УДК 517.53

М. В. Заболоцький (Львів. ун-т)

АСИМПТОТИКА ДОБУТКІВ БЛЯШКЕ, ЛІЧИЛЬНА ФУНКЦІЯ НУЛІВ ЯКИХ Є ПОВІЛЬНО ЗРОСТАЮЧОЮ

For $z \to 1$, we find the asymptotics of the Blaschke product with positive zeros whose counting function $n(t)$ is slowly increasing, i.e., $n((t+1)/2) \sim n(t)$ as $t \to 1$.

Знайдено асимптотику при $z \to 1$ добутку Бляшке з додатними нулями, лічильна функція $n(t)$ яких є повільно зростаючою, тобто $n((t+1)/2) \sim n(t)$ при $t \to 1$.

1. Вступ та формулювання результатів. Нехай f — ціла трансцендентна функція, $f(0)=1$, $n(t)$ — лічильна функція її нулів. Ж. Валірон [1] показав, що якщо всі нулі функції f від'ємні і $n(t) \sim t^{\rho}$, $t \to \infty$, ρ — неціле число, то

$$\ln f(re^{i\theta}) \sim \frac{\pi}{\sin \pi\rho} e^{i\rho\theta} r^{\rho}, \quad r \to \infty, \tag{1}$$

де $\ln f(z)$ — однозначна в куті $\{z : -\pi < \arg z < \pi\}$ гілка многозначної функції $\operatorname{Ln} f(z)$, $\ln f(0) = 0$.

В [1] також доведено, що якщо f має тільки від'ємні нулі і нецілий порядок ρ, а

$$\ln|f(r)| \sim \frac{\pi}{\sin \pi\rho} r^{\rho}, \quad r \to \infty,$$

то $n(t) \sim t^{\rho}$, $t \to \infty$.

Простіше це твердження довів Е. Тітчмарш [2]. Теореми, в яких за відомою асимптотикою функції $n(t)$ робиться висновок про асимптотику функції $\ln f(z)$, називають теоремами типу Валірона, а теореми, в яких за відомою асимптотикою логарифма модуля цілої функції $f(z)$ на скінченній множині променів робиться висновок про асимптотику лічильної функції $n(t)$ нулів f, — теоремами типу Валірона – Тітчмарша.

Нехай (a_n) — послідовність комплексних чисел таких, що $0 < |a_1| \leq \leq |a_2| \leq \ldots \leq |a_n| \leq \ldots < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |a_n|) < +\infty$. Тоді функція вигляду

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n}{|a_n|} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z}$$

називається добутком Бляшке і є аналітичною в одиничному крузі $\{z : |z| < < 1\}$. Добутки Бляшке є важливим підкласом аналітичних в одиничному крузі функцій з обмеженою неванліннівською характеристикою.

В [3, 4] доведено аналог теореми типу Валірона для канонічних добутків Нафталевича – Джрбашяна – Цудзі роду p, $p \geq 0$, $p = [\rho]$, $\rho > 0$, з додатними нулями, тобто для аналітичних в $\{z : |z| < 1\}$ функцій вигляду

$$\pi_p(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1 - |a_k|^2}{1 - z\bar{a}_k}\right) \exp\left\{\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \left(\frac{1 - |a_k|^2}{1 - z\bar{a}_k}\right)^n\right\},$$

лічильна функція нулів яких задовольняє умову

$$n(t, \pi_p) \sim \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\rho}, \quad t \to 1.$$

При $p=0$ канонічні добутки Нафталевича – Джрбашяна – Цудзі відрізняються від добутків Бляшке сталим множником $\prod_{k=1}^{\infty}|a_k|$.

Тому з цих результатів випливає [4], що якщо нулі $B(z)$ додатні,

$$n(t,B) \sim \left(\frac{1}{1-t}\right)^{\rho}, \quad t \to 1,$$

то для $0<|\theta|<\pi/2$ виконується

$$\ln B\left(1-re^{-i\theta}\right) \sim \frac{\pi}{\sin \pi\rho} e^{i\rho\theta}\left(e^{-\pi i\rho \operatorname{sign}\theta}-1\right) r^{-\rho}, \quad r \to 0, \tag{2}$$

де $\ln B(z)$ — однозначна в області $\{z: |z|<1, \ z \notin [a_1, 1)\}$ гілка $\operatorname{Ln} B(z)$ така, що $\ln B(0)<0$.

В [5] отримано теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку. Наведемо аналог теореми Валірона:

Якщо нулі f від'ємні,

$$n(t) \sim t^{\rho(t)}, \quad t \to \infty, \tag{3}$$

то для $-\pi<\theta<\pi$

$$\ln f(re^{i\theta}) = N(r) + i\theta r^{\rho(r)} + o(r), \quad r \to \infty, \tag{4}$$

де $\rho(r)$ *— нульовий уточнений порядок,* $N(r)=\int_0^r n(t)/t\,dt$.

Нагадаємо [6, с. 69], що уточненим порядком $\rho(r)$ називають неперервно диференційовну на $[0,+\infty)$ функцію, що задовольняє умови: 1) $\rho(r) \geq 0$ на $[0,+\infty)$; 2) $\rho(r) \to \rho$, $r \to \infty$; 3) $\rho'(r) r \ln r \to 0$, $r \to \infty$.

