname{dom} \varphi$. Для произвольного $w \in K \bigcap \operatorname{dom} \varphi$

$$[A(y_\varepsilon) - f, w - y_\varepsilon]_+ + \varphi(w) - \varphi(y_\varepsilon) \geq \frac{1}{\beta} \langle \beta(w) - \beta(y_\varepsilon), w - y_\varepsilon \rangle_W \geq 0,$$

значит,

$$\varlimsup_{\varepsilon \to 0} \langle d_\varepsilon, y_\varepsilon - y \rangle_V = \varlimsup_{\varepsilon \to 0} [A(y_\varepsilon), y_\varepsilon - y]_- \leq 0,$$

где $d_\varepsilon \in \overline{\operatorname{co}} A(y_\varepsilon)$. Таким образом, из λ-псевдомонотонности получаем окончательно

$$\varphi(w) + \langle f, y - w \rangle_X \geq \varliminf_{\varepsilon \to 0} (\langle d_\varepsilon, y_\varepsilon - w \rangle_V + \varphi(y_\varepsilon)) \geq [A(y), y - w]_- + \varphi(y)$$

$$\forall w \in K \bigcap \operatorname{dom} \varphi .$$

Теорема доказана.

***Замечание* 8.** Если $\operatorname{dom} \varphi = X$, то в условиях теоремы 5 условие коэрцитивности (15) можно заменить условием (10).

Анализируя доказательства теорем 3, 5, приходим к следующему утверждению.

Теорема 6. *Пусть* $A : V \to 2^{V^*}$ — *ограниченное* λ_s-*псевдомонотонное отображение,* $\operatorname{dom} \varphi = X$ *и выполнено условие* (10). *Тогда при каждом* $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ *неравенство* (14) *имеет* s-*решение* y_ε, *последовательность которых* $\{y_\varepsilon\}$ *содержит подпоследовательность* $\{y_\tau\}$ *такую, что* $y_\tau \xrightarrow{w} y_0$ *в* X, $y_0 \in K$ *и является* s-*решением неравенства* (9).

1. *Мельник В. С.* О критических точках некоторых классов многозначных отображений // Кибернетика и системный анализ. – 1997. – № 2. – С. 87 – 98.
2. *Мельник В. С., Солонуха О. В.* О стационарных неравенствах с многозначными операторами // Там же. – № 3. – С. 74 – 89.
3. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 442 с.
4. *Browder F. E., Hess P.* Nonlinear mapping of monotone type in Banach spaces // J. Func. Anal. – 1972. – **11**, № 2. – P. 251 – 294.
5. *Обэн Ж. П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. – М.: Мир, 1988. – 510 с.
6. *Tsutsemi M.,Yaguda T.* Penalty method for variatianal inequalities and its error estimates // Funkc. ekvacioj. – 1999. – **42**, № 2. – P. 281 – 289.
7. *Mosco U.* A remark on a theorem of F. E. Browder // J. Math. Anal. and Appl. – 1967. – **20**. – P. 90 – 93.
8. *Lagota A.,Opial Z.* An approximation theorem for multi-valued mappings // Podst. Starow. – 1971. – **1**, № 1. – P. 71 – 75.

Получено 03.07.2000