УДК 517.5

**А. В. Бондар** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ПРО ДИФЕРЕНЦІЙОВНІСТЬ ВІДОБРАЖЕНЬ СКІНЧЕННОВИМІРНИХ ОБЛАСТЕЙ У БАНАХОВІ ПРОСТОРИ*

The well-known Stepanov criterion of the differentiability (approximate differentiability) of real functions is generalized to the maps of subsets of $\mathbf{R}^n$ into Banach spaces satisfying the Rieffel sharpness condition, in particular, the reflexive Banach spaces. For Banach spaces not satisfying the Rieffel sharpness condition, this criterion is not true.

Відомий критерій Степанова диференційовності (апроксимативної диференційовності) дійсних функцій поширюється на відображення підмножин із $\mathbf{R}^n$ у банахові простори, що задовольняють умову гостроти Ріффела, зокрема, рефлексивні банахові простори. Для банахових просторів, які не задовольняють умову гостроти Ріффела, цей критерій не вірний.

Метою роботи є поширення на випадок відображень у банахові простори класичного критерію диференційовності та апроксимативної диференційовності В. В. Степанова. Нетривіальність цієї задачі випливає уже з того, що не для усіх банахових просторів $E$ ліпшіцева функція $f\colon [a, b] \to E$ має бути диференційовною майже всюди на $[a, b]$, а лише для тих, як це доведено в [1], що задовольняють умову гостроти Ріффела [2]. Клас таких просторів досить широкий і включає в себе усі гільбертові та банахові рефлексивні простори.

**1.** Основними результатами роботи є наступні теореми.

**Теорема 1.** *Нехай $G$ — відкрита множина в $\mathbf{R}^n$, $X$ — довільна підмножина в $G$, $E$ — банахів простір, що задовольняє умову гостроти Ріффела, і $f\colon G \to E$ — вимірне відображення, для якого виконується умова*

$$\overline{\lim_{x\to a}} \frac{\|f(x)-f(a)\|}{\|x-a\|} < \infty \quad \forall a \in X. \tag{1}$$

*Тоді відображення $f$ диференційовне майже в кожній точці множини $X$.*

Вимогу, щоб $E$ задовольняло умову гостроти Ріффела, в теоремі 1 опустити не можна, як це випливає із наступної теореми.

**Теорема 2.** *Нехай $Q^n = [0, 1] \times \ldots \times [0, 1]$ — $n$-вимірний куб в $\mathbf{R}^n$, і $E$ — банахів простір. Для того щоб довільне ліпшіцеве відображення $f\colon Q^n \to E$ було диференційовним майже скрізь на $Q^n$, необхідно і достатньо, щоб $E$ задовольняло умову гостроти Ріффела.*

Наступна теорема дає критерій апроксимативної диференційовності.

**Теорема 3.** *Нехай $X$ — вимірна підмножина в $\mathbf{R}^n$, $E$ — банахів простір, що задовольняє умову гостроти Ріффела, і $f\colon X \to E$ — вимірне відображення, для якого виконується умова*

$$\operatorname{ap}\overline{\lim_{x\to a}} \frac{\|f(x)-f(a)\|}{\|x-a\|} < \infty \quad \forall a \in X. \tag{2}$$

*Тоді $f$ апроксимативно диференційовне майже скрізь на $X$.*

Ці теореми будуть доведені у пунктах 4 – 6 після того, як у пунктах 2 і 3 будуть наведені означення та доведені необхідні допоміжні результати.

* Виконана при частковій підтримці фонду INTAS, грант 94-1474.

**2.** Символом $B^n(x, r)$ (або просто $B(x, r)$), коли розмірність не викликає сумніву, позначаємо відкриту кулю простору $\mathbf{R}^n$ з центром у точці $x$ і радіусом $r > 0$, а символом $\operatorname{mes}_n$ — $n$-міру Лебега в $\mathbf{R}^n$.