У випадку нульового уточненого порядку додатково вимагатимемо, щоб функція $V(r)=r^{\rho(r)}$ монотонно зростала до $+\infty$ при $r \to \infty$. Легко бачити, що функція $V(r)$ є повільно зростаючою на $[1,+\infty)$, тобто $V(2r) \sim V(r)$.

Якщо замість (3) $n(t)$ задовольняє сильнішу умову, то замість (4) можемо вказати асимптотику $\ln f$ з точністю до $o(\varepsilon(r)V(r))$, де $\varepsilon(r)=\rho(r)+ +\rho'(r) r \ln r \to 0$, $r \to \infty$.

Теорема 1. *Нехай* $V(r)=r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$ *— нульовий уточнений порядок такий, що* $V_1(r)=dV(r)/d\ln(r)=V(r)\varepsilon(r)\uparrow+\infty$, $V_2(r)=dV_1(r)/d\ln(r)=o(V_1(r))$ *при* $r \to \infty$.

Якщо f — ціла функція нульового порядку, нулі якої від'ємні і

$$n(r) = V(r) + o(\varepsilon(r)V(r)), \quad r \to \infty, \tag{5}$$

то для $z=re^{i\theta}$, $-\pi<\theta<\pi$,

$$\ln f\left(re^{i\theta}\right) = N(r) + i\theta V(r) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3}-\theta^2\right)V(r)\varepsilon(r) + o(V(r)\varepsilon(r)), \quad r \to \infty, \tag{6}$$

причому остання рівність виконується рівномірно відносно θ *в довільному куті* $-\pi+\tau \leq \theta < \pi-\tau$, $0<\tau<1$.

Зауваження 1. Співвідношення (4) та (6) залишаються справедливими для випадку довільної повільно зростаючої функції $V(r)$, а не тільки для функції вигляду $r^{\rho(r)}$. Дійсно [7, с. 11], існує неперервно диференційовна зростаюча на $[0,+\infty)$ функція $L(r)$ така, що $V(r) \sim L(r)$, $r \to +\infty$. Тоді функція $\rho(r) = =\ln^{+} L(r)/\ln(r)$ буде нульовим уточненим порядком і $V(r) \sim r^r$, $r \to +\infty$.

Використовуючи результати статті [5] та теорему 1, знаходимо асимптотику $\ln B(z)$ у випадку нульового порядку функції $n(t)$.

Функцію $\nu(t)$ будемо називати повільно зростаючою в точці 1, якщо $\nu(t)$

— невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, 1)$ функція така, що $\nu((1+t)/2) \sim \nu(t)$ при $t \to 1$. Будемо вважати, що $\nu(0) = 0$.

Зауважимо (див., наприклад, [8, с. 81]), що добуток Бляшке є мероморфною в $\mathbb{C}$ функцією, за винятком множини граничних точок нулів $B(z)$. Тому, якщо нулі $B(z)$ додатні, $\ln B(z)$ буде означати однозначну гілку $\operatorname{Ln} B(z)$ в області $\{z: z \in \mathbb{C},\ z \notin [a_1, +\infty)\}$.

Теорема 2. *Нехай нулі добутку Бляшке* $B(z)$ *додатні і задовольняють умову*

$$n(t, B) \sim \nu(t), \quad t \to 1, \tag{7}$$

де $\nu(t)$ — *повільно зростаюча в точці* 1 *функція. Тоді для* $0 < |\theta| < \pi$

$$\ln B\left(1 - re^{-i\theta}\right) = -\pi i \operatorname{sign} \theta\, \nu(1-r) + o(\nu(1-r)), \quad r \to 0, \tag{8}$$

причому співвідношення (8) *виконується рівномірно відносно* θ *в довільному куті* $\delta \le |\theta| \le \pi - \delta$, $0 < \delta < 1$.

Якщо замість (7) накласти на $n(t, B)$ сильнішу умову, то отримаємо значно точнішу асимптотику.

Теорема 3. *Нехай* $\nu(t)$ — *повільно зростаюча в точці* 1 *функція така, що*

$$\nu_1(r) = \frac{d\nu(r)}{d(-\ln(1-r))} \uparrow +\infty, \quad \nu_2(r) = \frac{d\nu_1(r)}{d(-\ln(1-r))} = o(\nu_1(r)), \quad r \to 1.$$

Якщо $B(z)$ — *добуток Бляшке з додатними нулями, які задовольняють умову*

$$n(t) = \nu(t) + o(\nu_1(t)), \quad t \to 1,$$

то для $0 < |\theta| < \pi$

$$\ln B\left(1 - re^{-i\theta}\right) = -\pi i \operatorname{sign} \theta\, \nu(1-r) - \frac{\pi}{2}(\pi - 2|\theta|)\nu_1(1-r) + o(\nu_1(1-r)), \quad r \to 0, \tag{9}$$

причому рівність (9) *виконується рівномірно відносно* θ, $\delta \le |\theta| \le \pi - \delta$, $\delta > 0$.

Зауваження 2. З (1) та (4) (див. також (6)) видно, що якщо порядок цілої функції f додатний, то $\ln|f(z)|$ і $\arg f(z)$ мають однакову швидкість зростання при $z \to \infty$ на відміну від випадку нульового порядку, коли $\ln|f(z)|$ зростає набагато швидше, ніж $\arg f(z)$, оскільки $r^{\rho(r)} = o(N(r))$, $r \to \infty$, причому головний член асимптотики $\ln|f(z)|$ не залежить від аргументу змінної z ($\ln|f(z)| \sim N(r)$, $r \to \infty$).

