УДК 517.959

Т. А. Мельник (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

УСЕРЕДНЕННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОЇ ПАРАБОЛІЧНОЇ ЗАДАЧІ В ГУСТОМУ ПЕРІОДИЧНОМУ З'ЄДНАННІ ТИПУ 3:2:1

We prove convergence theorem and obtain asymptotic estimates for a solution of parabolic type initial boundary-value problem in a junction Ω_ε (as $\varepsilon \to 0$) which consists of a domain Ω_0 and a great number N^2 of ε-periodically situated thin cylinders whose thickness is of order $\varepsilon = O(N^{-1})$.

Доведено теорему збіжності та одержано асимптотичні оцінки (коли $\varepsilon \to 0$) для розв'язку початково-крайової задачі параболічного типу в з'єднанні Ω_ε, яке складається з області Ω_0 та великої кількості N^2 ε-періодично розміщених тонких циліндрів товщиною порядку $\varepsilon = O(N^{-1})$.

1. Вступ. Асимптотичним методам дослідження крайових задач в областях, складним чином залежних від малого параметра (перфоровані області, частково перфоровані області), присвячено багато монографій та статей (наприклад, [1–7]).

У цій статті розглядається новий тип областей, залежних від малого параметра, характерною особливістю яких є їх специфічна зв'язність: в таких областях існують точки, відстань між якими є величиною порядку $O(\varepsilon)$, а довжина всіх кривих, які з'єднують ці точки і належать області, — величиною порядку $O(1)$. За рахунок цього еліптичні крайові задачі в таких областях втрачають еліптичність, коли $\varepsilon \to 0$ [8, 9]; спектральні задачі втрачають компактність в граничному переході [10, 11].

Під густим періодичним з'єднанням Ω_ε типу $m : k : d$ розуміємо область в $\mathbb{R}^n$, отриману приєднанням вздовж деякого багатовиду (зона з'єднання) на границі області Ω_0 (тіло з'єднання) великої кількості ε-періодично розміщених тонких областей. Тип з'єднання $m : k : d$ вказує: m, $m \le n$, — на граничну розмірність тіла з'єднання, k — на граничну розмірність зони з'єднання, а d — на граничну розмірність приєднувальних тонких областей.

Предметом дослідження крайових задач в таких з'єднаннях є вивчення асимптотичної поведінки розв'язків цих задач, коли $\varepsilon \to 0$, тобто коли кількість тонких приєднувальних областей необмежено зростає, а їх товщина прямує до нуля. Огляд результатів з цієї тематики наведено в роботах [9–11]. Зауважимо тільки, що вперше такі задачі почали досліджувати в [12, 13].

Модельне з'єднання Ω_ε типу $3:2:1$ є об'єднанням області

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^3 : x' \in K, 0 < x_3 < \gamma(x')\}$$

та великої кількості N тонких циліндрів

$$G_\varepsilon = \bigcup_{i,j=0}^{N-1} G_\varepsilon(i,j),$$

$$G_\varepsilon(i,j) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (\varepsilon^{-1}x_1 - i, \varepsilon^{-1}x_2 - j) \in \omega, -l < x_3 < 0\},$$

тобто Ω_ε — це внутрішність об'єднання $\overline{\Omega_0} \cup \overline{G_\varepsilon}$. Тут $x' = (x_1, x_2)$; $K = (0, a)^2$; γ є додатною неперервно диференційовною функцією на $\overline{K}$, $\gamma_0 := \max_{x \in \overline{K}} \gamma(x) > 0$; N — велике натуральне число, тому величина $\varepsilon = a/N$ є малим дискретним параметром, який характеризує відстань між тонкими циліндрами та їх товщину; плоска область ω, границя якої є гладкою, разом із своїм замиканням належить кругу $\{x' \in \mathbb{R}^2 : (x_1 - 1/2)^2 + (x_2 - 1/2)^2 < \rho_0^2 < 1/4\}$.

В області Ω_ε розглянемо початково-крайову параболічну задачу і вивчимо асимптотичну поведінку розв'язку, коли $\varepsilon \to 0$. Задача для рівняння Пуассона та спектральна задача в такому з'єднанні були досліджені в роботах [9, 11].

2. Постановка задачі. Нагадаємо, що $W_2^{1,0}(\Omega_\varepsilon \times (0, T))$ — гільбертовий простір з скалярним добутком

$$(u, v)_{\varepsilon, T} := (u, v)_{W_2^{1,0}(\Omega_\varepsilon \times (0,T))} = \int\limits_{\Omega_\varepsilon \times (0,T)} \left(uv + \sum_{i=0}^{3} \partial_{x_i} u \, \partial_{x_i} v \right) dx\, dt,$$

де $\partial_{x_i} u = \partial u / \partial x_i$. Норму, породжену цим добутком, будемо позначати $\|\cdot\|_{\varepsilon, T}$.