Нехай $X$ — вимірна підмножина в $\mathbf{R}^n$ і $x \in X$. Границя

$$\mathcal{P}(x, X) = \lim_{r \to 0} \frac{\operatorname{mes}_n[X \cap B(x, r)]}{\operatorname{mes}_n[B(x, r)]},$$

коли вона існує, називається щільністю множини $X$ в точці $x$. Точки $x \in X$, для яких $\mathcal{P}(x, X) = 1$, називаються точками щільності множини $X$. За теоремою про точки щільності майже усі точки вимірної множини $X \subset \mathbf{R}^n$ є її точками щільності [3, 4].

Точка $y$ топологічного простору $Y$ називається апроксимативною границею вимірної функції $f\colon X \to Y$, якщо для довільного околу $V \subset Y$ точки $y$ щільність множини $X \setminus f^{-1}(V)$ в точці $x$ дорівнює нулю [3, с. 175]. Якщо простір $Y$ хаусдорфовий, то існує не більше ніж один елемент $y \in Y$, що задовольняє цю умову. Апроксимативну границю прийнято позначати символом $\operatorname{ap}\overline{\lim\limits_{z \to x}} f(x)$. У випадку, коли $Y = \overline{\mathbf{R}^1}$ є розширеною дійсною прямою, визначається апроксимативна верхня границя $\overline{\lim\limits_{x \to a}} f(x)$, як точна нижня грань множини таких дійсних чисел $t$, що щільність множини

$$[\mathbf{R}^n \setminus X] \cup \{x \in X : f(x) > t\}$$

в точці $a$ рівна нулеві.

При дослідженні проблем диференційовності важливе значення має введене В. В. Степановим [5] поняття апроксимативної похідної, або апроксимативного диференціалу.

Нехай $f\colon X \to E$ — вимірне відображення вимірної множини $X \subset \mathbf{R}^n$ у нормований простір $E$. Говорять, що $f$ апроксимативно диференційовне в точці $a \in X$, якщо існує таке лінійне відображення $L\colon \mathbf{R}^n \to E$, для якого

$$\operatorname{ap}\overline{\lim_{x \to a}} \frac{\|f(x) - f(a) - L(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0. \tag{3}$$

Якщо таке $L$ існує, то воно єдине [3, с. 230] і позначається символом $\operatorname{ap}f'(a)$. З використанням міри $\operatorname{mes}_1$ і відповідного поняття апроксимативної границі *апроксимативні частинні похідні* $\operatorname{ap}D_i f(a)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, визначаються рівністю

$$\operatorname{ap}D_i f(a) = \operatorname{ap}\overline{\lim_{h \to a}} \frac{f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \ldots, a_n) - f(a)}{h} \tag{4}$$

як елементи нормованого простору $E$.

*Зауваження* **1.** У випадку $n = 1$ ці поняття зв'язані простим співвідношенням. А саме, лінійний оператор $\operatorname{ap}f'(a)\colon \mathbf{R}^1 \to E$ діє за правилом

$$\operatorname{ap}f'(a)h = h\operatorname{ap}D_1 f(a) \quad \forall h \in \mathbf{R}^1.$$

Тому досить часто, за мовчазною згодою, $\operatorname{ap}f'(a)$ і $\operatorname{ap}D_1 f(a)$ при $n = 1$ не розрізняють.

Доведемо твердження, які суттєво залежать від умови гостроти Ріффела, нагадавши спочатку це поняття. Підмножина $A$ банахового простору $E$ називається гострою [2, с. 157], коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує елемент $x(\varepsilon) \in A$, який не належить до замкненої опуклої оболонки множини $A \setminus B(x(\varepsilon), \varepsilon)$. Будемо говорити, що банахів простір $E$ задовольняє умову гостроти Ріффела, коли довільна обмежена підмножина $A \subset E$ є гострою.

**Лема 1.** *Нехай $K$ — компактна підмножина дійсної прямої $\mathbf{R}^1$, $E$ — банахів простір, для якого виконується умова гостроти Ріффела, і $f\colon K \to E$ — відображення, що задовольняє на $K$ умову Ліпшиця з константою $L = L(f)$. Тоді апроксимативна похідна $\operatorname{ap} f'(x)$ існує майже в кожній точці $x \in K$.*

***Доведення.*** Позначимо

$$a = \min\{x \in \mathbf{R}^1 : x \in K\}, \qquad b = \max\{x \in \mathbf{R}^1 : x \in K\}.$$