Зауваження 3. З (2) та (8) (див. також (9)) видно, що коли лічильна функція $n(t)$ нулів добутку Бляшке має порядок ρ, $0 < \rho < 1$, то $\ln|B(z)|$ і $\arg B(z)$ зростають з однаковою швидкістю при $z \to 1$, а у випадку нульового порядку функції $n(t)$ швидкість зростання $\arg B(z)$ вже більша, ніж $\ln|B(z)|$, оскільки $\nu_1(r) = o(\nu(t))$ при $t \to 1$. Зауважимо також, що у випадку нульового порядку функції $n(t)$ головний член асимптотики $\arg B(z)$ залежить тільки від знаку аргументу змінної z.

Зауваження 4. З формули (див., наприклад, [9, с. 51])

$$\ln B(z) = \int_0^1 \ln \frac{t - z}{1 - tz}\, dn(t) = \int_0^1 \frac{(1-z)^2 n(t)\, dt}{(z-t)(1-tz)}$$

для добутку Бляшке $B(z)$ з додатними нулями випливає, що $\ln B(z) = O(1)$ при $z \to e^{i\varphi}$, $0 < \varphi < 2\pi$, оскільки

$$\ln B(z) = (1+o(1))\left(1 - e^{2i\varphi}\right)e^{-i\varphi}\int\limits_0^1 \frac{n(t)\,dt}{(e^{i\varphi}-t)(e^{-i\varphi}-t)} =$$

$$= (1+o(1))(-2i\sin\varphi)\int\limits_0^1 \frac{n(t)\,dt}{t^2-2t\cos\varphi+1}, \quad z \to e^{i\varphi},$$

а останній інтеграл є збіжним.

***Зауваження* 5.** А. А. Шкаліков [10] для добутків Бляшке в півплощині $\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$, тобто для добутків вигляду

$$\tilde{B}(w) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{w-b_k}{w+b_k}\cdot\frac{b_k}{-\bar{b}_k}, \qquad \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{|b_k|} < +\infty,$$

довів, що якщо нулі b_k розміщені в куті $\{w : |\arg w| < \delta\}$, $0 < \delta < \pi/2$, і $\int_1^{+\infty} dn(t,\tilde{B})/t$ є збіжним, то для $w \in \{w : |\arg w| < \delta_1\}$, $\delta < \delta_1 < \pi/2$, виконується

$$-\ln\left|\tilde{B}(w)\right| \asymp r\cos\theta\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\,dn(t)}{(t+r)^2}, \quad |z| = r \to \infty, \tag{10}$$

$$\arg\tilde{B}(w) \asymp -r\sin\theta\int\limits_0^{+\infty}\frac{dn(t)}{t+r}, \quad |z| = r\to\infty. \tag{11}$$

Запис $\alpha(x) \asymp \beta(x)$, $x \to +\infty$, означає, що при досить великих x виконується $C_1 \le \alpha(x)/\beta(x) \le C_2$, де C_1, C_2 — додатні сталі, що не залежать від x.

Теорема 3 значно уточнює співвідношення (10) та (11) у випадку, коли нулі a_k добутку Бляшке $B(z)$ додатні. Дійсно, виконуючи заміну $z = (w-1)/(w+1)$, отримуємо $\tilde{B}(w) = B((w-1)/(w+1))$, де $b_k = (1+a_k)/(1-a_k)$, і $\tilde{B}(w)$ є аналітичною в $\{w : \operatorname{Re} w > 0\}$ функцією. Нехай $V(t) = \nu(1-2/(1+t))$, $V_1 = dV(t)/d\ln t$. Тоді $V(t)$, $V_1(t)$ — повільно зростаючі на $[1,+\infty)$ функції,

$$r\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\,dn(t)}{(t+r)^2} = \frac{d}{d\ln r}\int\limits_0^{+\infty}\frac{r\,dn(t)}{t+r}.$$

Якщо $n(t) = V(t) + o(V_1(t))$, $t \to +\infty$, то, оскільки [5] (лема 5)

$$r\int\limits_0^{+\infty}\frac{dV(t)}{t+r} \sim V(r), \quad r\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\,dV(t)}{(t+r)^2} \sim V_1(r), \quad r\to\infty,$$

з асимптотичної формули (9) для $\tilde{B}(w)$ маємо

$$-\ln\left|\tilde{B}(w)\right| \sim \frac{\pi}{2}(\pi-2|\theta|)r\int\limits_0^{+\infty}\frac{t\,dn(t)}{(t+r)^2}, \quad 0<|\theta|<\pi, \quad r\to\infty,$$

$$\arg\left|\tilde{B}(w)\right| \sim -\pi(\operatorname{sign}\theta)\,r\int\limits_0^{+\infty}\frac{dn(t)}{t+r}.$$

Для того щоб сформулювати теорему типу Валірона – Тітчмарша для добутків Бляшке, множину $E \subset \mathbb{R}$ будемо називати E^0-множиною в точці 1, якщо її можна покрити системою інтервалів (a_k, b_k), $k \in N$, таких, що

$$\sum_{|1-a_k|<1-t}(b_k-a_k) = o(1-t), \quad t\to 1.$$

Нагадаємо, що множину $E \subset \mathbb{R}$ називають множиною нульової лінійної щільності або E^0-множиною в точці ∞, якщо $\operatorname{mes}(E \cap [-r, r]) = o(r)$, $r \to +\infty$. Зауважимо, що E^0-множина в точці ∞ при відображенні $t = (x-1)/(x+1)$ переходить в E^0-множину в точці 1 [3] (лема 2).

