УДК 519.85

О. О. Ємець, Л. М. Колечкіна (Полтав. техн. ун-т)

ЗАДАЧА ОПТИМІЗАЦІЇ НА ПЕРЕСТАВЛЕННЯХ З ДРОБОВО-ЛІНІЙНОЮ ЦІЛЬОВОЮ ФУНКЦІЄЮ: ВЛАСТИВОСТІ МНОЖИНИ ДОПУСТИМИХ РОЗВ'ЯЗКІВ

We consider a problem of optimization on permutations with a linear-fractional objective function. We investigate properties of the domain of permissible solutions of the problem.

Розглядається задача оптимізації на переставленнях з дробово-лінійною функцією цілі. Досліджено властивості області допустимих розв'язків задачі.

В останній час опубліковано велику кількість робіт, присвячених дослідженню задач комбінаторної оптимізації, зокрема задач на евклідових комбінаторних множинах та з дробово-лінійними функціями цілі.

Дослідження спрямовані як на вивчення властивостей цільових функціоналів на комбінаторних множинах, так і на виявлення і обґрунтування властивостей допустимих множин в таких задачах, розробку методів їх розв'язання. Різним аспектам розв'язання цих проблем присвячено роботи [1 – 15]. При цьому часто використовується апарат з [16]. В даній роботі розглядається задача оптимізації з дробово-лінійною функцією цілі на переставленнях.

Введемо необхідну термінологію та наведемо факти з [5], які потрібні для викладу результатів. Мультимножиною називатимемо сукупність елементів, серед яких можуть бути й однакові. Мультимножина A задається основою $S(A)$, тобто множиною всіх її різних елементів, і кратністю — числом повторень кожного елемента основи цієї мультимножини. Множину перших k натуральних чисел позначимо J_k, а $J_k^0 = J_k \cup \{0\}$.

Нехай задано мультимножину дійсних чисел $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ з основою $s(G) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, де $e_j \in R^1$ для будь-якого $i \in J_n$, та кратностями елементів $k(e_j) = \eta_j$, де $i \in J_n$, $n \le k$, і при цьому

$$g_1 \ge g_2 \ge \ldots \ge g_k \ge 0, \quad e_1 > e_2 > \ldots > e_n \ge 0, \tag{1}$$

$$k_0 = 0, \quad k_1 = \eta_1, \quad k_2 = \eta_1 + \eta_2, \ldots, k_n = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n, \tag{2}$$

а $g_1 = \ldots = g_{k_1} = e_1, \ldots, g_{k_{n-1}+1} = \ldots = g_k = e_n$.

Множина всіх упорядкованих k-вибірок з мультимножини G утворює загальну множину переставлень $E_{kn}(G) \subset R^k$. Опуклу оболонку множини $E_{kn} = E_{kn}(G)$ називають загальним переставним багатогранником $\Pi_{kn}(G)$, який описується [5, 9] системою

$$\sum_{i \in \omega} x_i \le \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i \quad \forall \omega \subset J_k, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{k} x_i = \sum_{i=1}^{k} g_i, \tag{4}$$

де $|\omega|$ — кількість елементів в ω.

Наведемо необхідний далі критерій вершини $\Pi_{kn}(G)$ [5]: якщо $x = (x_1, \ldots, x_k)$ — вершина $\Pi_{kn}(G)$, то

$$\{\alpha_1^1\} \subset \{\alpha_1^2, \alpha_2^2\} \subset \ldots \subset \{\alpha_1^{k-1}, \ldots, \alpha_{k-1}^{k-1}\} \subset \{\alpha_1^k, \ldots, \alpha_k^k\} = J_k,$$

$$\sum_{t=1}^{i} x_{\alpha_t^i} = \sum_{t=1}^{i} g_i \qquad \forall i \subset J_k,$$

де α_k^k — останній елемент в J_k (верхній індекс — номер підмножини, нижній — номер елемента в підмножині), і навпаки, якщо виконуються зазначені вище умови, то x — вершина загального переставного багатогранника $\Pi_{kn}(G)$.

Постановка задачі: знайдемо пару $\left\langle F(x^*), x^* \right\rangle$ таку, що

$$F(x^*) = \max_{x \in R^k} \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} d_i x_i}, \qquad x^* = \arg\max_{x \in R^k} \frac{\sum_{i=1}^{k} c_i x_i}{\sum_{i=1}^{k} d_i x_i} \tag{5}$$

при умові

$$X = (x_1, \ldots, x_k) \in E_{kn}(G) \subset R^k, \tag{6}$$

$$c_i, d_i \in R^1.$$

Від задачі (5), (6) перейдемо до задачі з лінійною функцією цілі. Для цього позначимо

$$y_0 = \left\{ \sum_{i=1}^{k} d_i x_i \right\}^{-1}, \qquad y_i = x_i y_0, \qquad i \in J_k. \tag{7}$$

Тоді $\alpha\big(E_{kn}(G)\big) = E \subset R^{k+1}$, де α — відображення (7). Вважатимемо $y_0 > 0$ (інакше можна змінити знак чисельника), $y_i \geq 0$, $i \in J_k$. Для задач на переставленнях з лінійною цільовою функцією важливими є властивості $\Pi_{kn}(G)$, оскільки відомо [5, 9], що $\operatorname{vert}\Pi_{kn}(G) = E_{kn}(G)$, де $\operatorname{vert} M$ — множина вершин багатогранника M.

Розглянемо образ $\Pi_{kn}(G)$ при відображенні α. Підставимо y_0, y_i в (3), (4):

$$\sum_{i \in \omega} y_i \leq \sum_{i=1}^{|\omega|} g_i y_0 \qquad \forall \omega \subset J_k, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{k} y_i = \sum_{i=1}^{k} g_i y_0, \tag{9}$$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i y_i = 1, \tag{10}$$

$$y_0 > 0, \qquad y_i \geq 0, \qquad \forall i \subset J_k.$$

Множину, що задана системою (8) – (10), позначимо $Q_{kn}(G) \subset R^{k+1}$. Тоді (5), (6) зведеться до знаходження впорядкованої пари

$$F(x^*) = F'(y^*) = \operatorname*{extr}_{y \in R^{k+1}} \sum_{i=1}^{k} c_i y_i, \qquad y^* = \arg\operatorname*{extr}_{y \in R^{k+1}} \sum_{i=1}^{k} c_i y_i \tag{11}$$

при умові

$$y = (y_0, ,y_1, \ldots, y_k) \in E \subset R^{k+1}. \tag{12}$$

Отже, вивчимо структуру опуклої оболонки E. В даній статті ставиться задача дослідити властивості допустимої множини в задачі (11), (12), до якої зводиться задача (5), (6). Спочатку розглянемо властивості $Q_{kn}(G)$.