Нехай задано функції $f_\varepsilon(x, t), (x, t) \in \Omega_0 \times [0, +\infty)$, та $\varphi_\varepsilon(x', t), (x', t) \in K \times \times [0, +\infty)$. Будемо вважати, що за просторовими змінними вони задовольняють умову Ліпшиця з константами, які не залежать від параметра ε та змінної t, а їхні носії по просторових змінних зосереджені відповідно в областях Ω_0 та в K. Крім цього, вважаємо, що для довільного $T > 0$ $f_\varepsilon \in L_2(\Omega_0 \times (0, T))$, $\varphi_\varepsilon \in \in L_2(K \times (0, T))$ і

$$f_\varepsilon \to f_0 \quad \text{в} \quad L_2(\Omega_0 \times (0, T)), \qquad \text{коли } \varepsilon \to 0, \tag{1}$$

$$\varphi_\varepsilon \to \varphi_0 \quad \text{в} \quad L_2(K \times (0, T)), \qquad \text{коли } \varepsilon \to 0. \tag{2}$$

Функція $u_\varepsilon \in W_2^{1,0}(\Omega_\varepsilon \times (0, T))$ називається узагальненим розв'язком наступної задачі:

$$\begin{aligned}
\partial_t u_\varepsilon &= \alpha^+ \Delta_x u_\varepsilon + f_\varepsilon(x, t), && (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \\
\varepsilon \partial_t u_\varepsilon &= \alpha^- \Delta_x u_\varepsilon, && (x, t) \in G_\varepsilon \times (0, T), \\
\partial_\nu u_\varepsilon &= 0, && (x, t) \in \Upsilon_\varepsilon \times (0, T), \\
\alpha^- \partial_\nu u_\varepsilon &= -\varepsilon \beta_0 u_\varepsilon, && (x, t) \in \Gamma_\varepsilon \times (0, T), \\
\alpha^- \partial_\nu u_\varepsilon &= \varphi_\varepsilon(x', t), && (x, t) \in Q_{\varepsilon, -l} \times (0, T), \\
u_\varepsilon(x', +0, t) &= u_\varepsilon(x', -0, t), && (x', t) \in Q_{\varepsilon, 0} \times (0, T), \\
\alpha^+ \partial_{x_3} u_\varepsilon(x', +0, t) &= \alpha^- \partial_{x_3} u_\varepsilon(x', -0, t), && (x', t) \in Q_{\varepsilon, 0} \times (0, T), \\
u_\varepsilon(x, 0) &= 0, && x \in \Omega_\varepsilon,
\end{aligned} \tag{3}$$

якщо для будь-якої функції $\psi \in W_2^1(\Omega_\varepsilon \times (0, T))$, $\psi(x, T) = 0$, виконується інтегральна тотожність

$$\int_0^T \left(-\int\limits_{\Omega_0} u_\varepsilon \partial_t \psi \, dx - \varepsilon \int\limits_{G_\varepsilon} u_\varepsilon \partial_t \psi \, dx + \alpha^\pm \int \nabla_x u_\varepsilon \cdot \nabla_x \psi \, dx + \varepsilon \beta_0 \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u_\varepsilon \psi \, d\sigma_x \right) dt =$$

$$= \int_0^T \left(\int\limits_{\Omega_0} f_\varepsilon \psi \, dx + \int\limits_{Q_{\varepsilon, -l}} \varphi_\varepsilon(x', t) \psi \, dx' \right) dt. \tag{4}$$

В задачі (3) прийнято такі позначення: $\partial_\nu = \partial / \partial \nu$ — зовнішня нормальна похідна; $\Upsilon_\varepsilon = \partial \Omega_\varepsilon \cap \{x : x_3 \ge 0\}$; Γ_ε — бічні поверхні тонких циліндрів G_ε; $Q_{\varepsilon, -d} = = G_\varepsilon \cap \{x_3 = -d\}$ — поперечні перерізи циліндрів. Константи $\alpha^\pm$ та β_0 є додатними. В інтегральній рівності (4) інтеграл $\alpha^{\pm}\int$ — сума двох інтегралів $\alpha^{+}\int_{\Omega_0} + \alpha^{-}\int_{G_\varepsilon}$.

Задачу (3) можна фізично трактувати як процес передачі теплоти в тіло Ω_0 через систему тонких добре теплопровідних циліндрів G_ε, на стінках яких відбувається невелика втрата теплоти.

Використовуючи нерівність

$$\int\limits_{G_\varepsilon} u^2 dx \le C\left(\varepsilon^2 \int\limits_{G_\varepsilon} \left|\nabla_{x'} u\right|^2 dx + \varepsilon \int\limits_{\Gamma_\varepsilon} u^2\, d\sigma_x\right), \qquad u \in H^1(G_\varepsilon),$$

стандартним способом [14] доводимо апріорну оцінку для розв'язку задачі (3):

$$\| u_\varepsilon \|_{\varepsilon, T} + \max_{t\in[0,T]} \| u_\varepsilon(\cdot, t) \|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le C\left(\| f_\varepsilon \|_{L_2(\Omega_0\times(0,T))} + \| \varphi_\varepsilon \|_{L_2(K\times(0,T))} \right). \quad (5)$$

3. Теорема збіжності. Важливу роль в таких теоремах відіграє оператор продовження. На жаль, для густих періодичних з'єднань не існує рівномірно обмеженого по ε в W_2^1 оператора продовження [9]. Відсутність такого оператора є однією з принципових проблем при дослідженні крайових задач в таких з'єднаннях. В цій статті використаємо підхід, розроблений в [9].