Теорема 4. *Нехай $B(z)$ — добуток Бляшке з додатними нулями, функція $v(r)$ задовольняє умови теореми 3 і для $\theta = 0$ і $\theta = \pi$ виконується співвідношення*

$$\ln\left|B\left(1 - re^{-i\theta}\right)\right| = -\frac{\pi}{2}(\pi - 2\theta)\, v_1(1-r) + \psi\left(1 - re^{-i\theta}\right), \quad 0 < r \le 1, \tag{12}$$

де функція ψ для деякого $m \ge 1$ задовольняє умову

$$\int\limits_{x<|t|<2x} |\psi(1-t)|^m dt = o(v_1^m(1-x)/x), \quad x \to 0. \tag{13}$$

Тоді

$$n(t) = v(t) + o(v(t)), \quad t \to 1, \quad t \notin E,$$

де E є E^0-множиною в точці 1.

2. Доведення теорем. Спочатку доведемо теорему 2. Добуток Бляшке $B(z)$ з додатними нулями є мероморфною в $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ функцією [8, с. 81]. Після заміни $z = (w-1)/(w+1)$ одержуємо

$$\tilde{B}(w) = B\left(\frac{w-1}{w+1}\right) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n - (w-1)/(w+1)}{1 - a_n(w-1)/(w+1)} =$$

$$= \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{w}{b_n}\right) \Big/ \prod_{n=1}^{+\infty}\left(1 + \frac{w}{b_n}\right) = \tilde{B}_1(w) / \tilde{B}_2(w),$$

де $b_n = (1+a_n)/(1-a_n) \uparrow +\infty$, $n \to +\infty$, $\tilde{B}_1(w)$, $\tilde{B}_2(w)$ — цілі функції відповідно з додатними та від'ємними нулями,

$$n(\tau, 0, \tilde{B}_1) = n(\tau, 0, \tilde{B}_2) \sim v\left(1 - \frac{2}{\tau+1}\right), \quad \tau \to +\infty.$$

Покладемо $V(\tau) = v(1 - 2/(\tau+1))$. Тоді $V(2\tau) \sim V(\tau)$, $\tau \to +\infty$, $V(\tau) \uparrow +\infty$ при $\tau \to +\infty$ і, враховуючи зауваження 1, з (4) одержуємо $(w = \tau e^{i\theta})$

$$\ln \tilde{B}_2(\tau e^{i\theta}) = N(\tau, 0, \tilde{B}_2) + i\theta V(\tau) + o(V(\tau)), \quad -\pi < \theta < \pi, \quad \tau \to \infty,$$

і

$$\ln \tilde{B}_1(\tau e^{i\theta}) = N(\tau, 0, \tilde{B}_1) + i(\theta - \pi) V(\tau) + o(V(\tau)), \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad \tau \to \infty.$$

З останніх двох рівностей для $0 < |\theta| < \pi$ маємо

$$\ln \tilde{B}(w) = \ln \tilde{B}_1(w) - \ln \tilde{B}_2(w) = -\pi i \operatorname{sign}\theta\, V(\tau) + o(V(\tau)), \quad \tau \to \infty, \tag{14}$$

причому остання рівність виконується рівномірно відносно θ, $\delta \le |\theta| \le \pi - \delta$, $\delta > 0$.

Повертаючись до змінної z за допомогою перетворення $w = (z+1)/(1-z)$, з (14) для $z = te^{i\varphi}$, $0 < |\arg((1+z)/(1-z))| < \pi$, отримуємо

$$\ln B(z) = -\pi i \operatorname{sign}\left(\arg\frac{1+z}{1-z}\right) v(t) + o(v(t)), \quad t \to 1,$$

що рівносильне співвідношенню (8). Теорему 2 доведено.

Твердження теореми 3 буде випливати з (6), так само як твердження теореми 2 випливало з співвідношення (4). Тому доведемо теорему 1.

Як і при доведенні теореми 1 з [5], отримуємо

$$\ln f(z) = N(r) - \int_1^r \frac{n(t)}{t+z}dt + z\int_r^{+\infty} \frac{n(t)}{t(t+z)}dt.$$

Враховуючи (5) та лему 1 з [5], для $-\pi < \theta < \pi$ маємо

$$\int_1^r \frac{n(t)-V(t)}{t+z}dt = o(V(r)\,\varepsilon(r)), \quad \int_r^{+\infty} \frac{n(t)-V(t)}{t(t+z)}dt = o(V(r)\,\varepsilon(r)), \quad r \to \infty.$$

Отже, для $z = re^{i\theta}$, $-\pi < \theta < \pi$,

$$\ln f(z) = N(r) - \int_1^r \frac{V(t)}{t+z}dt + z\int_r^{+\infty} \frac{V(t)}{t(t+z)}dt + o(V(r)\,\varepsilon(r)), \quad r \to \infty,$$

і за лемою 2 з [5] маємо

$$\ln f(z) = N(r) - \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k a_k(r) z^{-k-1} + \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k b_k(r)\, z^{k+1} + o(V_1(r)), \quad r \to \infty, \tag{15}$$