Властивості множини $Q_{kn}(G)$. Як відомо [1, с. 17], опуклим конусом називається множина розв'язків системи однорідних лінійних нерівностей, а пірамідою — опукла оболонка багатогранника Q, що є основою піраміди, і точки, що не належить Q, яка є вершиною піраміди. Тому система (8), (9) визначає опуклий багатогранний конус $K_{kn}^0(G)$ з вершиною в $O(0, \ldots, 0)$, а (10) — гіперплощину, яка перерізає конус і не проходить через його вершину. Багатогранник $Q_{kn}(G)$ — основа піраміди. Для того щоб розглянути грані багатогранника $Q_{kn}(G)$, доведемо лему про грані конуса $K_{kn}^0(G)$.

Лема. 1. *Якщо* F — m*-грань* $(m \in J_{k-1})$ $K_{kn}^0(G)$, *то існують множини* $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_{k+1-m} = J_k$, *для яких нерівності в* (8) *перетворюються на рівності для довільного* $y \in F$ (F — *множина розв'язків системи, одержаної з* (8), (9) *заміною нерівностей в* (8) *рівностями для* $\omega = \omega_\sigma$ *при* $\sigma \in J_{k-m}$).

2. *Якщо для множин* $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_\lambda = J_k$ *нерівності в* (8) *замінити рівностями, то множина* F *розв'язків* (8), (9) *є* m*-гранню* $K_{kn}^0(G)$:

$$m = \dim F = (k+1) - \left\{ \lambda + \sum \left(|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1 \right) \right\}, \tag{13}$$

підсумовування ведеться за всіма $\sigma \in J_\lambda$, *для кожного з яких знайдеться таке* $\sigma \in J_n$, *що* $k_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}| \le |\omega_\sigma| \le k_j$ $(|\omega_0| = 0)$.

Доведення. 1. Нехай Ω — сукупність всіх підмножин $\omega \subseteq J_k$, для яких відповідні обмеження в (8), (9) є жорсткими для F, $\omega', \omega'' \in \Omega$. Покажемо, що $\omega' \cup \omega'' \in \Omega$ і $\omega' \cap \omega'' \in \Omega$. Якщо $y = (y_0, y_1, \ldots, y_k) \in F$, то

$$\sum_{i \in \omega' \cup \omega''} y_i + \sum_{i \in \omega' \cap \omega''} y_i = \sum_{i \in \omega'} y_i + \sum_{i \in \omega''} y_i = \sum_{i=1}^{|\omega'|} g_i y_0 + \sum_{i=1}^{|\omega''|} g_i y_0 \ge$$

$$\ge \sum_{i=1}^{|\omega' \cap \omega''|} g_i y_0 + \sum_{i=1}^{|\omega' \cup \omega''|} g_i y_0. \tag{14}$$

Співвідношення (14) випливає з рівностей $\omega' = A_1 \cup A_{12}$, $\omega'' = A_2 \cup A_{12}$, де $A_1 = \omega' \setminus \omega''$, $A_2 = \omega'' \setminus \omega'$, тоді $\omega' \cap \omega'' = A_{12}$, $\omega' \cup \omega'' = A_1 \cup A_2 \cup A_{12}$. Дослідимо нерівність в (14). Нехай

$$|A_1| = \alpha_1, \quad |A_2| = \alpha_2, \quad |A_{12}| = \alpha_{12}: \ |\omega'| = \alpha_1 + \alpha_{12},$$
$$|\omega''| = \alpha_2 + \alpha_{12}, \quad |\omega' \cup \omega''| = \alpha_1 + \alpha_{12} + \alpha_2, \quad |\omega' \cap \omega''| = \alpha_{12}. \tag{15}$$

Підставимо (15) в (14):

$$\sum_{i=1}^{\alpha_1 + \alpha_{12}} g_i y_0 + \sum_{i=1}^{\alpha_2 + \alpha_{12}} g_i y_0 \ge \sum_{i=1}^{\alpha_{12}} g_i y_0 + \sum_{i=1}^{\alpha_1 + \alpha_{12} + \alpha_2} g_i y_0.$$

Поділимо нерівність на y_0 $(y_0 > 0)$. Зауважимо, що в правій частині останньої нерівності другий доданок містить найбільшу кількість номерів i від 1 до $\alpha_1 + \alpha_{12} + \alpha_2$. Оскільки виконується (1), то (якщо тільки всі g_i від першого до $\alpha_1 + \alpha_{12} + \alpha_2$ не однакові) права частина в останній нерівності може бути меншою, ніж ліва. Але в системі (8), (9) містяться обмеження для $\omega = \omega' \cup \omega''$ і $\omega = \omega' \cap \omega''$, які при $y \in F$ перетворюються в рівності. Тому $\omega' \cap \omega'' \in \Omega$, $\omega' \cup \omega'' \in \Omega$, що й потрібно було показати.