Внаслідок умов, накладених на функції f_ε та φ_ε, при достатньо малих значеннях параметра ε маємо оцінки

$$\varepsilon^{-2} \int\limits_0^T \int\limits_{\Omega_0} \left(f_\varepsilon(x + \varepsilon \bar{e}_i, t) - f_\varepsilon(x, t) \right)^2 dx\, dt \le C_1 T,$$

$$\varepsilon^{-2} \int\limits_0^T \int\limits_K \left(\varphi_\varepsilon(x' + \varepsilon \bar{e}_i, t) - \varphi_\varepsilon(x', t) \right)^2 dx'\, dt \le C_2 T, \qquad i = 1, 2,$$

де $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$. За допомогою цих оцінок так само, як в [9], доводимо наступну лему.

Лема 1. *Для розв'язку задачі* (3) *існує оператор продовження*

$$\mathbf{P}_\varepsilon : W_2^{1,0}(\Omega_\varepsilon \times (0, T)) \to W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T)), \qquad \Omega = \Omega_0 \cup K \times (-l, 0],$$

такий, що

$$\| \mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon \|_{W_2^{1,0}(\Omega\times(0,T))} \le C_0. \quad (6)$$

В (6) *константа* C_0 *залежить від* T, *від констант* C_1 *і* C_2 *та від* L_2-*норм функцій* f_ε *і* φ_ε.

Теорема 1. *Для розв'язку задачі* (3) *маємо*

$$\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon \to v_0 \quad \text{слабко в} \quad W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T)) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0,$$

де функція

$$v_0(x, t) = \begin{cases} v_0^+(x, t), & (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T), \\ v_0^-(x, t), & (x, t) \in D \times (0, T), \qquad D = K \times (-l, 0), \end{cases} \quad (7)$$

є узагальненим розв'язком наступної задачі:

$$\partial_t v_0^+ = \alpha^+ \Delta_x v_0^+ + f_0(x, t), \qquad (x, t) \in \Omega_0 \times (0, T),$$

$$\partial_\nu v_0^+ = 0, \qquad (x, t) \in \partial\Omega_0 \cap \{x_3 > 0\} \times (0, T),$$

$$\alpha^- |\omega|\, \partial_{x_3}^2 v_0^- = l_\omega \beta_0 v_0^-, \qquad (x, t) \in D \times (0, T),$$

$$\begin{aligned}
\alpha^- \partial_{x_3} v_0^-(x', -l, t) &= -\varphi_0(x', t), && (x', t) \in K \times (0, T), \\
v_0^+(x', 0, t) &= v_0^-(x', 0, t), && (x', t) \in K \times (0, T), \\
\alpha^+ \partial_{x_3} v_0^+(x', 0, t) &= \alpha^- |\omega| \partial_{x_3} v_0^-(x', 0, t), && (x', t) \in K \times (0, T), \\
v_0^+(x, 0) &= 0, && x \in \Omega_0 .
\end{aligned} \tag{8}$$

Доведення. Враховуючи нерівність (6) та лему 3 з гл. 6 [15], можемо вибрати підпослідовність $\{\varepsilon'\}$ (перепозначимо її знову через $\{\varepsilon\}$) таку, що коли $\varepsilon \to 0$, то

$$\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon \to v_0 \quad \text{слабко в} \quad W_2^{1,0}(\Omega \times (0, T)),$$

$$\forall g \in L_2(0, T) \qquad \int_0^T (\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon)(\cdot, t) g(t)\, dt \to \int_0^T v_0(\cdot, t) g(t)\, dt \tag{9}$$

слабко в $H^1(\Omega)$ та сильно в $L_2(\Omega)$, причому

$$\partial_{x_i} \int_0^T (\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon)(\cdot, t) g(t)\, dt = \int_0^T \partial_{x_i} (\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon)(\cdot, t) g(t)\, dt \to$$

$$\to \partial_{x_i} \int_0^T v_0(\cdot, t) g(t)\, dt = \int_0^T \partial_{x_i} v_0(\cdot, t) g(t)\, dt \qquad \text{слабко в} \quad L_2(\Omega).$$

Інтегруванням частинами доводимо тотожність

$$\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} \psi(x)\, d\sigma_x = \varepsilon \int_{G_\varepsilon} \left(\nabla_{\eta'} Y\right)\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{x'} \psi(x)\, dx + \frac{l_\omega}{|\omega|} \int_{G_\varepsilon} \psi(x)\, dx \quad \forall \psi \in H^1(G_\varepsilon), \tag{10}$$

де $\eta' = x'/\varepsilon$, $|\omega|$ — площа плоскої області ω, l_ω — довжина границі області ω, а функція $Y(\eta')$ — це 1-періодично продовжений по η_1 та η_2 розв'язок задачі

$$\Delta_{\eta'} Y = l_\omega |\omega|^{-1} \quad \text{в} \quad \omega, \qquad \partial_{\nu(\eta')} Y = 1 \quad \text{на} \quad \partial\omega, \qquad \int_\omega Y(\eta')\, d\eta' = 0.$$