де

$$a_k(r) = \int_1^r V(t) t^k\, dt, \qquad b_k(r) = \int_r^\infty V(t) t^{-k-2}\, dt.$$

Покладемо

$$\tilde{a}_k(r) = \frac{1}{k+1}\int_1^r V_2(t) t^k \varepsilon(t)\, dt, \quad \tilde{b}_k(r) = \frac{1}{k+1}\int_r^\infty V_2(t) t^{-k-2} \varepsilon(t)\, dt,$$

і, інтегруючи частинами, одержуємо

$$a_k(r) = \frac{V(r) r^{k+1}}{k+1} - \frac{V_1(r) r^{k+1}}{(k+1)^2} + \frac{\tilde{a}_k(r)}{k+1}, \quad b_k(r) = \frac{V(r) r^{-k-1}}{k+1} + \frac{V_1(r) r^{-k-1}}{(k+1)^2} + \frac{\tilde{b}_k(r)}{k+1}.$$

Враховуючи, що

$$-\sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{e^{-i\theta(k+1)}}{k+1} + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k+1} e^{i\theta(k+1)} = -\ln\left(1+e^{-i\theta}\right) + \ln\left(1+e^{i\theta}\right) = i\theta,$$

а (див., наприклад, [11, с. 726])

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k e^{-i\theta(k+1)}}{(k+1)^2} + \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k e^{i\theta(k+1)}}{(k+1)^2} = 2\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \cos(\theta(k+1))}{(k+1)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2\right),$$

з (15) для $-\pi < \theta < \pi$ дістаємо

$$\ln f(z) = N(r) + i\theta V(r) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2\right) V_1(r) - \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k e^{-i\theta(k+1)}}{r^{k+1}(k+1)} \tilde{a}_k(r) +$$

$$+ \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k e^{i\theta(k+1)}}{r^{-k-1}(k+1)} \tilde{b}_k(r) + o(V_1(r)) =$$

$$= N(r) + i\theta V(r) + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{3} - \theta^2\right) V_1(r) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + o(V_1(r)).$$

Теорему 1 буде доведено, якщо ми покажемо, що

$$\Sigma_1 = o(V_1(r)), \qquad \Sigma_2 = o(V_1(r)), \qquad r \to \infty. \tag{16}$$

Функції $\tilde{a}_k(r)$ та $\tilde{b}_k(r)$ відрізняються відповідно від функцій $\tilde{a}_k(r)$ та $\hat{b}_k(r)$ з [5] (лема 3) підінтегральною функцією, де $V_1(t)$ замінено функцією $V_2(t) =$

$= V_1(t)\tau(t)$, $\tau(t) = V_2(t)/V_1(t)$. Оскільки на підставі теореми 1 $V_1(t)$ є повільно зростаючою на $[1, +\infty)$ функцією $\tau(t) \to 0$ при $t \to \infty$, то співвідношення (16) доводяться аналогічно твердженням (16) та (17) леми 3 з [5]. Теорему 1 доведено.

Для доведення теореми 4 нам потрібні дві леми.

Лема 1. *Нехай* $V(r)$ — *повільно зростаюча до* $+\infty$ *на* $[1, +\infty)$ *функція,* $V_1(r) = dV(r)/d\ln r \uparrow +\infty$, $V_2(r) = dV_1(r)/d\ln r = o(V_1(r))$, $r \to +\infty$, *а* $\Psi(r)$ — *інтегровна на кожному скінченному проміжку з* $\mathbb{R}$ *функція така, що* $\int_0^1 \Psi(x)/x\,dx$ — *збіжний і*

$$\int\limits_{T<|x|<2T} |\Psi(x)|^m dx = o\left(TV_1^m(T)\right), \quad T \to +\infty, \quad m \ge 1. \tag{17}$$

Тоді

$$\Phi(t) = \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{t\Psi(x)}{x(x+t)} dx = o(V(t)), \quad t \to \infty, \quad t \notin E_1, \tag{18}$$

де E_1 — *множина нульової лінійної щільності.*

Доведення. Нехай $t \ge 2$, $n = n(t) = [\log_2 t]$, $b = \log_2 t - n$, $\tau(t) = \int_t^{2t} |\Psi(x)|^m dx / \left(tV_1^m(t)\right)$ і

$$\Phi(t) = \text{V.p.} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{t\Psi(x)}{x(x+t)} dx + t\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\Psi(x)}{x(x+t)} dx = \Phi_1(t) + \Phi_2(t).$$

Тоді, використовуючи нерівність Гельдера, маємо

$$\frac{|\Phi_2(t)|}{t} \le \int\limits_0^b \frac{|\Psi(x)|}{x(x+t)} dx + \sum_{k=-n}^{+\infty} \int\limits_{2^k t}^{2^{k+1}t} \frac{|\Psi(x)|}{x(x+t)} dx \le$$

$$\le O(1/t) + \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{2^k t^2} \int\limits_{2^k t}^{2^{k+1}t} |\Psi(x)| dx + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k t} \int\limits_{2^k t}^{2^{k+1}t} |\Psi(x)| \frac{1}{x} dx \le$$

$$\le O(1/t) + \sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{2^k t^2} \|\Psi(x)\|_{m,k} \|1\|_{m',k} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k t} \|\Psi(x)\|_{m,k} \|1/x\|_{m,k},$$