Нехай для $\omega' \in \Omega$, $\omega'' \in \Omega$ при деякому $j \in J_n$ виконується умова

$$|\omega'| \le k_j \le |\omega''|. \tag{16}$$

Доведемо від супротивного, що $\omega' \subseteq \omega''$. Нехай $\omega' \not\subseteq \omega''$. Розглянемо

$$\sum_{i=1}^{|\omega'|} g_i y_0 + \sum_{i=1}^{|\omega''|} g_i y_0 =$$

$$= \sum_{i=1}^{|\omega' \cap \omega''|} g_i y_0 + \sum_{i=|\omega' \cap \omega''|+1}^{|\omega'|} g_i y_0 + \sum_{i=1}^{|\omega' \cup \omega''|} g_i y_0 - \sum_{i=|\omega''|+1}^{|\omega' \cup \omega''|} g_i y_0. \tag{17}$$

Друга і четверта суми в правій частині (17) містять однакове число доданків. В цьому переконаємося, підставивши (15) в (17):

$$\sum_{i=1}^{\alpha_1+\alpha_{12}} g_i y_0 + \sum_{i=1}^{\alpha_2+\alpha_{12}} g_i y_0 =$$

$$= \sum_{i=1}^{\alpha_{12}} g_i y_0 + \sum_{i=1+\alpha_{12}}^{\alpha_1+\alpha_{12}} g_i y_0 + \sum_{i=1}^{\alpha_1+\alpha_{12}+\alpha_2} g_i y_0 - \sum_{i=1+\alpha_{12}+\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_{12}+\alpha_2} g_i y_0. \tag{18}$$

Враховуючи (1), одержуємо

$$\sum_{i=1+\alpha_{12}}^{\alpha_1+\alpha_{12}} g_i y_0 - \sum_{i=1+\alpha_{12}+\alpha_2}^{\alpha_1+\alpha_{12}+\alpha_2} g_i y_0 > 0,$$

тому, відкидаючи різницю і беручи до уваги (16), маємо

$$\sum_{i=1}^{|\omega'|} g_i y_0 + \sum_{i=1}^{|\omega''|} g_i y_0 > \sum_{i=1}^{|\omega' \cap \omega''|} g_i y_0 + \sum_{i=1}^{|\omega' \cup \omega''|} g_i y_0,$$

що суперечить висновку, про рівність в (14). Враховуючи (1), необхідно розглянути такі випадки: 1) друга і четверта суми в (18) по i починаються з одного й того ж номера; 2) друга і четверта суми в (18) по i починаються з різних номерів i при умові, що g_i однакові. 1. Розглянемо різницю з (17)

$$\sum_{i=|\omega' \cap \omega''|+1}^{|\omega'|} g_i y_0 - \sum_{i=|\omega''|+1}^{|\omega' \cup \omega''|} g_i y_0.$$

Оскільки i починається з одного і того ж номера, то порівняємо нижні границі $|\omega' \cap \omega''|+1 = |\omega''|+1$, або $\alpha_{12} = \alpha_{12} + \alpha_2$, звідки $\alpha_2 = 0$. Тому $\omega'' \subseteq \omega'$, що суперечить зробленому раніше припущенню.

2. Розглянемо $G = \left\{g_1, \ldots, g_z, \ldots, g_\alpha \ldots, g_\beta, \ldots, g_n, \ldots, g_k\right\}$. Нехай $g_z = \ldots = g_\alpha = \ldots = g_\beta = \ldots = g_n = g$, $\omega' = \{\alpha, \alpha+1, \ldots, \alpha+\alpha_{12}+\alpha_1\}$, $\omega'' = \{\beta, \beta + 1, \ldots, \beta+\alpha_{12}+\alpha_2\}$, тоді $|\omega'| = \alpha_1 + \alpha_{12}$, $|\omega''| = \alpha_2 + \alpha_{12}$. З (1) маємо

$$k_0 = 0, \ldots, k_{t-2} = z-1, \ k_{t-1} = n, \quad k_t = p, \ldots, k_n = k, \tag{19}$$

звідки $0 \le z-1 < n < p \le k$. З другої та четвертої сум рівності (18)

$$z \le \alpha_{12} + 1 \le n, \quad z \le \alpha_1 + \alpha_{12} + \alpha_2 \le n, \tag{20}$$

де z — індекс деякого елемента g_j, $j \in J_k$, в мультимножині G.

Враховуючи умову (16) та співвідношення (15), одержуємо

$$\alpha_1 + \alpha_{12} \le k_j \le \alpha_2 + \alpha_{12}. \tag{21}$$

Для рівних g_i, де $i \in J_n \backslash J_{z-1}$, $\alpha > z-1$, $\beta \ge \alpha$, $\alpha_1 + \alpha_{12} + \alpha \le n$, $\beta + \alpha_{12} + \alpha_2 \le n$.

На підставі (20) та (21)

$$z \le \alpha_{12} + 1 \le \alpha_1 + \alpha_{12} \le \alpha_2 + \alpha_{12} < n. \tag{22}$$

Розглянемо два можливих випадки: 1) $\alpha_{12}+1=\alpha_1+\alpha_{12}$; 2) $\alpha_1+\alpha_{12}=\alpha_2+\alpha_{12}$. Для випадку 1 маємо $\alpha_1=1$, а для випадку 2 $\alpha_1=\alpha_2$. Об'єднуючи ці випадки і враховуючи (21), дістаємо $k_j=1+\alpha_{12}$, а з (20) маємо $z\le k_j\le n$. З (19) одержуємо випадок $k_{t-2}\le k_j\le k_{t-1}$, з якого випливають рівності $k_j=k_{t-2}==z-1$, $k_{j+1}=k_{t-1}=n$. Тоді виконуються співвідношення

$$k_j \le |\omega'| \le |\omega''| \le k_{j+1}. \tag{23}$$

Отже, $\omega'\subseteq\omega''$. Розглянемо ω', $\omega''\in\Omega$, для яких виконується (23) при кожному $j\in J_{p-1}$. З умови

$$|\omega'|+|\omega''| = |\omega'\cup\omega''|+|\omega'\cap\omega''| \tag{24}$$

і співвідношення (23) випливає

$$k_j \le |\omega'\cap\omega''| \le |\omega'\cup\omega''| \le k_{j+1}. \tag{25}$$