Тепер, використавши оператор продовження $\mathbf{P}_\varepsilon$ та рівність (10), перепишемо інтегральну тотожність (4) з пробною функцією $g(t)\psi(x)$ ($g \in C^1([0\, T])$, $g(T) = 0$, $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, множина таких функцій є щільною в $W_2^{1,0}$) у вигляді

$$- \varepsilon \int_0^T \int_{G_\varepsilon} u_\varepsilon(x, t) \partial_t g(t) \psi(x)\, dx\, dt - \int_{\Omega_0} \left(\int_0^T u_\varepsilon(x, t) \partial_t g(t)\, dt \right) \psi(x)\, dx +$$

$$+ \alpha^+ \int_{\Omega_0} \nabla_x \left(\int_0^T u_\varepsilon(x, t)\, g(t)\, dt \right) \cdot \nabla_x \psi(x)\, dx +$$

$$+ \alpha^- \int_D \chi_\omega\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \nabla_x \left(\int_0^T (\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon)(x, t) g(t)\, dt \right) \cdot \nabla_x \psi(x)\, dx +$$

$$+ \varepsilon \beta_0 \int_0^T \int_{G_\varepsilon} \left(\nabla_{\eta'} Y\right)\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \cdot \nabla_{x'} (u_\varepsilon(x, t) \psi(x))\, dx\, g(t)\, dt +$$

$$+ \beta_0 \frac{l_\omega}{|\omega|} \int_D \chi_\omega\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \left(\int_0^T (\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon)(x, t) g(t)\, dt \right) \psi(x)\, dx =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega_0} f_\varepsilon(x,t) g(t) \psi(x)\, dx\, dt + \int_0^T \int_K \chi_\omega\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \varphi_\varepsilon(x',t) g(t) \psi(x',-l)\, dx'\, dt, \qquad (11)$$

де $\chi_\omega(\eta')$, $\eta' = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$, — 1-періодична по η' функція,

$$\chi_\omega(\eta') = \begin{cases} 1, & \eta' \in \omega, \\ 0, & \eta' \in [0,1]^2 \setminus \omega. \end{cases}$$

Перейдемо до границі в (11). Легко переконатись, що границя першого доданка в першому рядку та границя доданка в четвертому рядку рівності (11) дорівнюють нулю. Згідно з (6) послідовності

$$\chi_\omega\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \partial_{x_i} \left(\int_0^T (\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon)(\cdot, t) g(t)\, dt \right), \qquad i = 1, 2, 3, \qquad (12)$$

є обмеженими в $L_2(D)$. Тому можемо вибрати підпослідовність послідовності $\{\varepsilon\}$, знову перепозначивши її через $\{\varepsilon\}$, і знайти слабкі границі γ_i, $i = 1, 2, 3$, цих послідовностей, а далі перейти до границі в (11). Враховуючи, що $\chi_\omega(x'/\varepsilon) \to |\omega|$ слабко в L_2, коли $\varepsilon \to 0$, та співвідношення (1), (2), (9), отримуємо

$$-\int_{\Omega_0} \int_0^T v_0^+(x,t) \partial_t g(t)\, dt\, \psi(x) dx + \alpha^+ \int_{\Omega_0} \int_0^T \nabla_x \left(v_0^+(x,t)\right) \cdot \nabla_x \psi(x) g(t)\, dt\, dx +$$

$$+ \alpha^- \int_D \gamma_i(x) \partial_{x_i} \psi(x)\, dx + \beta_0 l_\omega \int_D \int_0^T v_0^-(x,t) g(t) \psi(x) dt\, dx =$$

$$= \int_0^T \int_{\Omega_0} f_0(x,t) g(t) \psi(x)\, dx\, dt + |\omega| \int_0^T \int_K \varphi_0(x',t) g(t) \psi(x',-l)\, dx'\, dt. \qquad (13)$$

Далі методом підбору пробних функцій знайдемо величини γ_i, $i = 1, 2, 3$.

Оскільки

$$\int_D \chi_\omega\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \partial_{x_3} \left(\int_0^T (\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon)(x,t) g(t) dt \right) \phi(x) dx = -\int_D \chi_\omega\left(\frac{x'}{\varepsilon}\right) \int_0^T (\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon)(x,t) g(t) dt\, \partial_{x_3} \phi dx$$

для всіх $\phi \in C_0^\infty(D)$, то

$$\gamma_3(x) = |\omega| \int_0^T \partial_{x_3} v_0^-(x,t) g(t)\, dt, \qquad x \in D.$$

Для того щоб визначити γ_1 та γ_2, розглянемо інтегральну тотожність (4) відповідно з такими тестовими функціями:

$$\psi_i(x,t) = \varepsilon g(t) \begin{cases} 0, & x \in \Omega_0, \\ Y_i\left(\frac{x_i}{\varepsilon}\right) \phi(x), & x \in G_\varepsilon, \end{cases}$$

де $g \in C^1([0\, T])$, $g(T) = 0$, $\phi \in C_0^\infty(D)$, $Y_i(\eta_i) = -\eta_i + 1/2 + [\eta_i]$, $i = 1, 2$, $[x]$ — ціла частина числа x. Очевидно, що $\psi_i \in W_2^1(\Omega_\varepsilon \times (0, T))$. В результаті отримаємо

$$\int_D \chi_\omega(x'/\varepsilon) \partial_{x_i} \left(\int_0^T (\mathbf{P}_\varepsilon u_\varepsilon)(x,t) g(t)\, dt \right) \phi(x)\, dx = O(\varepsilon), \qquad \varepsilon \to 0,$$

звідки випливає, що $\gamma_1 \equiv \gamma_2 \equiv 0$.