де $\|*\|_{m,k}$ — норма у просторі $L^m(t2^k, t2^{k+1})$, тобто

$$\|*\|_{m,k} = \left(\int\limits_{2^k t}^{2^{k+1}t} |*|^m dx \right)^{1/m},$$

$1/m + 1/m' = 1$, $m' = +\infty$, коли $m = 1$. З (17) одержуємо

$$\|\Psi\|_{m,k}^m = \tau(2^k t) 2^k t V_1^m(t2^k),$$

а

$$\|1\|_{m',k} = (2^k t)^{1/m'}, \quad \left\|\frac{1}{x}\right\|_{m',k} \le (2^k t)^{(1/m')-1}.$$

Отже, з останньої нерівності дістаємо $\left(\tau_k(t) = \tau^{1/m}(2^k t)\right)$

$$|\Phi_2(t)| \le \sum_{k=-n}^{-1} \tau_k(t) V_1(2^k t) + \sum_{k=0}^{+\infty} \tau_k(t) \frac{V_1(2^k t)}{2^k} + O(1) =$$
$$= \Sigma_1 + \Sigma_2 + O(1), \quad t \to +\infty.$$

Оскільки $\tau_k(t) \to 0$, $V_1(t/2^k)/V(t) \to 0$ при $t \to +\infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$, і

$$V_1(t/2) + V_1(t/4) + \ldots + V_1(2^{-n} t) \le \{(V(t) - V(t/2)) + (V(t/2) - V(t/4)) + \ldots$$
$$\ldots + (V(2^{-n+1} t) - V(2^{-n} t))\} \frac{1}{\ln 2} \le \frac{V(t)}{\ln 2},$$

то, враховуючи теорему Тепліца (див., наприклад, [12, с. 26]), знаходимо

$$x_n = x_{n(t)} = \tau^{1/m}(t/2) \frac{V_1(t/2)}{V(t)} +$$
$$+ \tau^{1/m}(t/4) \frac{V_1(t/4)}{V(t)} + \ldots + \tau^{1/m}(2^{-n} t) \frac{V_1(2^{-n} t)}{V(t)} \to 0, \quad t \to +\infty.$$

Отже,

$$\Sigma_1 = V(t) \sum_{k=1}^{n} \frac{V_1(2^{-n} t)}{V(t)} \tau_{-k}(t) = V(t) x_n = o(V(t)), \quad t \to +\infty.$$

З умов леми випливає, що $V_1(t)$ є повільно зростаючою функцією, а отже, існує $t_0 > 0$ таке, що $V_1(2t)/V_1(t) \le \sqrt{2}$ для всіх $t \ge t_0$. Тоді $V_1(2^k t)/V_1(t) \le (\sqrt{2})^k$, $t \ge t_0$, $k \in N$ і

$$\Sigma_2 = V_1(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \tau_k(t) \frac{V_1(2^k t)}{V_1(t) 2^k} \le V_1(t) \sum_{k=0}^{+\infty} \tau_k(t) \frac{1}{2^{k/2}} \le$$
$$\le 2\tau(t)(1 + \sqrt{2}) V_1(t) = o(V_1(t)) = o(V(t)), \quad t \to +\infty,$$

оскільки $\tau(t) = \sup\{\tau^{1/m}(x) : x \ge t\} \to 0$, $V_1(t) = o(V(t))$, $t \to +\infty$. Отже, $\Phi_2(t) = o(V(t))$ при $t \to +\infty$.

Далі,

$$\Phi_1(t) = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{0} \frac{t\Psi(x)}{x(x+t)} dx = t \int_{0}^{t/2} \frac{\Psi(-x)}{x(x-t)} dx + t \int_{2t}^{+\infty} \frac{\Psi(-x)}{x(x-t)} dx +$$
$$+ t\,\text{V.p.} \int_{t/2}^{2t} \frac{\Psi(-x)}{x(x-t)} dx = \Phi_1^{(1)}(t) + \Phi_1^{(2)}(t) + \Phi_1^{(3)}(t).$$

Аналогічно показуємо, що

$$\Phi_1^{(1)}(t) = o(V(t)), \quad \Phi_1^{(2)}(t) = o(V(t)), \quad t \to +\infty.$$

Для оцінки $\Phi_1^{(3)}(t)$ використаємо наступний результат (див., наприклад, [13, с. 86]). Нехай $m \ge 1$,

$$\hat{g}(x) = \text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g(\tau)}{\tau - x} d\tau,$$

де $\hat{g} \in L^m(-\infty, +\infty)$. Тоді знайдеться стала $C_m < +\infty$ така, що для довільного $h > 0$ виконується нерівність

$$\text{mes}\{x : \hat{g}(x) > h\} \le C_m \frac{\|g\|_m^m}{h^m}.$$

Покладемо $g(\tau;t) = X(\tau;t)\Psi(-\tau)/\tau$, де $X(\tau;t)$ — характеристична функція проміжку $[t/2;2t]$, $h = \varepsilon(t)V_1(t)/t$, $\varepsilon(t) > 0$. Тоді $\hat{g}(x;t) = \Phi_1^{(3)}(x)/x$, $g(\tau;t) \in L^m(-\infty,+\infty)$ і, враховуючи (17), маємо $\|g(\tau;t)\|_m = o(t^{1/m-1}V_1(t))$, $t \to +\infty$.