Переконаємося в цьому. Врахувавши умови (15) і (23), запишемо

$$k_j \le \alpha_1+\alpha_{12} \le \alpha_2+\alpha_{12} \le k_{j+1}. \tag{26}$$

Ліва частина (26) справджується для кожного $\alpha_1\ge 0$. Розглянемо $\min(\alpha_1+\alpha_{12})$. Оскільки при $\alpha_1=0$ мінімум $\alpha_{12}=|\omega'\cap\omega''|$, то перша частина (25) справджується, бо справджується нерівність

$$k_j \le \alpha_{12} \le k_{j+1}. \tag{27}$$

Розглянемо другу частину, записавши її з урахуванням (15) так: $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_{12}\le k_{j+1}$. Для ω', $\omega''\in\Omega$ згідно з (23) виконуються умови

$$k_j \le |\omega'| \le k_{j+1}, \tag{28}$$

$$k_j \le |\omega''| \le k_{j+1}. \tag{29}$$

Спочатку додамо співвідношення (28), (29):

$$2k_j \le |\omega'|+|\omega''| \le 2k_{j+1}, \tag{30}$$

$$2k_j \le \alpha_1+\alpha_{12}+\alpha_2+\alpha_{12} \le 2k_{j+1}, \tag{31}$$

а потім віднімемо (27) від (31):

$$k_j+(k_j-k_{j+1}) \le \alpha_1+\alpha_2+\alpha_{12} \le k_{j+1}+(k_{j+1}-k_j). \tag{32}$$

Ліва частина нерівності (32) доведена раніше. Розглянемо праву, враховуючи, що $k_{j+1}-k_j>0$. Можливі два випадки: 1) $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_{12}\le k_{j+1}\le k_{j+1}+(k_{j+1}-k_j)$; 2) $k_{j+1}\le\alpha_1+\alpha_2+\alpha_{12}\le k_{j+1}+(k_{j+1}-k_j)$. Почнемо з другого, враховуючи (27). Оскільки кількість елементів в ω', ω'' визначається формулами (15), то на підставі того, що α_1, α_2, α_{12} можуть дорівнювати нулю, можливі такі варіанти: А) $\alpha_1=0$, $k_j\le\alpha_{12}\le k_{j+1}\le\alpha_2+\alpha_{12}$, що неможливо згідно з (23); Б) $\alpha_2=0$, $k_j\le\alpha_{12}+\alpha_1\le k_{j+1}\le\alpha_1+\alpha_{12}$, що неможливо на підставі доведеного вище; В) $\alpha_{12}=0$, $k_j\le\alpha_1\le k_{j+1}\le\alpha_2+\alpha_{12}$, цей випадок виключається на підставі (23). Згідно з А) – В), можна зробити висновок, що другий випадок не виконується, тобто виконується перший випадок. Тому для ω', $\omega''\in\Omega$ має місце (25). Тепер для кожного $j\in J_{p-1}$ визначимо через Ω_j сукупність всіх підмножин $\omega\in\Omega$, для яких

$$k_j \le |\omega| \le k_{j+1}, \tag{33}$$

а через ω^*, ω^{**} — підмножини з Ω_j з мінімальним і максимальним числом елементів. З доведеного вище випливає, що якщо $\omega\in\Omega_j$, то

$$\omega^* \subseteq \omega \subseteq \omega^{**}. \tag{34}$$

Справедливо і обернене: якщо ω задовольняє (34), то $\omega \in \Omega_j$, тобто якщо $y \in \in F$ і $s \in \omega^{**} \setminus \omega^*$, то

$$\sum_{s \in \omega^{**} \setminus \omega^*} y_s = \left|\omega^{**} \setminus \omega^*\right| e_{j+1} y_0. \tag{35}$$

Переконаємося в цьому. Нехай $\omega^* = \left\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_j}\right\}$, $\omega^{**} = \left\{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{j+1}}\right\}$, ω^*, $\omega^{**} \in \Omega_j$, тобто для них обмеження в (8) є жорсткими, тому

$$y_{\alpha_1} + y_{\alpha_2} + y_{\alpha_{k_j}} = (g_1 + g_2 + \ldots + g_{k_j}) y_0,$$

$$y_{\alpha_1} + y_{\alpha_2} + \ldots + y_{\alpha_{k_j}} + y_{\alpha_{k_j+1}} + \ldots + y_{\alpha_{k_{j+1}}} =$$
$$= (g_1 + g_2 + \ldots + g_{k_j} + g_{k_j+1} + \ldots + g_{k_{j+1}}) y_0.$$

Віднявши першу рівність від другої і врахувавши (25) та (1), одержимо рівність (35), що й треба було показати.

Якщо $\overline{\omega} \in \Omega$ і $|\overline{\omega}| < k_1$, то для $\omega \subset \overline{\omega}$ виконується $\omega \in \Omega$. Розглянемо в Ω ланцюг множин $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_\lambda = J_k$. З наведених міркувань випливає, що якщо $y \in K_{kn}^0(G)$ перетворює при $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_\lambda = J_k$ нерівності з (8) в рівності, то для будь-якого $\omega \in \Omega$ відповідні нерівності в (8) перетворюються в рівності в точці y. Тобто, система жорстких обмежень для F, що задається підмножинами $\omega_1, \ldots, \omega_\lambda$, повна. З іншого боку, матриця цих обмежень має трикутний вигляд, тому вони лінійно незалежні. Звідси з урахуванням того, що $\dim F = m$, випливає рівність $\lambda = (k+1) - m$. Отже, перше твердження леми доведено.

2. Доведемо, що множина F — грань $K_{kn}^0(G)$. Позначимо, як і в п. 1, через Ω сукупність $\omega \subseteq J_k$, які визначають в (8) жорсткі для F обмеження. Покажемо, що $\omega \in \Omega$ тоді і тільки тоді, коли або ω збігається з однією з множин $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_\lambda$, або існують такі $j \in J_k$, $\sigma \in J_\lambda$, що $\omega_{\sigma-1} \subsetneq \omega \subsetneq \omega_\sigma$, та виконується (23): $k_{j-1} \le \left|\omega_{\sigma-1}\right| \le \left|\omega_\sigma\right| \le k_j$. Не порушуючи загальності міркувань, можна вважати, що $\omega_\sigma = \left\{1, \ldots, |\omega_\sigma|\right\}$ при $\sigma \in J_\lambda$. Розглянемо точку $y = (y_0, y_1, \ldots, y_k)$, поклавши