Тоді $K \subset [a, b]$, $a, b \in K$. Продовжимо відображення $f\colon K \to E$ до відображення $g\colon [a, b] \to E$, визначивши його афінним на кожному інтервалі суміжності $(a_k, b_k) \subset [a, b]$ до множини $K$ і співпадаючим з $f$ в точках $a_k$, $b_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Тоді $g$ є ліпшіцевим відображенням відрізка $[a, b]$ в $E$ з тією ж константою Ліпшіца $L(g) = L(f) = L$. За теоремою 1 з [1] похідна $g'(a)$ існує для майже усіх $x \in [a, b]$. Оскільки $g'$ майже скрізь на $(a, b)$ співпадає з границею послідовності $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ неперервних функцій $g_n(x) = n[g(x + 1/n) - g(x)]$, то функція $x \to g'(x) \in E$ є вимірною на відрізку $[a, b]$ [3, с. 86], а тому вимірною буде і множина $Q$ усіх тих точок $x \in K$, в яких існує $g'(x)$.

Нехай $x_0$ — точка щільності множини $Q$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $r_1(\varepsilon) > 0$, що

$$\operatorname{mes}_1[Q \cap (x_0 - r, x_0 + r)] > 2(1 - \varepsilon)r \quad \forall r < r_1(\varepsilon). \tag{5}$$

Із диференційовності $g$ в точці $x_0$ випливає, що знайдеться таке додатне $r_2(\varepsilon) \le r_1(\varepsilon)$, при якому

$$\left\| \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) \right\| < \varepsilon \tag{6}$$

для всіх таких $x \in [a, b]$, що $|x - x_0| < r_2(\varepsilon)$. Позначимо

$$A(\varepsilon) = \left\{ x \in K : \left\| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - g'(x_0) \right\| < \varepsilon \right\}.$$

Оскільки $g$ співпадає з $f$ на $K$, то із (6) випливає $(x_0 - r, x_0 + r) \cap K \subset A(\varepsilon)$ для $r < r_2(\varepsilon)$, а тому, враховуючи (5), одержуємо оцінку

$$\operatorname{mes}_1\left[(x_0 - r, x_0 + r) \cap \left(\mathbf{R}^1 \setminus A(\varepsilon)\right)\right] \le 2\varepsilon r,$$

із якої, з урахуванням довільності $\varepsilon > 0$, випливає, що функція $f$ має апроксимативну похідну $\operatorname{ap} f'(x_0) = g'(x_0)$ в точці $x_0$. Оскільки $\operatorname{mes}_1[K \setminus Q] = 0$, то цим доведено, що $f$ має апроксимативну похідну майже скрізь на $K$. Лему 1 доведено.

**Лема 2.** *Нехай $K$ — компакт в $\mathbf{R}^n$, $E$ — банахів простір, що задовольняє умову гостроти Ріффела, і $f\colon K \to E$ — відображення, що задовольняє умову Ліпшіца. Тоді $f$ має апроксимативні частинні похідні майже в кожній точці $a \in K$.*

***Доведення.*** Доведення цієї леми безпосередньо випливає із означення частинних похідних та леми 1.

**3.** Наступні дві леми справедливі для довільного нормованого простору і не залежать від умови гостроти Ріффела. Лему 3 будемо доводити з використанням належним чином модифікованої схеми Сакса [4].

**Лема 3.** *Нехай $K$ — компакт в $\mathbf{R}^n$, $E$ — нормований простір, і $f\colon K \to$ $\to E$ — таке неперервне відображення, для якого майже в кожній точці $a \in K$ існують апроксимативні частинні похідні* $\operatorname{ap} D_i f(a)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, *а всі відображення $D_i f\colon a \to D_i f(a)$, визначені майже скрізь на $K$, продовжуються до неперервних відображень $G_i\colon K \to E$, визначених на $K$. Для довільної точки $a$ $\in \in K$ визначимо лінійний оператор $L(a)\colon \mathbf{R}^n \to E$ рівністю*

$$L(a)h = \sum_{i=1}^{n} h_i G_i(a), \qquad h = (h_1, h_2, \ldots, h_n) \in \mathbf{R}^n.$$

*Тоді майже в кожній точці $a \in K$ відображення $f$ має апроксимативну похідну* $\operatorname{ap} f'(a) = L(a)$.