Нехай $E(t) = \{x \in [t/2;2t];\ g(x;t) > h\}$. Із сформульованого вище результату отримуємо наступну асимптотичну оцінку для міри множини $E(t)$:

$$\operatorname{mes} E(t) \le C_m \|g(\tau;t)\|_m^m / (\varepsilon(t)V_1(t)t^{-1})^m = o\left(\frac{t}{\varepsilon^m(t)}\right), \quad t \to +\infty.$$

Вибираємо функцію $\varepsilon(t)$ так, щоб $\varepsilon(t) \downarrow 0$, $\operatorname{mes} E(t) = o(t)$, $t \to +\infty$. Покладемо $E_1 = \bigcup_{k=0}^{+\infty} E(t_k)$, $t_k = 4^k$. Тоді множина E_1 буде мати нульову лінійну щільність і при $t \to +\infty$, $t \notin E_1$, виконуватиметься

$$\Phi_1^{(3)}(t) = t\hat{g}(t;t) \le \varepsilon(t)V_1(t) = o(V(t)).$$

Отже, лему 1 доведено повністю.

Лема 2. *Нехай функція $V(t)$ задовольняє умови леми 1. Тоді*

$$\text{V.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dV(t)}{t-x} = -\frac{V(x)}{x} + o\left(\frac{V_1(x)}{x}\right), \quad x \to +\infty.$$

Доведення. Маємо

$$I_1(x,\varepsilon) = \int_0^{(1-\varepsilon)x} \frac{dV(t)}{t-x} = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{x^{k+1}} \int_0^{(1-\varepsilon)x} t^k dV(t) = -\frac{V((1-\varepsilon)x)}{x} - \frac{1}{x}\sum_0^{+\infty} \frac{a_k(x,\varepsilon)}{x^{k+1}},$$

де

$$a_k(x,\varepsilon) = \int_0^{(1-\varepsilon)x} t^{k+1} dV(t) = \int_0^{(1-\varepsilon)x} t^k V_1(t)\,dt, \quad \varepsilon > 0.$$

Аналогічно

$$I_2(x,\varepsilon) = \int_{(1+\varepsilon)x}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \int_{(1+\varepsilon)x}^{+\infty} \frac{dV(t)}{t^{k+1}} = \frac{1}{x}\sum_0^{+\infty} \frac{b_k(x,\varepsilon)}{x^{-k-1}},$$

де

$$b_k(x,\varepsilon) = \int_0^{(1+\varepsilon)x} t^{-k-1} dV(t) = \int_0^{(1+\varepsilon)x} t^{-k-2} V_1(t)\,dt.$$

Оскільки

$$\text{V.p.} \int_0^{+\infty} \frac{dV(t)}{t-x} = \lim_{\varepsilon\to 0} (I_1(x,\varepsilon) + I_2(x,\varepsilon)) = -\frac{V(x)}{x} - \frac{1}{x}\lim_{\varepsilon\to 0}(\Sigma_1 - \Sigma_2),$$

де

$$\Sigma_1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k(x,\varepsilon)}{x^{k+1}}, \quad \Sigma_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{b_k(x,\varepsilon)}{x^{-k-1}},$$

то для доведення леми треба показати, що

$$\lim_{\varepsilon\to 0} (\Sigma_1 - \Sigma_2) = o(V_1(x)), \quad x \to +\infty.$$

Інтегруючи частинами, маємо

$$a_k(x,\varepsilon) = \frac{V_1((1-\varepsilon)x)(1-\varepsilon)^{k+1}x^{k+1}}{k+1} - \hat{a}_k(x,\varepsilon),$$

$$b_k(x,\varepsilon) = \frac{V_1((1+\varepsilon)x)\,x^{-k-1}}{(k+1)(1+\varepsilon)^{k+1}} + \hat{b}_k(x,\varepsilon),$$

де

$$\hat{a}_k(x,\varepsilon) = \frac{1}{k+1}\int\limits_0^{(1-\varepsilon)x} t^k V_2(t)\,dt, \quad \hat{b}_k(x,\varepsilon) = \frac{1}{k+1}\int\limits_{(1+\varepsilon)x}^{+\infty} t^{-k-2} V_2(t)\,dt,$$

а отже,

$$\Sigma_1 - \Sigma_2 = -V_1((1-\varepsilon)x)\ln\varepsilon + V_1((1+\varepsilon)x)\ln\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} - \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\hat{a}_k(x,\varepsilon)}{x^{k+1}} -$$

$$- \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\hat{b}_k(x,\varepsilon)}{x^{-k-1}} = \ln\varepsilon\,\big(V_1((1+\varepsilon)x) - V_1((1-\varepsilon)x)\big) -$$

$$- \ln(1+\varepsilon)\,V_1((1+\varepsilon)x) - \Sigma_3 - \Sigma_4. \tag{19}$$

Як і при доведенні леми 3 з [5], показуємо, що

$$\Sigma_3 \le \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\hat{a}_k(x,0)}{x^{k+1}} = o(V_1(x)), \quad x\to+\infty,$$

$$\Sigma_4 \le \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\hat{b}_k(x,0)}{x^{-k-1}} = o(V_1(x)), \quad x\to+\infty.$$

Враховуючи, що $\big(V_1((1+\varepsilon)x) - V_1((1-\varepsilon)x)\big) = 2\varepsilon x V_1'((1+\theta\varepsilon)x)$, $-1<\theta<1$, з (19) одержуємо

$$\lim_{\varepsilon\to0}\,(\Sigma_1 - \Sigma_2) = o(V_1(x)), \quad x\to+\infty,$$

що й доводить лему 2.