$$y_0 =$$
$$= \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{k} d_i g_{\alpha_i}\right)^{-1}, & i \in \omega_\sigma \setminus \omega_{\sigma-1},\ k_{j-1} \le \left|\omega_{\sigma-1}\right| \le \left|\omega_\sigma\right| \le k_j,\ j \in J_k, \alpha_j \in J_k; \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{k} d_i (g_{\alpha_i} + \varepsilon_i)\right)^{-1}, & \text{якщо } i = \left|\omega_\sigma\right| > k_j > \left|\omega_{\sigma-1}\right|,\ j \in J_k,\ \alpha_i \in J_k; \\ \left(\sum\limits_{i=1}^{k} d_i (g_{\alpha_i} - \varepsilon_i)\right)^{-1}, & \alpha_i \in J_k, \text{– в інших випадках,} \end{cases} \tag{36}$$

$$y_i =$$
$$= \begin{cases} g_i y_0, & \text{якщо } i \in \omega_\sigma \setminus \omega_{\sigma-1}, \text{ де } k_{j-1} \le \left|\omega_{\sigma-1}\right| \le \left|\omega_\sigma\right| \le k_j \text{ при } j \in J_k; \\ (g_i + \varepsilon_i) y_0, & \text{якщо } i = \left|\omega_\sigma\right| > k_j > \left|\omega_{\sigma-1}\right| \text{ при } j \in J_k; \\ (g_i - \varepsilon_i) y_0 & \text{– в інших випадках.} \end{cases}$$

Легко підібрати малі $\varepsilon_i > 0$ так, щоб $y \in F$. Очевидно, що для $\omega \subset J_k$, для яких не виконується (36), відповідні нерівності виконуються при y як строгі, тобто $\omega \notin \Omega$. Достатність умови (36) для виконання $\omega \in \Omega$ очевидна. Максимальне число лінійно незалежних жорстких обмежень для F обчислюється за формулою (13). Лему доведено.

***Наслідок* 1.** *Вершина конуса $K_{kn}^0(G)$ визначається системою $k+1$ рівнянь, яку одержимо з* (8), (9) *заміною нерівностей* (8) *на рівності для множин $\omega_1 \subset \ldots \subset \omega_k = J_k$, а одне, $(k+1)$-е, рівняння — заміною одієї нерівності* (8) *на рівність для довільної множини $\omega_i \subset J_k$, де $i \in J_k$.*

Теорема 1. 1. *Якщо F — m-грань $Q_{kn}(G)$, що визначається системою* (8) – (10), *то існують множини $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \ldots \subset \omega_{k-m} = J_k$, $m \in J_{k-1}^0$, для яких нерівності в* (8) *перетворюються на рівності для $y \in F$ (F — множина розв'язків системи, одержаної з* (8) – (10) *заміною нерівностей в* (8) *рівностями для $\omega = \omega_\sigma$ при $\sigma \in J_{k-m-1}$).*

2. *Якщо для множин $\omega_1 \subset \omega_2 \subset \ldots \subset \omega_\lambda = J_k$ нерівності в* (8) *замінити рівностями, то множина F розв'язків одержаної системи з* (8) – (10) *є m-гранню $Q_{kn}(G)$, вимірність якої*

$$m = \dim F = k - \left\{\lambda + \sum \left(|\omega_\sigma| - |\omega_{\sigma-1}| - 1\right)\right\}. \tag{37}$$

Підсумовування ведеться по $\sigma \in J_\lambda$, для кожного з яких знайдеться $j \in J_n$ таке, що $k_{j-1} \le |\omega_{\sigma-1}|$ та $|\omega_\sigma| \le k_j$ (вважаємо $|\omega_0| = 0$).

Доведення даної теореми випливає з леми. Для опису грані основи піраміди беремо ті ж самі множини $\omega_i \subseteq J_k$, $i \in J_k$, що й для опису грані конуса, і додаємо (10); грань, що одержуємо при такому наборі жорстких обмежень, на одиницю меншої вимірності (37), ніж грань конуса, оскільки до системи обмежень додається рівність, а, як відомо з [1], вимірність багатогранника в R^k дорівнює $k-r$, де r — ранг матриці жорстких обмежень багатогранника. Теорему доведено.

Нехай G — множина чисел $g_1 > \ldots > g_k \ge 0$, тобто $k = n$, тоді багатогранник $Q_{kn}(G)$ позначимо $Q_k^+(G)$.

***Наслідок* 2.** *Множина розв'язків системи* (8) – (10) *є i-гранню $Q_k^+(G)$ тоді і тільки тоді, коли кожне з цих розв'язків перетворює в рівності нерівності з* (8) – (10) *для множин $\omega_1, \ldots, \omega_{k-i-1}$, $i \in J_{k-1}^0$, що мають властивість*

$$\omega_1 \subset \omega_2 \subset \ldots \subset \omega_{k-i-1} \subset J_k. \tag{38}$$

Позначимо через V_k множину вершин основи піраміди $Q_{kn}(G)$; очевидно, що $V_k \subset R^{k+1}$.

***Наслідок* 3.** *Якщо $y = (y_0, y_1, \ldots, y_k) \in V_k$, то справедливі умови*

$$\{\alpha_1^1\} \subset \{\alpha_1^2, \alpha_2^2\} \subset \ldots \subset \{\alpha_1^{k-1}, \ldots, \alpha_{k-1}^{k-1}\} \subset \{\alpha_1^k, \ldots, \alpha_k^k\} = J_k, \tag{39}$$

$$\sum_{t=1}^{i} y_{\alpha_t^i} = \sum_{t=1}^{i} g_t y_0 \qquad \forall\, i \in J_k, \tag{40}$$

$$\sum_{t=1}^{k} d_t y_t = 1, \tag{41}$$

і навпаки, якщо виконуються умови (39) – (41), *то $y \in V_k$.*

Твердження. *Відображення α, що визначається формулами* (7), *задає взаємно однозначну відповідність між точками $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in E_{kn}(G) \subset R^k$ та $y = (y_0, y_1, \ldots, y_k) \in V_k$.*