***Доведення.*** 1. Доведення будемо проводити методом математичної індукції за $n$. Для $n = 1$, згідно із зауваженням 1, твердження леми 3 безпосередньо випливає з її умови. Припустимо, що лема 3 вірна для $n = p - 1$, $p \geq 2$, і доведемо, що вона вірна для $n = p$.

Для точок $x \in \mathbf{R}^n$ приймемо позначення $x = (x', x_n)$, де

$$x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}, \qquad x_n \in \mathbf{R}^1.$$

Для довільного $a = (a', a_n) \in K$ визначимо лінійний оператор $l(a', a_n)\colon$ $\mathbf{R}^{n-1} \to E$ рівністю

$$l(a', a_n)h = \sum_{i=1}^{n-1} h_i G_i(a', a_n), \qquad h = (h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

За припущенням індукції для фіксованого $a_n \in K_n$ майже в кожній (відносно міри $\operatorname{mes}_{n-1}$) точці $a'$ компакту

$$K'(a_n) = \{ a' \in \mathbf{R}^{n-1} \colon (a', a_n) \in K \}$$

оператор $l(a', a_n)$ збігається з апроксимативною похідною $f'_{a_n}(a')$ відображення

$$f_{a_n}\colon K'(a_n) \to E, \qquad x' \to f(x', a_n)$$

в точці $a'$.

2. Нехай $a = (a', a_n) \in K$, $x = (x', x_n) \in K$, причому $(x', a_n) \in K$. Введемо позначення

$$\Delta'(a', a_n; x') = \left\| f(x', a_n) - f(a', a_n) - l(a', a_n)(x' - a') \right\|.$$

Для довільних $(a', a_n) \in K$ і $\varepsilon, r > 0$ символом $A(a', a_n; \varepsilon, r)$ позначимо множину усіх таких точок $x' \in B^{n-1}(a', r)$, для яких $(x', a_n) \in K$ і виконується нерівність

$$\Delta'(a', a_n; x') \leq \varepsilon \left\| x' - a' \right\|.$$

Доведемо, що для довільних $\varepsilon, \delta > 0$ знайдуться $r_1 > 0$ і такий компакт

$X \subset K$, що $\operatorname{mes}_n(K \setminus X) < \delta$, і для довільних $(a', a_n) \in X$ при $r < r_1$ виконується нерівність

$$\operatorname{mes}_{n-1} A(a', a_n; \varepsilon, r) \geq (1-\delta) r^{n-1}. \tag{7}$$

Для $m = 1, 2, \ldots$ позначимо

$$X_m = \{(a', a_n) \in K \colon \operatorname{mes}_{n-1} A(a', a_n; \varepsilon, r) \geq (1-\delta) r^{n-1},\ r < 1/m\}.$$

Легко перевірити, що кожна із множин $X_m$ є замкненою, а отже, компактною. Якщо

$$(a', a_n) \in K \setminus \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} X_m\right] = \bigcap_{m=1}^{\infty} (K \setminus X_m),$$

то це означає, що для довільного $m$ існує таке $r_m \leq 1/m$, що

$$\operatorname{mes}_{n-1} A(a', a_n; \varepsilon, r_m) \geq (1-\delta) r_m^{n-1}.$$

Звідси випливає, що точка $a'$ не може бути точкою щільності для множини $A(a', a_n; \varepsilon, 1)$, а тому оператор $l(a', a_n)$ не може бути апроксимативною похідною для $f_{a_n}$ в цій точці. За припущенням індукції множина всіх таких точок має рівну нулеві $(n-1)$-міру на кожному перерізі $a_n = \mathrm{const}$, а тому за теоремою Фубіні

$$\operatorname{mes}_n \left[\bigcap_{m=1}^{\infty} (K \setminus X_m)\right] = 0.$$

Множини $K \setminus X_m$ утворюють спадну за включенням послідовність, а тому знайдеться таке $m$, що $\operatorname{mes}_n(K \setminus X_m) < \delta$. Позначимо $X = X_m$ і $r_1 = 1/m$. Тоді таким чином визначені $X$ і $r_1$ задовольняють усі умови твердження, що доводиться.