Таким чином, маємо таку інтегральну тотожність:

$$- \int_{\Omega_0}\int_0^T v_0^+(x,t)\partial_t g(t)\,dt\,\psi(x)dx + \alpha^+ \int_{\Omega_0}\int_0^T \nabla_x\big(v_0^+(x,t)\big)\cdot\nabla_x\psi(x)g(t)\,dt\,dx +$$

$$+ \alpha^-|\omega|\int_D\int_0^T \partial_{x_3}v_0^-(x,t)\partial_{x_3}\psi(x)g(t)\,dt\,dx + \beta_0 l_\omega \int_D\int_0^T v_0^-(x,t)g(t)\psi(x)\,dt\,dx =$$

$$= \int_0^T\int_{\Omega_0} f_0(x,t)g(t)\psi(x)\,dx\,dt + |\omega|\int_0^T\int_K \varphi_0(x',t)g(t)\psi(x',-l)\,dx'\,dt$$

для всіх $g\in C^1([0,T])$, $g(T)=0$ та $\psi\in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Ця інтегральна тотожність означає, що функція v_0 є узагальненим розв'язком задачі (8), яку будемо називати усередненою для задачі (3). Як бачимо, задача (8) не є параболічною, тому що в області $D = K\times(-l,0)$ (паралелепіпед, який заповнюється тонкими циліндрами в граничному переході) отримали звичайне диференціальне рівняння другого порядку відносно змінної x_3. Слід зауважити, що на бічних гранях цього паралелепіпеда не задається жодних крайових умов.

Доведемо, що задача (8) має єдиний розв'язок. Розв'язуючи спочатку задачу

$$\alpha^-|\omega|\partial^2_{x_3}v_0^- = \beta_0 l_\omega v_0^-, \qquad x_3\in(-l,0),$$

$$\alpha^-\partial_{x_3}v_0^-(x',-l,t) = -\varphi_0(x',t), \qquad v_0^-(x',0,t) = v_0^+(x',0,t),$$

де змінні x' та t входять як параметри, отримуємо

$$v_0^-(x',x_3,t) = \frac{1}{\cosh\rho_0 l}\left(v_0^+(x',0,t)\cosh\big(\rho_0(l+x_3)\big) - \frac{1}{\alpha^-\rho_0}\varphi_0(x',t)\sinh(\rho_0 x_3)\right), \tag{14}$$

$$\rho_0 = \sqrt{\beta_0 l_\omega/\alpha^-|\omega|}.$$

Підставляючи (14) в другу умову спряження задачі (8), одержуємо наступну параболічну задачу в тілі з'єднання Ω_0:

$$\begin{aligned}
&\partial_t v_0^+ = \alpha^+\Delta_x v_0^+ + f_0(x,t), && (x,t)\in\Omega_0\times(0,T),\\
&\partial_\nu v_0^+ = 0, && (x,t)\in\Upsilon_0\times(0,T),\\
&\alpha^+\partial_{x_3}v_0^+(x',0,t) = \\
&= \frac{|\omega|}{\cosh\rho_0 l}\Big(\alpha^-\rho_0\sinh(\rho_0 l)v_0^+(x',0,t) - \varphi_0(x',t)\Big), && (x',t)\in Q_{\varepsilon,0}\times(0,T),\\
&v_0^+(x,0) = 0, && x\in\Omega_0,
\end{aligned} \tag{15}$$

де $\Upsilon_0 = \partial\Omega_0 \cap \{x_3>0\}$.

Очевидно, що задача (15) має єдиний розв'язок, а значить, і задача (8) також.

Внаслідок єдиності розв'язку задачі (8) всі наведені вище міркування мають місце для будь-якої підпослідовності послідовності $\{\varepsilon\}$, вибраної на початку доведення. Теорему доведено.

4. Побудова асимптотичного наближення та асимптотичні оцінки. Якщо праві частини задачі (3) мають спеціальний вигляд, скажімо, вони розвиваються в асимптотичні ряди за степенями ε, то можна побудувати перші члени асимптотики для розв'язку. Використаємо підхід, викладений в роботах [9, 10, 16].

Далі будемо вважати, що праві частини не залежать від параметра ε; $f(x,t)$, $(x,t)\in \Omega_0\times[0,+\infty)$ — гладка функція, носій якої за просторовими змінними зосереджений в області Ω_0, а при $t=0$ функція і всі її похідні дорівнюють нулю. Такі ж самі припущення будемо накладати на функцію $\varphi(x',t)$, $(x',t)\in \in K\times[0,+\infty)$. Крім цього, припустимо, що плоска область ω є симетричною відносно прямих $\{x_1=1/2\}$ та $\{x_2=1/2\}$.