Доведення. Нехай для G виконується (1). Точки

$$x^* = \left\{g_1, g_2, \ldots, g_\alpha, g_{\alpha+1}, \ldots, g_\beta, g_{\beta+1}, \ldots, g_t, \ldots, g_k\right\},$$
$$x^{**} = \left\{g_1, g_2, \ldots, g_\beta, g_{\alpha+1}, \ldots, g_\alpha, g_{\beta+1}, \ldots, g_t, \ldots, g_k\right\}$$

— вершини $\Pi_{kn}(G)$, утворені одна з одної переставленням компонент, рівних e_i, e_j, або координат g_α, g_β. Тоді за критерієм вершини $\Pi_{kn}(G)$ з [5], який наведено на початку статті, маємо

$$\left\{\alpha_1^1\right\} \subset \left\{\alpha_1^2, \alpha_2^2\right\} \subset \ldots \subset \left\{\alpha_1^\alpha, \ldots, \alpha_\alpha^\alpha\right\} \subset \ldots \subset \left\{\alpha_1^\beta, \ldots, \alpha_\alpha^\beta, \ldots, \alpha_\beta^\beta\right\} \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \left\{\alpha_1^k, \ldots, \alpha_\alpha^k, \ldots, \alpha_\beta^k, \ldots, \alpha_k^k\right\} = J_k,$$
$$\sum_{t=1}^{i} x_{\alpha_t^i} = \sum_{t=1}^{i} g_t \quad \forall\, i \in J_k.$$

Отже, для точки x^* вкладення набирають вигляду

$$\{1\} \subset \ldots \subset \{1, 2, \ldots, \alpha\} \subset \{1, 2, \ldots, \alpha, \alpha+1\} \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \{1, 2, \ldots, \alpha, \alpha+1, \ldots, \beta\} \subset \{1, \ldots, \alpha, \alpha+1, \ldots, \beta+1\} \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \{1, 2, \ldots, \alpha, \alpha+1, \ldots, \beta-1, \beta, \beta+1, \ldots, k\} = J_k,$$

а система така:

$$x_1 = g_1,$$
$$\ldots$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\alpha-1} + x_\alpha = g_1 + g_2 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha,$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$x_1 + \ldots + x_{\alpha-1} + x_\alpha + x_{\alpha+1} + \ldots + x_\beta + x_{\beta+1} = g_1 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha + \ldots + g_\beta + g_{\beta+1},$$
$$\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$
$$x_1 + \ldots + x_\alpha + x_{\alpha+1} + \ldots + x_\beta + x_{\beta+1} + \ldots + x_k =$$
$$= g_1 + \ldots + g_\alpha + \ldots + g_\beta + g_{\beta+1} + \ldots + g_k.$$

Для точки x^{**} справедливі такі умови:

$$\{1\} \subset \ldots \subset \{1, 2, \ldots, \beta\} \subset \{1, 2, \ldots, \beta, \alpha+1\} \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \{1, \ldots, \beta, \alpha+1, \ldots, \beta-1, \alpha\} \subset \{1, \ldots, \beta, \alpha+1, \ldots, \alpha, \beta+1\} \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \{1, 2, \ldots, \beta, \alpha+1, \ldots, \beta-1, \alpha, \beta+1, \ldots, k\} = J_k,$$

а система має вигляд

$$x_1 = g_1,$$
$$\ldots$$
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_{\alpha-1} + x_\beta = g_1 + g_2 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 + \ldots + x_{\alpha-1} + x_\beta + x_{\alpha+1} + \ldots + x_\alpha + x_{\beta+1} = g_1 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha + \ldots + g_\beta + g_{\beta+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_1 + \ldots + x_\beta + x_{\alpha+1} + \ldots + x_\alpha + x_{\beta+1} + \ldots + x_k =$$
$$= g_1 + \ldots + g_\alpha + \ldots + g_\beta + g_{\beta+1} + \ldots + g_k.$$

Тепер покажемо, що відображення α, яке задане умовою (7), переводить точки x^*, x^{**}, які є вершинами $\Pi_{kn}(G)$, в точки з V_k. Точка x^* при відображенні α переходить в точку y^* з координатами

$$y_0 = \left\{ d_1 g_1 + \ldots + d_\alpha g_\alpha + d_{\alpha+1} g_{\alpha+1} + \ldots + d_{\beta-1} g_{\beta-1} + d_\beta g_\beta + d_{\beta+1} g_{\beta+1} + \ldots + d_k g_k \right\}^{-1},$$
$$y_1 = g_1 y_0, \quad y_2 = g_2 y_0, \ldots, y_{\alpha-1} = g_{\alpha-1} y_0, \quad y_\alpha = g_\alpha y_0,$$
$$y_{\alpha+1} = g_{\alpha+1} y_0, \ldots, y_{\beta-1} = g_{\beta-1} y_0, \quad y_\beta = g_\beta y_0,$$
$$y_{\beta+1} = g_{\beta+1} y_0, \ldots, y_{k-1} = g_{k-1} y_0, \quad y_k = g_k y_0,$$

а точка x^{**} — в точку y^{**} с координатами

$$\bar{y}_0 = \left\{ d_1 g_1 + \ldots + d_\alpha g_\beta + d_{\alpha+1} g_{\alpha+1} + \ldots + d_{\beta-1} g_{\beta-1} + d_\beta g_\alpha + d_{\beta+1} g_{\beta+1} + \ldots + d_k g_k \right\}^{-1},$$
$$\bar{y}_1 = g_1 y_0, \quad \bar{y}_2 = g_2 y_0, \ldots, \bar{y}_{\alpha-1} = g_{\alpha-1} y_0, \quad \bar{y}_\alpha = g_\beta y_0,$$
$$\bar{y}_{\alpha+1} = g_{\alpha+1} y_0, \ldots, \bar{y}_{\beta-1} = g_{\beta-1} y_0, \quad \bar{y}_\beta = g_\alpha y_0,$$
$$\bar{y}_{\beta+1} = g_{\beta+1} y_0, \ldots, \bar{y}_{k-1} = g_{k-1} y_0, \quad \bar{y}_k = g_k y_0.$$