3. Для точки $a = (a', a_n) \in K$ і таких точок $x = (x', x_n) \in K$, що $(a', x_n) \in K$, введемо позначення

$$\Delta_n(a', a_n; x_n) = \left\| f(a', x_n) - f(a', a_n) - G_n(a', a_n)(x_n - a_n) \right\|.$$

Для $(a', a_n) \in X$ символом $B(a', a_n; \varepsilon, r)$ позначимо множину всіх таких $x_n \in B^1(a_n, r)$, що $(a', x_n) \in K$ і

$$\Delta_n(a', a_n; x_n) \leq \varepsilon \| x_n - a_n \|.$$

Доведемо, що для $\varepsilon, \delta > 0$ знайдуться додатне $r_2 \leq r_1$ і такий компакт $Y \subset X$, що $\operatorname{mes}_n(X \setminus Y) < \delta$ і для довільних $(a', a_n) \in Y$ при $r < r_2$ виконується нерівність

$$\operatorname{mes}_1 B(a', a_n; \varepsilon, r) \geq (1-\delta) r. \tag{8}$$

Для $m = 1, 2, \ldots$ нехай $Y_m$ є множиною таких точок $(a', a_n) \in X$, для яких нерівність

$$\operatorname{mes}_1 B(a', a_n; \varepsilon, r) \geq (1-\delta) r$$

виконується для всіх $r \leq 1/m$. Тоді множини $Y_m$ компактні, а множина $X \setminus \left[\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m\right]$ має 1-міру нуль на кожному перерізі $a' = \mathrm{const}$, а тому $\operatorname{mes}_n\left[\bigcap_{m=1}^{\infty} (K \setminus Y_m)\right] = 0$. Множини $X \setminus Y_m$ утворюють спадну послідовність і, отже, знайдеться таке $m$, що $\operatorname{mes}_n(X \setminus Y_m) < \delta$. Позначимо $Y = Y_m$ і $r_2 = \min\{r_1, 1/m\}$. Твердження пункту 3 доведене.

4. Для $a, x \in K$ позначимо

$$\Delta(a, x) = \| f(x) - f(a) - L(a)(x-a) \|.$$

Оскільки відображення $a \to l(a)$ на компакті $K$ неперервне, а отже, і рівномірно неперервне, то знайдеться таке додатне $r_0 < r_2$, що $\| l(a) - l(b) \| < \varepsilon$, як тільки $\| a - b \| \le r_0$. Нехай $a = (a', a_n)$ — довільна (але фіксована) точка множини $Y$. Символом $Z(\varepsilon, r)$ позначимо множину всіх таких точок $(x', x_n) \in Y$, що

а) $x_n \in B(a', a_n; \varepsilon, r)$; б) $x' \in A(a', x_n; \varepsilon, r)$.

Із (7), (8) та теореми Фубіні випливає, що при $r < r_0$

$$\operatorname{mes}_n Z(\varepsilon, r) \ge (1-\delta)^2 r^n. \tag{9}$$

Для кожної точки $(x', x_n) \in Z(\varepsilon, r)$ при $r < r_0$ маємо

$$\begin{aligned} \Delta(a, x) &= \| f(x', x_n) - f(a', a_n) - L(a)(x-a) \| = \\ &= \| f(x', x_n) - f(a', x_n) - l(a', x_n)(x' - a') + \\ &+ f(a', x_n) - f(a', a_n) - \operatorname{ap} D_n f(a', a_n)(x_n - a_n) + \\ &+ [ l(a', x_n) - l(a', a_n) ] (x' - a') \| \le \\ &\le \Delta'(a', x_n; x') + \Delta_n(a', a_n; x_n) + \| l(a', x_n) - l(a', a_n) \| \| x' - a' \| \le \\ &\le \varepsilon \| x' - a' \| + \varepsilon | x_n - a_n | + \varepsilon \| x' - a' \| \le 3\varepsilon \| x - a \|. \end{aligned} \tag{10}$$

