УДК 517.5

Л. П. Ющенко (Нац. пед. ун-т, Київ)

ОДИН КОНТРПРИКЛАД У ОПУКЛОМУ НАБЛИЖЕННІ

We prove the existence of a continuous function f convex on $[-1, 1]$ and such that, for any sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ of algebraic polynomials p_n of degree $\le n$ convex on $[-1, 1]$, the relation

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{x\in[-1,1]} \frac{|f(x) - p_n(x)|}{\omega_4(\rho_n(x), f)} = \infty,$$

takes place, where $\omega_4(t,f)$ is the fourth modulus of continuity of the function f and, $\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}$. This result is generalized to q-convex functions.

Доведено існування неперервної і опуклої на $[-1, 1]$ функції f такої, що для будь-якої послідовності $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ опуклих на $[-1, 1]$ алгебраїчних многочленів p_n степеня $\le n$ має місце співвідношення

$$\limsup_{n\to\infty} \max_{x\in[-1,1]} \frac{|f(x) - p_n(x)|}{\omega_4(\rho_n(x), f)} = \infty,$$

де $\omega_4(t,f)$ — четвертий модуль неперервності функції f, $\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}$. Цей результат узагальнено для q-опуклих функцій.

1. Вступ. Нехай $\mathbb{C}$ — простір неперервних на відрізку $I := [-1, 1]$ функцій $f = f(x)$ з рівномірною нормою

$$\|f\| = \max_{x\in I} |f(x)|;$$

$\mathbb{P}_n$, $n \in \mathbb{N}$, — простір алгебраїчних многочленів степеня не більше n.

Нехай $k \in \mathbb{N}$ та $n \ge k-1$. Згідно з класичним результатом Тімана – Дзядика – Фройда – Брудного (див., наприклад, [1]) для кожної функції $f \in \mathbb{C}$ знайдеться многочлен $p_n \in \mathbb{P}_n$ такий, що

$$|f(x) - p_n(x)| \le c\,\omega_k(\rho_n(x), f), \tag{1}$$

де c — стала, що залежить тільки від k,

$$\rho_n(x) := \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-x^2},$$

$\omega_k(t, f)$ — модуль неперервності порядку k функції f.

Нагадаємо, що модулем неперервності порядку k функції f називається функція

$$\omega_k(t,f) := \sup_{h\in[0,t]} \|\Delta_h^k(f,x)\|_{[-1,1-kh]}, \qquad t \ge 0,$$

де

$$\Delta_h^k(f,x) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(x+jh)$$

— k-та різниця у точці x з кроком h.

Перепишемо нерівність (1) в іншому вигляді. Для функції $f \notin \mathbb{P}_{k-1}$ покладемо

$$D_{n,k}(f) := \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in I} \frac{|f(x) - p_n(x)|}{\omega_k(\rho_n(x), f)}.$$

Якщо ж $f \in \mathbb{P}_{k-1}$, то $D_{n,k}(f) := 0$.

При цьому позначенні сформульований вище класичний результат набирає вигляду: для будь-якої функції $f \in \mathbb{C}$

$$D_{n,k}(f) \le c, \quad n \ge k-1, \tag{2}$$

де c — стала, що залежить від k.

Починаючи з роботи Лоренца та Целлера [2] досліджується питання про справедливість аналога оцінки (2) для монотонного, опуклого і т. д. наближень.

Позначимо через $\Delta^{(q)}$, $q \in \mathbb{N}$, множину функцій $f \in \mathbb{C}$ таких, що

$$\Delta_h^q(f, x) \ge 0$$

для всіх $x \in I$ та $h \ge 0$, для яких $(x + qh) \in I$.

Очевидно, що $\Delta^{(1)}$ — множина неспадних на відрізку I функцій, а $\Delta^{(2)}$ — множина опуклих на I функцій.

Для функції $f \notin \mathbb{P}_{k-1}$ покладемо

$$D_{n,k}^{(q)}(f) := \inf_{p_n \in \mathbb{P}_n \cap \Delta^{(q)}} \max_{x \in I} \frac{|f(x) - p_n(x)|}{\omega_k(\rho_n(x), f)}.$$

Якщо ж $f \in \mathbb{P}_{k-1}$, то $D_{n,k}^{(q)}(f) := 0$.