З порівняння координат точок маємо $y^* \neq y^{**}$, оскільки $\bar{y}_\alpha \neq y_\alpha$, $\bar{y}_\beta \neq y_\beta$. Доведемо тепер, що y^*, $y^{**} \in V_k$. За наслідком 3, якщо для $y \in R^{k+1}$ виконуються умови (39) – (41), то $y \in V_k$. Перевіримо це для y^*, y^{**}. Умова (41) для них виконується згідно з (7). Побудуємо для y^* на основі індексів координат такий ланцюг:

$$\{1\} \subset \{1, 2\} \subset \ldots \subset \{1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha\} \subset$$
$$\subset \{1, 2, \ldots, \alpha-1, \alpha, \alpha+1\} \subset \ldots \subset \{1, 2, \ldots, \alpha, \alpha+1, \ldots, \beta-1, \beta\} \subset$$
$$\subset \{1, 2, \ldots, \alpha, \alpha+1, \ldots, \beta-1, \beta, \beta+1\} \subset \ldots$$
$$\ldots \subset \{1, 2, \ldots, \alpha, \alpha+1, \ldots, \beta-1, \beta, \beta+1, \ldots, k\} = J_k.$$

Тоді отримаємо систему жорстких обмежень для цієї точки:

$$y_1 = g_1 y_0,$$
$$\ldots$$
$$y_1 + y_2 + \ldots + y_{\alpha-1} + y_\alpha = (g_1 + g_2 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha) y_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1 + \ldots + y_\alpha + y_{\alpha-1} + \ldots + y_\beta + y_{\beta+1} =$$
$$= \left(g_1 + \ldots + g_{\alpha-1} + g_\alpha + g_{\alpha+1} + \ldots + g_\beta + g_{\beta+1}\right) y_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_1 + \ldots + y_\alpha + \ldots + y_\beta + y_{\beta+1} + \ldots + y_k =$$
$$= \left(g_1 + \ldots + g_\alpha + \ldots + g_\beta + g_{\beta+1} + \ldots + g_k\right) y_0.$$

Отже, умови (39), (40) виконуються, аналогічно — для точки y^{**}. Тому y^*, $y^{**} \in V_k$ є образами точок x^*, $x^{**} \in \operatorname{vert} \Pi_{kn}(G)$.

Першу частину твердження доведено. Щоб довести другу частину, яка обернена до першої, достатньо вибрати будь-яку точку $y \in V_k$ і показати аналогічним чином, що її прообразом буде точка $x \in \operatorname{vert} \Pi_{kn}(G)$. Твердження доведено.

З твердження та рівності $\alpha\left(E_{kn}(G)\right) = E \subset R^{k+1}$ випливає, що $E \subset V_k$ і $V_k \subset E$, тобто $V_k = E$, а тому $\operatorname{vert} Q_{kn}(G) = E$.

Як відомо [1, с. 53], під суміжними вершинами багатогранника розуміють дві вершини, що лежать на одному ребрі. З урахуванням різних форм задання багатогранника можна одержати різні критерії суміжності його вершин. Якщо багатогранник M в просторі R^k задано в канонічній формі, то ребро такого багатогранника буде задаватися $(k-1)$-м лінійно незалежним жорстким обмеженням. А отже, означення суміжності вершин багатогранника, згідно з [1, с.

53], можна сформулювати так: дві вершини багатогранника, заданого в канонічній формі, є суміжними, коли системи їх жорстких лінійно незалежних обмежень відрізняються лише одним рівнянням.

Розглянемо критерій суміжності вершин в $Q_{kn}(G)$.

Теорема 2. *Вершинами* $Q_{kn}(G)$, *суміжними з вершиною*

$$\overline{g} = \left(\frac{1}{\sum_{t=1}^{k} g_{\alpha_t} d_t}; \frac{g_{\alpha_1}}{\sum_{t=1}^{k} g_{\alpha_t} d_t}; \frac{g_{\alpha_2}}{\sum_{t=1}^{k} g_{\alpha_t} d_t}; \ldots; \frac{g_{\alpha_k}}{\sum_{t=1}^{k} g_{\alpha_t} d_t} \right),$$

де $\alpha_j \in J_k$, $j \in J_k$, *є вершини, які одержані з* $\overline{g}$ *переставленням компонент, рівних* e_i, e_{i+1}, $i \in J_{n-1}$, *і тільки вони.*

Доведення. Оскільки піраміда розміщена в просторі R^{k+1}, то кожна вершина основи піраміди, згідно з теоремою 1 та наслідком 3, описується системою жорстких лінійно незалежних обмежень, яка складається з $k+1$ рівняння системи, що визначена умовами (39) – (41). Оскільки суміжні вершини лежать на одному ребрі багатогранника, то система лінійно незалежних жорстких обмежень, що описує це ребро, буде складатися з спільних k рівнянь, які входять в системи обмежень, що описують суміжні вершини. Кожне $(k-1)$-ше рівняння з систем жорстких обмежень, що задають суміжні вершини, буде відрізнятися своїми лівими частинами [1]. Це зумовлено переставленням компонент e_i, e_{i+1}, $i \in J_{n-1}$, що визначають координати точки $\overline{g}$.

Отже, щоб одержати вершини $Q_{kn}(G)$, суміжні до $\overline{g}$, потрібно переставити компоненти, рівні e_i, e_{i+1}, $i \in J_{n-1}$, що й потрібно було довести.

Наслідок 4. *Кожна вершина багатогранника* $Q_{kn}(G)$ *суміжна з вершиною піраміди, що знаходиться в точці* $O(0, \ldots, 0)$.

Теорема 3. *Кількість* r *суміжних з довільною вершиною* $Q_{kn}(G)$ *вершин дорівнює* $r = \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_4 + \ldots + \eta_{n-1}\eta_n + 1$.