Із (9) та (10) робимо висновок, що для довільного $\varepsilon > 0$ точка $a$ є точкою щільності для множини тих точок $x = (x', x_n)$, для яких виконується нерівність

$$\frac{\Delta(a, x)}{\| x - a \|} \le 3\varepsilon,$$

а це означає, що $f$ має в точці $a$ апроксимативну похідну $\operatorname{ap} f'(a) = L(a)$. Оскільки $a$ — довільна точка множини $Y$, побудованої для довільного $\delta > 0$ так, що виконується нерівність $\operatorname{mes}_n(K \setminus Y) \le 2\delta$, то звідси випливає, що $f$ має апроксимативну похідну $\operatorname{ap} f'(a) = L(a)$ майже в кожній точці $a \in K$. Лему 3 доведено.

Застосовуючи тільки що доведену лему, отримуємо наступний, більш загальний для сепарабельних нормованих просторів, результат.

**Теорема 4.** *Нехай $X$ — вимірна підмножина в $\mathbf{R}^n$, $E$ — сепарабельний нормований простір і $f\colon X \to E$ — таке вимірне відображення, для якого частинні апроксимативні похідні існують майже скрізь на $X$. Тоді $f$ апроксимативно диференційовне майже в кожній точці множини $X$.*

*Доведення.* Без обмеження загальності можна у доведенні припустити, що множина $X$ обмежена і, отже, має скінченну $n$-міру Лебега. Легко переконатися у тому, що всі апроксимативні похідні $D_i f$ є вимірними функціями на $X$. За теоремою Лузіна, вірною для відображень у сепарабельні метричні простори [3, с. 89], для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий компакт $K \subset X$, що $\operatorname{mes}_n [X \setminus K] < \varepsilon$, і крім цього, відображення $f$ і всі його апроксимативні частинні похідні неперервні на $K$. Тоді за лемою 3 відображення $f$ апроксимативно диференційовне майже в усіх точках компакту $K$. Зважаючи на довільність $\varepsilon > 0$, приходимо до висновку, що цим самим теорему 4 доведено.

**Лема 4.** *Нехай $G$ — відкрита множина в $\mathbf{R}^n$, $X$ — вимірна підмножина в $G$, $E$ — нормований простір і $f\colon G \to E$ — відображення, для якого існують $r_0 > 0$ і $L < \infty$ такі, що*

*а)* $B(a, r_0) \subset G \quad \forall\, a \in X$;

*б)* $\|f(x) - f(a)\| \le L\|x - a\| \quad \forall\, a \in X \quad \forall\, x \in B(a, r)$.

*Тоді якщо точка $a \in X$ є точкою щільності для множини $X$ і $f$ апроксимативно диференційовне у цій точці, то $f$ диференційовне у точці $a$.*

***Доведення.*** Нехай $a$ — така точка щільності множини $X$, в якій $f$ апроксимативно диференційовне. Для довільного $\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, позначимо

$$A(\varepsilon) = \left\{ x \in D\colon \frac{\|f(x) - f(a) - \mathrm{ap}\, f'(a)(x-a)\|}{\|x - a\|} > \varepsilon \right\}.$$

Тоді

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathrm{mes}_n [A(\varepsilon) \cap B(a, r)]}{\mathrm{mes}_n [B(a, r)]} = 0,$$

а тому знайдеться таке $r_1(\varepsilon)$, $0 < r_1(\varepsilon) < r_0$, що

$$\mathrm{mes}_n [A(\varepsilon) \cap B(a, r)] < \varepsilon^n \mathrm{mes}_n [B(a, r)] \quad \forall\, r < r_1(\varepsilon). \tag{11}$$

Оскільки $a$ — точка щільності множини $X$, то знайдеться таке додатне $r(\varepsilon) < r_1(\varepsilon)$, що

$$\mathrm{mes}_n [B(a, r) \cap X] > \varepsilon^n \mathrm{mes}_n [B(a, r)] \quad \forall\, r < r(\varepsilon). \tag{12}$$