Доведення теореми **4.** Як і при доведенні теореми 2, виконаємо заміну $z=(w-1)/(w+1)$. Тоді

$$\tilde{B}(w) = B\left(\frac{w-1}{w+1}\right) = \tilde{B}_1(w)\,/\,\tilde{B}_2(w),$$

де $B(z)$ — добуток Бляшке з нулями a_n, $a_n>0$, $b_n=(1+a_n)/(1-a_n)$, $\tilde{B}_1(w) = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-w/b_n)$, $B_2(w)=B_1(-w)$ — цілі функції. Нехай $V(\tau)=\nu(1-2/(\tau+1))$, $\tau\ge1$. Тоді $V(\tau)$ задовольняє умови леми 1 і внаслідок (12) та (13)

$$\ln\left|\tilde{B}(\tau)\right| = -\frac{\pi^2}{2}V_1(\tau) + \Psi(\tau), \quad \tau\ge1,$$

$$\ln\left|\tilde{B}(-\tau)\right| = \frac{\pi^2}{2}V_1(\tau) + \Psi(-\tau), \quad \tau\ge1, \tag{20}$$

де $\Psi(\tau)=\psi\big(1-2/(\tau+1)\big)$ задовольняє умову (17).

Для дійсних x маємо співвідношення

$$\frac{\ln\left|\tilde{B}(x)\right|}{x} = \frac{\ln\left|\tilde{B}_1(x)\right|}{x} - \frac{\ln\left|\tilde{B}_2(x)\right|}{x} = -\text{ V.p. }\int_0^{+\infty}\frac{n(\tau,0,\tilde{B})}{\tau(\tau-x)}d\tau -$$

$$-\text{ V.p. }\int_0^{+\infty}\frac{n(\tau,\infty,\tilde{B})}{\tau(\tau+x)}d\tau = -\text{ V.p. }\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{n_1(\tau)}{\tau(\tau+x)}d\tau, \tag{21}$$

де $n_1(\tau) = n\left(|\tau|, 0, \tilde{B}\right) = n\left(|\tau|, \infty, \tilde{B}\right)$.

Співвідношення (21) можна інтерпретувати таким чином: функція $\ln\left|\tilde{B}(x)\right|/x$ є перетворенням Гільберта функції $n_1(\tau)$. Тоді за теоремою про обернене перетворення Гільберта виконується

$$\frac{n_1(\tau)}{\tau} = -\frac{1}{\pi^2}\text{ V.p. }\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln\left|\tilde{B}(x)\right|}{x(x+t)}dx.$$

Враховуючи (20), лему 5 з [5] та леми 1 і 2, одержуємо

$$n_1(t) = \frac{t}{2}\int_0^{+\infty}\frac{V_1(x)\,dx}{x(x+t)} - \frac{t}{2}\text{V.p.}\int_{-\infty}^{0}\frac{V_1(-x)\,dx}{x(x+t)} + \text{ V.p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\Psi(x)}{x(x+t)}dx =$$

$$= \frac{t}{2}\int_0^{+\infty}\frac{dV(x)}{x+t} - \frac{t}{2}\text{V.p.}\int_0^{+\infty}\frac{dV(x)}{x-t} + \Phi(t) = V(t) + o(V(t)), \quad t\to\infty, \quad t\notin E_1,$$

де E_1 — множина нульової лінійної щільності.

Виконуючи заміну $t = (1+r)/(1-r)$, маємо

$$n(r,0,B) = n_1\left(\frac{1+r}{1-r}\right) = V\left(\frac{1+r}{1-r}\right)(1+o(1)) = \nu(r) + o(\nu(r)), \quad r\to 1, \quad r\notin E,$$

де множина E є E^0-множиною в точці 1. Теорему 4 доведено.

1. *Valiron G.* Sur les fonctions entiéres d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions á correspondance réguliére // Ann. Fac. sci. Univ. Toulouse. – 1914. – **5**. – P. 117 – 257.
2. *Titchmarsh E. G.* On integral functions with real negative zeros // Proc. London Math. Soc. – 1927. – **26**. – P. 185 – 200.
3. *Гирнык М. А.* Об асимптотических свойствах некоторых канонических произведений // Сиб. мат. журн. – 1974. – **25**, № 5. – С. 1036 – 1048.
4. *Галоян Р. С.* Об асимптотических свойствах функций $\pi(z; z_k)$ // Докл. АН Арм ССР. – 1974. – **59**, № 2. – С. 65 – 71.
5. *Заболоцький М. В.* Теореми типу Валірона та Валірона – Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 3. – С. 315 – 325.
6. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.
7. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985. – 141с.
8. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 469 с.
9. *Ghirnyk M. O., Kondratyuk A. A.* Blaschke products of given quantity index // Мат. студ. – 1993. – Вип. 2. – С. 49 – 52.
10. *Шкаликов А. А.* Теоремы тауберова типа о распределении нулей голоморфных функций // Мат. сб. – 1984. – **123**, № 3. – С. 317 – 347.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1981. – 798 с.
12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. – М.: Наука, 1970. – Т.2. – 800 с.
13. *Логвиненко В. Н.* О целых функциях с нулями на полупрямой. II // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1973. – Вып. 17. – С. 84 – 99.

Одержано 30.11.98