Лоренц та Целлер [2] для будь-якої функції $f \in \Delta^{(1)}$ довели, що

$$D_{n,1}^{(1)}(f) \le c, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ДеВор та Ю [3] підсилили цю оцінку, довівши, що для будь-якої функції $f \in$ $\in \Delta^{(2)}$

$$D_{n,2}^{(1)}(f) \le c, \quad n \in \mathbb{N}.$$

З результатів Шведова [4], Ву та Цу [5], Левіатана та Шевчука [6] випливає, що, взагалі кажучи, нерівність

$$D_{n,k}^{(1)}(f) \le c$$

не виконується при будь-якому $k > 2$. Зокрема, Левіатан та Шевчук [6] побудували функцію $f \in \Delta^{(1)}$ таку, що

$$\limsup_{n \to \infty} D_{n,3}^{(1)}(f) = \infty.$$

Для опуклого наближення відомий результат Левіатана [7] $(k = 1, 2)$ та Копотуна [8] $(k = 3)$: якщо $f \in \Delta^{(2)}$ та $k = 1, 2, 3$, то

$$D_{n,k}^{(2)}(f) \le c, \quad n \ge k-1. \tag{3}$$

Для $k > 3$ ця нерівність не виконується із сталою $c(k)$ (див. [4]); для $k > 4$ не виконується навіть із сталою $c(k, f)$ (див. [5]).

Основним результатом даної роботи є теорема 1, яка показує, що і при $k = 4$ нерівність (3) не виконується навіть із сталою $c(f)$.

Теорема 1. *Існує функція* $f \in \Delta^{(2)}$ *така, що*

$$\limsup_{n \to \infty} D_{n,4}^{(2)}(f) = \infty.$$

Насправді ми доводимо більш загальний результат. Нехай $\mathbb{C}^{(q)}$, $q \in \mathbb{N}$, — підпростір q разів неперервно диференційовних на I функцій $f \in \mathbb{C}$; $\mathbb{C}^{(0)} := \mathbb{C}$.

Теорема 2. *Існує функція* $f \in C^{(q-1)} \bigcap \Delta^{(q)}$ *така, що для будь-якої послідовності* $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ *многочленів* $p_n \in \mathbb{P}_n \bigcap \Delta^{(q)}$ *маємо*

$$\limsup_{n \to \infty} \max_{x \in I} \frac{|f(x) - p_n(x)|}{\rho_n^{q-1}(x)\,\omega_3(\rho_n(x), f^{(q-1)})} = \infty. \tag{4}$$

Наслідком цієї теореми є наступна теорема.

Теорема 3. *Існує функція* $f \in \Delta^{(q)}$ *така, що*

$$\limsup_{n \to \infty} D_{n,q+2}^{(q)}(f) = \infty.$$

Зауважимо, що при $k > q+2$ існування функції $f \in \Delta^{(q)}$, для якої

$$\limsup_{n \to \infty} D_{n,k}^{(q)}(f) = \infty,$$

випливає із результату [5].

2. Доведення теореми 2. Для $q = 1$ теорема 2 відома (див. [6]), тому надалі вважатимемо $q > 1$. При доведенні будемо використовувати ідеї роботи [6].

Для неперервної на $[a; b]$ функції f будемо користуватись позначеннями

$$\|f\|_{[a;b]} = \max_{x \in [a;b]} |f(x)|;$$

зокрема, якщо $[a; b] = [-1; 1]$, то $\|f\|_{[-1;1]} = \|f\|$. Позначимо

$$\varphi(x) := \sqrt{1 - x^2}.$$

Нам буде потрібна наступна лема.

Лема. *Якщо* $d \in (0; 2]$, *то для будь-якого многочлена* $p_n \in \mathbb{P}_n$ *виконується нерівність*

$$|p_n^{(q)}(-1)| \le \frac{c_* n^{2q}}{d^q} \left\| \frac{p_n}{(1 + n\varphi)^{q+2}} \right\|_{[-1,-1+d]}, \tag{5}$$

де c_* *— стала, що залежить тільки від* q.

Доведення. Позначимо

$$\left\| \frac{p_n}{(1 + n\varphi)^{q+2}} \right\|_{[-1,-1+d]} =: A,$$

тоді

$$|p_n(x)| \le A(1 + n\varphi(x))^{q+2}, \quad x \in [-1; d].$$

Оскільки

$$1 + n\varphi(x) \le 2n^2\left(\frac{1}{n^2} + (x+1)\right), \quad x \in I,$$

то

$$|p_n(x)| \le cAn^{2q+4}\left(\frac{1}{n^2} + (x+1)\right)^{q+2} \le$$

$$\le cAn^{2q+4}\left(\frac{1}{n^2} + \frac{x+1}{d/2}\right)^{q+2}, \quad x \in [-1;-1+d],$$

де $c = 2^{q+2}$.