Нехай $x \in B(a, r(\varepsilon))$ і $r = \|x - a\|$. Тоді $B(x, \varepsilon r) \subset G$ і $\mathrm{mes}_n [B(x, \varepsilon r)] = \varepsilon^n \mathrm{mes}_n [B(a, r)]$, а тому із (11) і (12) випливає, що знайдеться точка $z \in [B(x, \varepsilon r) \setminus A(\varepsilon)] \cap X$. Враховуючи, що $z \in X$, маємо

$$\begin{aligned} &\|f(x) - f(a) - \mathrm{ap}\, f'(x)(x-a)\| \le \\ &\le \|f(x) - f(z)\| + \|f(z) - f(a) - \mathrm{ap}\, f'(a)(z - a)\| + \|\mathrm{ap}\, f'(a)(z - x)\| \le \\ &\le L\|x - z\| + \varepsilon\|z - a\| + \|\mathrm{ap}\, f'(a)\|\|z - x\| \le \\ &\le \varepsilon\big(L + 1 + \varepsilon + \|\mathrm{ap}\, f'(a)\|\big)\|x - a\|. \end{aligned}$$

Із цієї нерівності і довільності $\varepsilon > 0$ випливає, що апроксимативна похідна $\mathrm{ap}\, f'(a)$ є насправді звичайною похідною (за Фреше) відображення $f$ в точці $a$. Лему 4 доведено.

**4.** ***Доведення теореми*** **1.** Для $m = 1, 2, \ldots$ позначимо

$$A_m = \{ a \in G\colon \|f(x) - f(a)\| \le m\|x - a\| \ \forall\, x \in B(a, 1/m) \}.$$

Доведемо, що множина $A_m$ замкнена $\forall\, m = 1, 2, \ldots$. Дійсно, нехай $x_p \in A_m$ і $x_p \to x_0 \in \mathbf{R}^n$ при $p \to \infty$. Нехай $x \in B(x_0, 1/m)$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $p_0$, що

$$\|x_p - x_0\| < \varepsilon, \qquad x_0 \in B(x_p, 1/m), \qquad x \in B(x_p, 1/m) \qquad \forall\, p > p_0.$$

Звідси

$$\|f(x)-f(x_0)\| \le \|f(x)-f(x_p)\| + \|f(x_p)-f(x_0)\| \le$$
$$\le m(\|x-x_p\| + \|x_p-x_0\|) \le m\|x-x_p\| + \varepsilon m,$$

і, отже,

$$\|f(x)-f(x_0)\| \le m\|x-x_0\|,$$

тобто $x_0 \in A_m$.

Подамо $A_m$ у вигляді об'єднання послідовності компактів $A_{mq}$, $q = 1, 2, \ldots$, діаметри яких не перевищують $1/m$, і зауважимо, що обмеження відображення $f$ на $A_{mq}$ є ліпшіцевим із константою $m$. За лемою 2 відображення $f|_{A_{mq}}$ має частинні апроксимативні похідні майже скрізь на $A_{mq}$.

Нехай $E_{mq}$— замкнена лінійна оболонка множини $f(A_{mq})$ у просторі $E$. Оскільки відображення $f|_{A_{mq}}$ неперервне, то множина $f(A_{mq})$ сепарабельна, а тому сепарабельний і підпростір $E_{mq} \subset E$. За уже доведеною теоремою 4 відображення

$$f|_{A_{mq}} : A_{mq} \to E_{mq} \subset E$$

апроксимативно диференційовне майже скрізь на $A_{mq}$. Позначимо

$$r_{mq} = \min\{1/m, \rho(A_{mq}, \partial G)\},$$

де $\rho(A_{mq}, \partial G)$ — відстань від компакту $A_{mq} \subset G$ до межі відкритої множини $G$. Тоді $B(a, r_{mq}) \subset G \quad \forall a \in A_{mq}$ і $\|f(x)-f(a)\| \le m\|x-a\| \quad \forall x \in B(a, r_{mq})$, тобто виконуються умови а і б леми 4. За цією лемою в кожній точці щільності компакту $A_{mq}$, в якій $f$ апроксимативно диференційовне, $f$ буде диференційовним. Отже, $f$ диференційовне майже скрізь на $A_{mq}$, і оскільки із (1) випливає

$$\bigcup_{m,q=1}^{\infty} A_{mq} \supset X,$$

то цим самим теорему 1 доведено.