Для розв'язку u_ε будемо шукати перші члени асимптотичного розвинення в тілі з'єднання Ω_0 у вигляді

$$u_\varepsilon \approx v_0^+(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k v_k^+(x,t,\varepsilon), \tag{16}$$

а в тонкому циліндрі $G_\varepsilon(i,j)$—

$$u_\varepsilon \approx v_0^-(x,t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k v_k^-\Big(x,t,\eta_1^{(i)},\eta_2^{(j)}\Big),\quad \eta_1^{(i)}=\varepsilon^{-1}x_1-i,\quad \eta_2^{(j)}=\varepsilon^{-1}x_2-j. \tag{17}$$

Розклавши формально функції v_k^- в ряди Тейлора за змінними x_1 та x_2 в околі точки $x_1^{(i)}=\varepsilon(i+1/2)$, $x_2^{(j)}=\varepsilon(j+1/2)$, перепишемо (17) у вигляді

$$u_\varepsilon \approx v_0^-(i,j,x_3,t)+\sum_{k=1}^{2}\varepsilon^k V_k^{i,j}\Big(x_3,t,\eta_1^{(i)},\eta_2^{(j)}\Big)+O(\varepsilon^3),\ x\in\ G_\varepsilon(i,j), \tag{18}$$

де

$$V_k^{i,j} = \sum_{m=0}^{k}\frac{1}{m!}\left(\left(\eta_1^{(i)}-\frac12\right)\frac{\partial}{\partial x_1}+\left(\eta_2^{(j)}-\frac12\right)\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^m v_{k-m}^-\Big(i,j,x_3,t,\eta_1^{(i)},\eta_2^{(j)}\Big), \tag{19}$$

$$v_k^-(i,j,\ldots)=v_k^-\Big(x_1^{(i)},x_2^{(j)},\ldots\Big).$$

Підставимо (18) у відповідні рівняння задачі (3) замість u_ε. Збираючи коефіцієнти при однакових степенях ε і прирівнюючи їх до нуля, отримуємо

$$\begin{cases} \Delta_{\eta'}V_1^{i,j}(x_3,t,\eta')=0, & \eta'\in\omega,\\ \partial_{\nu_{\eta'}}V_1^{i,j}(x_3,t,\eta')=0, & \eta'\in\partial\omega,\end{cases} \tag{20}$$

$$\begin{cases} -\alpha^-\Delta_{\eta'}V_2^{i,j}(x_3,t,\eta')=\alpha^-\partial_{x_3}^2 v_0^-(i,j,x_3,t), & \eta'\in\omega,\\ \alpha^-\partial_{\nu_{\eta'}}V_2^{i,j}(x_3,t,\eta')=-\beta_0 v_0^-(i,j,x_3,t), & \eta'\in\partial\omega.\end{cases} \tag{21}$$

Тут $\eta'=\Big(\eta_1^{(i)},\eta_2^{(j)}\Big)$, змінні $x_3\in(-l,0)$ та $t\in(0,T)$ розглядаються як параметри. З (20) випливає, що функція $V_1^{i,j}$ не залежить від η'. Обмежившись побудовою перших членів асимптотичних розвинень, покладемо $V_1^{i,j}=0$. Тоді на підставі (19) маємо

$$v_1^-(i,j,x_3,t,\eta') = -\partial_{x_1}v_0^-(i,j,x_3,t)\left(\eta_1^{(i)}-\frac12\right)-\partial_{x_2}v_0^-(i,j,x_3,t)\left(\eta_2^{(i)}-\frac12\right).$$

Записуючи умову існування розв'язку задачі (21), дістанемо співвідношення

$$|\omega|\alpha^-\partial_{x_3}^2 v_0^-(i,j,x_3,t) = l_\omega\beta_0 v_0^-(i,j,x_3,t),\quad x_3\in(-l,0),\quad t\in(0,T). \tag{22}$$

Оскільки точки $\Big(x_1^{(i)},x_2^{(j)}\Big)$, $i,j=0,1,\ldots,N-1$, утворюють ε-сітку в K, то можна вважати, що рівняння (22) має справджуватись для всіх точок $x'\in K$. Зрозуміло, що це рівняння внаслідок умов на основах $Q_{\varepsilon,-l}$ в (3) потрібно доповнити такою самою умовою при $x_3=-l$.

Підставляючи (16) у відповідні рівняння задачі (3), легко записати співвідношення для функції v_0^+.

Умови для функцій $v_0^\pm$ в зоні з'єднання K отримуються в результаті узгодження зовнішніх асимптотичних розвинень (16), (18) та внутрішнього асимптотичного розвинення

$$u_\varepsilon \approx v_0^+(x', 0, t) + \varepsilon \sum_{i=1}^{3} Z_i(\eta)\partial_{x_i} v_0^+(x', 0, t) + \ldots, \qquad \eta = \varepsilon^{-1} x, \tag{23}$$

а саме, асимптотика перших членів зовнішніх розвинень, коли $x_3 \to \pm 0$, має збігатися з асимптотикою перших членів внутрішнього розвинення, коли $\eta_3 \to \to \pm\infty$.

В (23) $\{Z_i\}$ — функції типу примежового шару, які задано в об'єднанні нескінченних напівциліндрів

$$\Pi^- = \omega \times (-\infty, 0) \quad \text{та} \quad \Pi^+ = (0,1)\times(0,1)\times(0,+\infty).$$