Позначимо $q_n(y) := p_n\left(\frac{d}{2}(y+1) - 1\right)$. Тоді

$$|q_n(y)| \le cAn^{2q+4}\left(\frac{1}{n^2} + (y+1)\right)^{q+2}.$$

Застосовуючи нерівність типу Дзядика (див. (14.9) у [1]), отримуємо

$$|q_n^{(q)}(-1)| \le c^* An^{2q+4}\left(\frac{1}{n^2}\right)^{q+2-q} = c^* An^{2q}.$$

Звідси

$$|p_n^{(q)}(-1)| = \left(\frac{2}{d}\right)^q |q_n^{(q)}(-1)| \le \frac{c_* A}{d^q} n^{2q}.$$

Лему доведено.

Для $b \in (0, 1)$ побудуємо функцію $S_b(x)$:

$$S_b(x) := 0, \quad x \le -1 + b,$$

$$S_b(x) := \frac{\int_{-1+b}^{x} (u+1-b)^3 (2b-1-u)^3\,du}{\int_{-1+b}^{-1+2b} (u+1-b)^3 (2b-1-u)^3\,du}, \quad -1+b \le x \le -1+2b,$$

$$S_b(x) := 1, \quad x \ge -1 + 2b;$$

очевидно, що $S_b \in \mathbb{C}^{(3)}$, $S_b'(x) \ge 0$, $x \in I$.

Також означимо функції

$$Q_b(x) := (x + 1 - b)^{q+1}$$

та

$$g_b(x) := \frac{1}{(q-2)!}\int_{-1+2b}^{x} (x-t)^{q-2} Q_b^{(q-1)}(t)\, S_b(t)\,dt,$$

$$\tilde{Q}_b(x) := \frac{1}{(q-2)!}\int_{-1+2b}^{x} (x-t)^{q-2} Q_b^{(q-1)}(t)\,dt.$$

Видно, що

$$g_b \in \Delta^{(q)} \cap \mathbb{C}^{(q+2)}. \tag{6}$$

Оцінимо $\omega_3(t, q_b^{(q-1)})$:

$$\omega_3(t, q_b^{(q-1)}) = \omega_3(t, q_b^{(q-1)} - Q_b^{(q-1)}) \le 8\|q_b^{(q-1)} - Q_b^{(q-1)}\| \le$$
$$\le 8\|Q_b^{(q-1)}\|_{[-1;-1+2b]} = 4(q+1)!\,b^2. \tag{7}$$

Через $\mathbb{P}_n^*$ позначимо множину поліномів $p_n \in \mathbb{P}_n$ таких, що $p_n^{(q)}(-1) \ge 0$. Для будь-якого $d \in (0,2)$ та полінома $p_n \in \mathbb{P}_n^*$, $n > q$, застосовуючи (5), одержуємо

$$(q+1)!\,b = -Q_b^{(q)}(-1) \le$$
$$\le p_n^{(q)}(-1) - Q_b^{(q)}(-1) = p_n^{(q)}(-1) - \tilde{Q}_b^{(q)}(-1) \le$$
$$\le \frac{c_* n^{2q}}{d^q}\left\|\frac{p_n - \tilde{Q}_b}{(1+n\varphi)^{q+2}}\right\|_{[-1;-1+d]} \le$$
$$\le \frac{c_* n^{2q}}{d^q}\left(\left\|\frac{p_n - g_b}{(1+n\varphi)^{q+2}}\right\|_{[-1;-1+d]} + \left\|\frac{g_b - \tilde{Q}_b}{(1+n\varphi)^{q+2}}\right\|\right),$$

звідки

$$\left\|\frac{p_n - g_b}{(1+n\varphi)^{q+2}}\right\|_{[-1;-1+d]} \ge \frac{(q+1)!\,b\,d^q}{c_* n^{2q}} - 2^{q-2}q(q+1)\,b^{q+1}. \tag{8}$$

Тепер побудуємо функцію f. Для цього позначимо $b_n := n^{-3}$ та покладемо $n_1 := q+1$, $d_0 := 1$,

$$d_j := b_{n_j}^{q+1} d_{j-1} = b_{n_1}^{q+1} \ldots b_{n_j}^{q+1}, \quad f_j := g_{b_{n_j}}, \quad j \ge 1,$$