**5.** ***Доведення теореми*** **2.** *Достатність* у цій теоремі безпосередньо випливає із уже доведеної теореми 1. Доведемо *необхідність*. Припустимо, що банахів простір $E$ не задовольняє умову гостроти Ріффела. Тоді за теоремою 1 [1] існує ліпшіцева функція $\varphi : [0, 1] \to E$, яка не має похідної в жодній точці відрізка $[0, 1]$. Визначимо відображення $f: Q^n \to E$ співвідношенням

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \varphi(x_1)\varphi(x_2)\ldots\varphi(x_n).$$

Тоді $f$, очевидно, ліпшіцеве і не має похідної в жодній точці куба $Q^n$. Теорему 2 доведено.

**6.** ***Доведення теореми*** **3.** Відношення

$$\lambda(a,b) = \frac{\mathrm{mes}_n[B(a, \|a-b\|) \cap B(b, \|a-b\|)]}{\|a-b\|^n}$$

є інваріантним відносно ізометрій простору $\mathbf{R}^n$ і множень на скаляри, а тому $\lambda(a, b)$ приймає одне і те ж значення $\lambda$ для всіх пар точок $a, b \in \mathbf{R}^n$, $a \ne b$ [3].

Для $a \in X$, $m = 1, 2, \ldots$ і $r > 0$ позначимо

$$A(a, r, m) = \left[ \left(\mathbf{R}^n \setminus X\right) \bigcup \{ x \in X: \| f(x) - f(a) \| \geq m \| x - a \| \} \right] \bigcap B(a, r),$$

$$B_m = \left\{ a \in X: \operatorname{mes}_n A(a, r, m) < \lambda r^n / 2 \ \ \forall r < 1/m \right\}.$$

Кожна із множин $B_m$, як легко перевірити, є вимірною і $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} B_m$. Нехай $a, b \in B_m$ і $r = \| a - b \| < 1/m$. Тоді

$$\operatorname{mes}_n [\, A(a, r, m) \bigcup A(b, r, m) \,] < \lambda r^n = \operatorname{mes}_n [\, B(a, r) \bigcap B(b, r) \,],$$

а тому знайдеться точка

$$z \in [\, B(a, r) \bigcap B(b, r) \,] \setminus [\, A(a, r, m) \bigcup A(b, r, m) \,].$$

Звідси отримуємо

$$\| f(a) - f(b) \| \leq \| f(a) - f(z) \| + \| f(z) - f(b) \| \leq 2m \| a - b \|.$$

Подамо тепер кожну множину із множин $B_m$ у вигляді об'єднання послідовності вимірних множин $B_{mk}$, $k = 1, 2, \ldots$, діаметри яких менші за $1/m$, і зауважимо, що обмеження $f$ на кожну із множин $B_{mk}$ є ліпшіцевим.

Для довільного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий компакт $K_{mk} \subset B_{mk}$, що $\operatorname{mes}_n (B_{mk} \setminus K_{mk}) < \varepsilon$. За лемою 2 майже в кожній точці $a \in K_{mk}$ відображення $f$ має частинні апроксимативні похідні $D_i f(a)$. Нехай $E_{mk}$ — замкнена лінійна оболонка множини $f(K_{mk})$ у просторі $E$. Оскільки відображення $f$ є ліпшіцевим на $K_{mk}$, то множина $f(K_{mk})$ є сепарабельною, а тому є сепарабельним і підпростір $E_{mk} \subset E$. Із уже доведеної теореми 4 випливає, що відображення

$$f|_{K_{mk}} : K_{mk} \to E_{mk} \subset E$$

апроксимативно диференційовне майже скрізь на $K_{mk}$. Зважаючи на довільність $\varepsilon > 0$, приходимо до висновку, що цим самим теорему 3 повністю доведено.

1. *Бондарь А. В.* О дифференциальных свойствах отображений в банахово пространство // Укр. мат. журн. – 1997. – 49, № 4. – С. 500 – 509.
2. *Дистель Дж.* Геометрия банаховых пространств. – Киев: Вища шк., 1980. – 216 с.
3. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
4. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1919. – 191 с.
5. *Stepanoff W.* Sur les conditions de l'existence de la différentielle totale // Мат. сб. – 1924. – 32. – С. 511–526.

Одержано 26.11.96