Доведення. За теоремою 2, щоб з вершини

$$\overline{g} = \left(\frac{1}{\sum_{t=1}^{k} g_{\alpha_t} d_t}; \frac{g_{\alpha_1}}{\sum_{t=1}^{k} g_{\alpha_t} d_t}; \frac{g_{\alpha_2}}{\sum_{t=1}^{k} g_{\alpha_t} d_t}; \ldots; \frac{g_{\alpha_k}}{\sum_{t=1}^{k} g_{\alpha_t} d_t} \right),$$

де $\alpha_j \in J_k$, $j \in J_k$, одержати суміжну їй, треба переставити e_i, e_{i+1}, $i \in J_{n-1}$. Кількість елементів e_i дорівнює η_i, $i \in J_n$. Кількість суміжних, з $\overline{g}$ вершин, що одержується переставленням e_i, e_{i+1}, дорівнює $\eta_i \eta_{i+1}$ $i \in J_{n-1}$, а всіх $r = \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_4 + \ldots + \eta_{n-1}\eta_n$. Кожна вершина $Q_{kn}(G)$ суміжна з вершиною піраміди, тому $r = \eta_1\eta_2 + \eta_2\eta_3 + \eta_3\eta_4 + \ldots + \eta_{n-1}\eta_n + 1$, що й треба було довести.

Як відомо [5, с. 29] дві i-грані S_1^i, S_2^i $(k-1)$-багатогранника M називаються суміжними, якщо вони перерізаються по $(k-1)$-грані S^{i-1} цього багатогранника:

$$S_1^i \cap S_2^i = S^{i-1}, \quad i \in J_{k-2}. \tag{42}$$

Згідно з наслідком 2, для довільної i-грані $Q_k^+(G)$ існують множини $\omega_1, \ldots$ $\ldots, \omega_{k-i-1}$, $i \in J_{k-1}^0$. Позначимо сукупність цих множин для S_1^i, S_2^i відповідно через Ω_1^i, Ω_2^i. Сформулюємо критерій суміжності граней $Q_k^+(G)$.

Теорема 4. *Для того щоб дві* i*-грані* S_1^i *та* S_2^i *багатогранника* $Q_k^+(G)$ *були суміжними, необхідно і достатньо, щоб множина*

$$\Omega^{i-1} = \Omega_1^i \cup \Omega_2^i \tag{43}$$

визначала $(i-1)$-*грань* S^{i-1}, $i \in J_{k-2}$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай i — грані S_1^i та S_2^i багатогранника $Q_k^+(G)$. За наслідком 2, існують множини $\Omega_1^i = \{\omega_j^1\}_{j=1}^{k-i-1}$ для S_1^i та $\Omega_2^i = \{\omega_j^2\}_{j=1}^{k-i-1}$ для S_2^i, що задовольняють (38). Нехай виконується (42), тоді знову за наслідком 2 існує множина $\Omega^{i-1} = \{\omega_j\}_{j=1}^{k-i}$, яка відповідає грані S^{i-1} і задовольняє (38). Оскільки в точках грані S^{i-1} повинні одночасно виконуватися обмеження, що описують грані S_1^i та S_2^i, то має місце (43).

Достатність. Припустимо, що виконується умова (43), тоді з наслідку 2 випливає, що існують грані S_1^i та S_2^i, які визначаються множинами Ω_1^i та Ω_2^i, а в силу (43) маємо (42). Таким чином, доведено критерій суміжності граней багатогранника $Q_k^+(G)$.

Зазначимо, що одержані в статті властивості допустимої області задачі (5), (6), зокрема множини E допустимих розв'язків задачі (11), (12), дають можливість застосувати до розв'язування цих задач метод комбінаторного відсікання, наведений в [11, 12].

Інші одержані властивості задачі (5), (6), на думку авторів, можна використовувати при побудові методів і алгоритмів розв'язку задач з дробово-лінійною цільовою функцією та додатковими (в тому числі нелінійними) умовами.

1. *Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К.* Многогранники, графы, оптимизация. – М.: Наука, 1981. – 344с.
2. *Сергиенко И. В.* Математические модели и методы решения задач дискретной оптимизации. – Киев: Наук. думка, 1985. – 381с.
3. *Сергиенко И. В., Каспшицкая М. Ф.* Модели и методы решения на ЭВМ комбинаторных задач оптимизации. – Кив: Наук. думка, 1981. – 288с.
4. *Шор Н. З., Соломон Д. И.* Декомпозиционные методы в дробно-линейном программировании. – Кишинев: Штиинца, 1989. – 204 с.
5. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
6. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О., Ємець Є. М.* Множини полірозміщень в комбінаторній оптимізації // Допов. НАН України. – 1999. – № 8. – С. 37 – 41.
7. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Ємець О. О., Валуйська О. О.* Про існування опуклого продовження функцій, які задані на гіперсфері // Там же. –1998. – № 2. – С. 128 – 133.
8. *Стоян Ю. Г., Яковлев С. В., Ємец О. А., Валуйская О. А.* Построение выпуклых продолжений для функций, заданных на гиперсфере // Кибернетика и системный анализ. – 1998. – № 2. – С. 27 – 37.
9. *Стоян Ю. Г., Емец О. А.* О комбинаторных задачах размещения прямоугольников // Экономика и мат. методы. – 1985. – **21**, вып.5. – С.868 – 881.
10. *Павлов О. А., Павлова Л. О.* Принцип розпаралелювання обчислень як засіб підвищення ефективності ПДС-алгоритмів для важкорозв'язувальних комбінаторних задач // Наук. вісті НТУУ „КПІ". – 1997. – № 1. – С. 22 – 26.
11. *Емец О. А., Емец Е. М., Колечкина Л. Н.* Использование метода отсечений при раскрое // Радиоэлектроника и информатика. – 1998. – № 3. – С. 114 – 117.
12. *Емец О. А.* Об одном методе отсечения для задач комбинаторной оптимизации // Экономика и мат. методы. – 1997. – **33**, вып.4. – С. 120 – 129.
13. *Емец О. А.* Об оптимизации линейных и выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1994. – № 6. – С. 855 – 869.
14. *Емец О. А.* Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 680 – 691.
15. *Емец О. А.* Комбинаторная модель и приближенный метод с априорной оценкой решения оптимизационной задачи размещения разноцветных прямоугольников // Экономика и мат. методы. – 1993. – **29**, вып. 2. – С. 294 – 304.
16. *Черников С. Н.* Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.

Одержано 23.03.98,
після доопрацювання – 11.04.2000