де послідовність $\{n_\nu\}$ означена за індукцією таким чином: будемо вважати, що $\{n_1, \ldots, n_{\sigma-1}\}$, $\sigma > 1$, визначені. Тоді покладемо

$$F_{\sigma-1} := \sum_{j=1}^{\sigma-1} d_{j-1} f_j$$

та виберемо $n_\sigma > n_{\sigma-1}$ так, щоб

$$\frac{(q+1)!}{c_*} d_{\sigma-1} b_{n_\sigma-1}^q n_\sigma^{0,5} - \frac{2^{q+2}q(q+1)d_{\sigma-1}}{n_\sigma^{q-1/2}} >$$
$$> \|F_{\sigma-1}^{(q+2)}\| + 36(q+1)!\,d_{\sigma-1} =: B_{\sigma-1}. \tag{9}$$

Також позначимо

$$\Phi_\sigma := \sum_{j=\sigma}^{\infty} d_{j-1} f_j, \tag{10}$$

де збіжність ряду забезпечується оцінкою $2d_{j+1} < d_j$ та тим фактом, що

$$\|g_b\| < 2^q q(q+1).$$

Насправді,

$$\|\Phi_\sigma\| \le 2^q q(q+1) d_{\sigma-1}(1 + n_\sigma^{-3q-3} + n_\sigma^{-3q-3} n_{\sigma+1}^{-3q-3} + \ldots) <$$
$$< 2^{q+1} q(q+1) d_{\sigma-1}.$$

Беручи до уваги, що для будь-якого $r \le q-1$ маємо $\|g_b^{(r)}\| \le \text{const}$, пересвідчуємось у можливості почленного диференціювання $(q-1)$ раз ряду (10). Зокрема, оскільки $\|g_b^{(q-1)}\| < 2(q+1)!$, то

$$\|\Phi_\sigma^{(q-1)}\| \le 2(q+1)!d_{\sigma-1}(1+n_\sigma^{-3q-3}+n_\sigma^{-3q-3}n_{\sigma+1}^{-3q-3}+\ldots) <$$

$$< 4(q+1)!\,d_{\sigma-1}. \tag{11}$$

Покладемо

$$f := \Phi_1 = \sum_{j=1}^{\infty} d_{j-1} f_j.$$

Внаслідок (6) $f \in \Delta^{(q)} \cap \mathbb{C}^{(q-1)}$. Очевидно, що

$$f^{(q-1)} = \Phi_1^{(q-1)} = \sum_{j=1}^{\infty} d_{j-1} f_j^{(q-1)}.$$

Щоб довести (4), оцінимо $\omega_3(t, f^{(q-1)})$, використовуючи (7) та (11):

$$\omega_3(t,f^{(q-1)}) \le \omega_3(t, F_{\sigma-1}^{(q-1)}) + \omega_3(t, d_{\sigma-1} f_\sigma^{(q-1)}) + \omega_3(t, \Phi_{\sigma+1}^{(q-1)}) <$$

$$< t^3\|F_{\sigma-1}^{(q+2)}\| + 4(q+1)!\,d_{\sigma-1}b_{n_\sigma}^2 + 32(q+1)!\,d_{\sigma-1}b_{n_\sigma}^{q+1} \le$$

$$\le t^3\|F_{\sigma-1}^{(q+2)}\| + 36(q+1)!\,d_{\sigma-1}b_{n_\sigma}^2.$$

Звідси, враховуючи (9), знаходимо

$$\omega_3(\rho_{n_\sigma}(x), f^{(q-1)}) \le \frac{B_{\sigma-1}}{n_\sigma^6}(1+n_\sigma\varphi(x))^3.$$

Тоді

$$\rho_{n_\sigma}^{q-1}(x)\,\omega_3(\rho_{n_\sigma}(x), f^{(q-1)}) \le \frac{B_{\sigma-1}}{n_\sigma^{2q+4}}(1+n_\sigma\varphi(x))^{q+2}. \tag{12}$$