Зрозуміло, що внаслідок періодичності розміщення тонких циліндрів функції $\{Z_i\}$ мають бути 1-періодичними за змінними η_1 та η_2. Інші співвідношення для цих функцій можна одержати при підстановці (23) в задачу (3). В результаті маємо

$$\begin{aligned}
-\alpha^\pm \Delta_\eta Z_i(\eta) &= 0, && \eta \in \Pi^\pm,\\
\partial^k_{\eta_j} Z_i(\eta)\big|_{\eta_j=0} &= \partial^k_{\eta_j} Z_i(\eta)\big|_{\eta_j=1}, && \eta \in \partial\Pi^+ \cap \{\eta_3 > 0\},\ k=0,1,\ j=1,2,\\
\partial_{\eta_3} Z_i(\eta', 0) &= 0, && (\eta', 0) \in \partial\Pi^+ \setminus \omega,\\
\partial_{\nu_{\eta'}} Z_i(\eta) &= -\delta_{1,i}\,\nu_1(\eta') - \delta_{2,i}\,\nu_2(\eta'), && \eta \in \partial\Pi^- \setminus \omega,\\
Z_i(\eta', +0) &= Z_i(\eta', -0), && \eta' \in \omega,\\
\alpha^+ \partial_{\eta_3} Z_i(\eta', +0) &= \alpha^- \partial_{\eta_3} Z_i(\eta', -0), && \eta' \in \omega,
\end{aligned}$$

де $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера.

Розв'язність та властивості розв'язків таких задач були вивчені в роботі [9]. З результатів цієї роботи випливає, що функції Z_i мають таку асимптотику:

$$Z_i(\eta) = \begin{cases} O(\exp(-\delta_i \eta_3)), & \eta_3 \to +\infty, \\ -\eta_i + 1/2 + O(\exp(\delta_i \eta_3)), & \eta_3 \to -\infty, \end{cases} \qquad i = 1, 2;$$

$$Z_3(\eta) = \begin{cases} C_3 + \eta_3 + O(\exp(-\delta_3 \eta_3)), & \eta_3 \to +\infty, \\ \dfrac{\alpha^+}{\alpha^- |\omega|}\eta_3 + O(\exp(\delta_3 \eta_3)), & \eta_3 \to -\infty, \end{cases} \tag{24}$$

де δ_i, $i = 1, 2, 3$, — деякі додатні константи. Крім цього, ці функції мають певну симетрію відносно осі $(1/2, 1/2, \eta_3)$: Z_1 — непарна по η_1 і парна по η_2, Z_2 — парна по η_1 і непарна по η_2, а Z_3 — парна як по η_1, так і по η_2.

Розвиваючи перші члени $v_0^\pm$ зовнішніх асимптотичних рядів (16) та (18) в ряд Тейлора відносно змінної x_3 в околі точки $(x', 0)$ і переходячи до змінної η_3, маємо

$$v_0^\pm(x, t) = v_0^\pm(x', 0, t) + \varepsilon \eta_3\, \partial_{x_3} v_0^\pm(x', 0, t) + O\big(\varepsilon^2 \eta_3^2\big).$$

Прирівнюючи коефіцієнти цих розвинень до коефіцієнтів в асимптотиці (коли

$\eta_3 \to \pm\infty$) перших членів внутрішнього ряду (23) з урахуванням (24), отримуємо $v_0^+(x',0,t) = v_0^-(x',0,t)$ та $\alpha^+\partial_{x_3}v_0^+(x',0,t) = \alpha^-|\omega|\,\partial_{x_3}v_0^-(x',0,t)$.

Таким чином, перші члени $v_0^\pm$ асимптотичних розвинень (16) та (18) мають задовольняти співвідношення (8), тобто v_0^- визначається рівністю (14), а v_0^+ — розв'язок задачі (15).

Апроксимаційну функцію R_ε, яка належить простору $W_2^{1,0}(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$, будуємо як суму перших членів зовнішніх та внутрішнього розвинень за вирахуванням однакових членів їх асимптотик (коли $x_3 \to \pm 0$ та $\eta_3 \to \pm\infty$ відповідно), тому що вони просумовані двічі. В результаті отримуємо

$$R_\varepsilon(x,t) = v_0^+(x,t) +$$

$$+\ \varepsilon\chi_0(x_3)\sum_{i=1}^{3}\Big(Z_i(\eta) - \delta_{i,3}\eta_3\Big)\partial_{x_i}v_0^+(x',0,t), \qquad \eta = \varepsilon^{-1}x, \quad x \in \Omega_0; \tag{25}$$

$$R_\varepsilon(x,t) = v_0^-(x,t) + \varepsilon\Bigg(Y_1(\eta_1)\partial_{x_1}v_0^-(x,t) + Y_2(\eta_2)\partial_{x_2}v_0^-(x,t) +$$

$$+\ \chi_0(x_3)\sum_{i=1}^{3}\Bigg(Z_i(\eta) - \delta_{i,1}Y_1(\eta_1) - \delta_{i,2}Y_2(\eta_2) -$$

$$-\ \delta_{i,3}\frac{\alpha^+}{\alpha^-|\omega|}\eta_3\Bigg)\partial_{x_i}v_0^+(x',0,t)\Bigg), \qquad \eta = \varepsilon^{-1}x, \quad x \in G_\varepsilon. \tag{26}$$

Тут $\chi_0 \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \le \chi_0 \le 1$, і

$$\chi_0(x_3) = \begin{cases} 1, & |x_3| \le \theta_0/2, \\ 0, & |x_3| \ge \theta_0, \end{cases}$$

де $\theta_0 = 2^{-1}\min\{\gamma_0, l\}$; $Y_i(\eta_i) = -\eta_i + 1/2 + [\eta_i]$.