Згідно з (8) для будь-якого многочлена $p_{n_\sigma} \in \mathbb{P}_{n_\sigma} \cap \Delta^{(q)} \subset \mathbb{P}_{n_\sigma}^*$ маємо

$$\left\|\frac{\Phi_\sigma - p_{n_\sigma}}{(1+n_\sigma\varphi)^{q+2}}\right\|_{[-1,-1+b_{n_{\sigma-1}}]} \ge$$

$$\ge \left\|\frac{d_{\sigma-1}f_\sigma - p_{n_\sigma}}{(1+n_\sigma\varphi)^{q+2}}\right\|_{[-1,-1+b_{n_{\sigma-1}}]} - \left\|\frac{\Phi_{\sigma+1}}{(1+n\varphi)^{q+2}}\right\| \ge$$

$$\ge \frac{(q+1)!\,d_{\sigma-1}b_{n_{\sigma-1}}^q b_{n_\sigma}}{c_* n_\sigma^{2q}} - 2^{q-2}q(q+1)\,d_{\sigma-1}b_{n_\sigma}^{q+1} - 2^{q+1}q(q+1)\,d_{\sigma-1}b_{n_\sigma}^{q+1} >$$

$$> \frac{(q+1)!\,d_{\sigma-1}b_{n_{\sigma-1}}^q}{c_*}\frac{1}{n_\sigma^{2q+3}} - \frac{2^{q+2}q(q+1)\,d_{\sigma-1}}{n_\sigma^{3q+3}} > \frac{B_{\sigma-1}}{n_\sigma^{2q+3,5}}. \tag{13}$$

Оскільки при всіх $x \in [-1, -1+b_{n_{\sigma-1}}]$ виконується рівність $f(x) = \Phi_\sigma(x) +$

$+ A_\sigma(x)$, $A_\sigma \in \mathbb{P}_{q-2}$, то для довільного многочлена $p_{n_\sigma} \in \mathbb{P}_{n_\sigma} \cap \Delta^{(q)}$ з урахуванням оцінок (12) та (13) одержуємо

$$\left\| \frac{f - p_{n_\sigma}}{p_{n_\sigma}^{q-1} \omega_3(\rho_{n_\sigma}, f^{(q-1)})} \right\| \geq \frac{n_\sigma^{2q+4}}{B_{\sigma-1}} \left\| \frac{f - p_{n_\sigma}}{(1 + n_\sigma \varphi)^{q+2}} \right\| \geq$$

$$\geq \frac{n_\sigma^{2q+4}}{B_{\sigma-1}} \left\| \frac{\Phi_\sigma - (p_{n_\sigma} - A_\sigma)}{(1 + n_\sigma \varphi)^{q+2}} \right\|_{[-1,-1+b_{n_{\sigma-1}}]} > \sqrt{n_\sigma}\,.$$

Отже, ми довели, що

$$\left\| \frac{f - p_{n_\sigma}}{p_{n_\sigma}^{q-1} \omega_3(\rho_{n_\sigma}, f^{(q-1)})} \right\| > \sqrt{n_\sigma}$$

для всіх σ, що зумовлює (4).

Теорему доведено.

Автор висловлює вдячність професору Я. Гілевичу та професору І. О. Шевчуку за постановку задачі та цінні поради.

1. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных на отрезке функций. – Киев: Наук. думка, 1992. – 224 с.
2. *Lorentz G. G., Zeller K. L.* Degree of approximation by monotone polynomials // J. Approxim. Theory. – 1968. – **1**. – P. 501–504.
3. *DeVore R. A., Yu X. M.* Pointwise estimates for monotone polynomial approximation // Constr. Approxim. – 1985. – **1**. – P. 323–331.
4. *Шведов А. С.* Теорема Джексона в L^p, $0 < p < 1$, для алгебраических многочленов и порядки комонотонных приближений // Мат. заметки. – 1979. – **25**. – С. 57–65.
5. *Wu X., Zhou S. P.* On a countrexample in monotone approximation // J. Approxim. Theory. – 1992. – **69**. – P. 205–211.
6. *Leviatan D., Shevchuk I. A.* Monotone approximation estimates involving third modulus of smoothnes // Approxim. Theory IX / Ch. K. Chui and L. L. Schumaker (Eds). – Nashville: Vanderbilt Univ. Press, 1998. – P. 223–230.
7. *Leviatan D.* Pointwise estimates for convex polynomial approximation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – **98**. – P. 471–474.
8. *Kopotun K. A.* Pointwise and uniform estimations for convex approximation of functions by algebraic polynomials // Constr. Approxim. – 1994. – **10**. – P. 135–178.

Одержано 16.11.98