Підставляючи R_ε в задачу (3) замість u_ε і оцінюючи нев'язки аналогічно тому, як це зроблено в [10] (для нев'язок на бічних поверхнях циліндрів використовуємо тотожність (10)), знаходимо, що для довільної функції $\psi \in W_2^1(\Omega_\varepsilon \times (0,T))$, $\psi(x,T) = 0$, виконується інтегральна тотожність

$$\int_0^T\Bigg(-\int_{\Omega_0}R_\varepsilon\partial_t\psi\,dx - \varepsilon\int_{G_\varepsilon}R_\varepsilon\partial_t\psi\,dx + \alpha^\pm\int\nabla_x R_\varepsilon\cdot\nabla_x\psi\,dx + \varepsilon\beta_0\int_{\Gamma_\varepsilon}R_\varepsilon\psi\,d\sigma_x\Bigg)dt -$$

$$-\int_0^T\Bigg(\int_{\Omega_0}f_\varepsilon\psi\,dx + \int_{Q_{\varepsilon,-l}}\varphi_\varepsilon(x',t)\psi\,dx'\Bigg)dt = F_\varepsilon(\psi), \tag{27}$$

$$|F_\varepsilon(\psi)| \le c(\delta)\varepsilon^{1-\delta}\|\psi\|_{W_2^1(\Omega_\varepsilon\times(0,T))} \quad \text{для довільного } \delta > 0. \tag{28}$$

Віднімаючи тотожності (27) та (4) і використовуючи оцінки (5) та (28), доводимо наступну теорему.

Теорема 2. *Нехай виконуються припущення, зроблені на початку пункту* 4. *Тоді різниця між розв'язком* u_ε *задачі* (3) *і апроксимаційною функцією* R_ε *задовольняє таку оцінку*:

$$\|u_\varepsilon - R_\varepsilon\|_{\varepsilon,T} + \max_{t\in[0,T]}\|u_\varepsilon(\cdot,t) - R_\varepsilon(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le c_1(\delta)\varepsilon^{1-\delta} \tag{29}$$

для будь-якого $\delta > 0$.

***Наслідок* 1.** *З* (29) *випливає*

$$\max_{t\in[0,T]}\|u_\varepsilon(\cdot,t)-v_0(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)} \le c_2(\delta)\varepsilon^{1-\delta}, \quad \delta > 0, \tag{30}$$

де v_0 — *розв'язок усередненої задачі* (8).

Висновок. Симетрія області ω відносно прямих $\{x_1 = 1/2\}$ та $\{x_2 = 1/2\}$ є тільки технічною умовою. Вона допомагає уникнути громіздких обчислень та отримати кращі оцінки нев'язок для апроксимаційної функції R_ε.

Якщо праві частини задачі (3) розвиваються в асимптотичні ряди за степенями ε, тобто $f_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k f_k(x)$, то можна побудувати наступні члени асимптотичних розвинень (16), (17) та (23).

На підставі оцінок (29) та (30) можна зробити висновок, що при вирішенні прикладних проблем в густих періодичних з'єднаннях з достатньою правдоподібністю можемо використовувати усереднені задачі, уникаючи тим самим громіздких обчислень. Як було доведено в цій роботі, замість дослідження властивостей розв'язку задачі (3) можемо досліджувати властивості розв'язку відповідної усередненої задачі (8) або (15), яка є набагато простішою.

Із наведеного дослідження бачимо, що без суттєвих змін в міркуваннях та доведеннях можна отримати аналогічні результати для задачі гіперболічного типу.

1. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. – Киев: Наук. думка, 1974. – 276 с.
2. *Bensoussan A., Lions J., Papanicolau G.* Asymptotic analysis for periodic strusture. – Amsterdam: North Nolland, 1978. – 368 p.
3. *Sanchez-Palencia E.* Non-homogeneous media and vibration theory. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1980. – 472 p.
4. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. – М.: Наука, 1984. – 352 с.
5. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1990. – 310 с.
6. *Скрыпник И. В.* Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. – М.: Наука, 1990. – 448 с.
7. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. – М.: Физматлит., 1993. – 461 с.
8. *Sanchez-Hubert J., Sanchez-Palencia E.* Vibration and coupling of continuous systems. – Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1989. – 397 p.
9. *Mel'nyk T. A.* Homogenization of the Poisson equation in a thick periodic junction // Z. Analysis und ihre Anwendungen. – 1999. – **18**, № 4. – P. 953–975.
10. *Мельник Т. А., Назаров С. А.* Асимптотика решения спектральной задачи Неймана в области типа „густого гребешка" // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1996. – **19**. – С. 138–174.
11. *Mel'nyk T. A.* Asymptotic analysis of a spectral problem in a periodic thick junction of type 3 : 2 : : 1 // Math. Methods in the Appl. Sci. – 2000. – **23**, № 4. – P. 341–346.
12. *Сузиков Г. В., Хруслов Е. Я.* О прохождении звуковых волн через тонкие каналы в отражающем слое // Теория функций, функцион. анализ и их приложения. – 1976. – **5**. – С. 35–49.
13. *Котляров В. П., Хруслов Е. Я.* О предельном граничном условии одной задачи Неймана // Там же. – 1970. – **10**. – С. 83–96.
14. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. – М.: Наука, 1973. – 407 с.
15. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1983. – 424 с.
16. *Назаров С. А.* Соединения сингулярно вырождающихся областей различных предельных размерностей // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. – 1995. – **18**. – С. 1–78.

Одержано 21.06.2000