УДК 519.21

В. В. Булдигін, В. М. Мельник, В. Г. Шпортюк
(Нац. техн. ун-т України „КПІ", Київ)

ПРО ТЕОРЕМИ ЛЕВІ – БАКСТЕРА ДЛЯ ДРОБОВИХ ПОЛІВ. II

We establish sufficient conditions under which shot noise fields with response function of certain form possess the Levy – Bakster property on an increasing parametric set.

Встановлено достатні умови, при яких дробові поля з функціями відгуку певного вигляду мають Леві – Бакстерову властивість на зростаючій параметричній множині.

Дана робота є продовженням роботи [29]. При цьому зберігаються введені в ній позначення, нумерація формул та першоджерел.

4. Теореми Леві – Бакстера для однорідних узагальнених дробових полів зі спеціальними функціями відгуку. Розглянемо теорему Леві – Бакстера на зростаючому параметричному інтервалі для однорідних узагальнених дробових полів, перетворення Фур'є функції відгуку яких має степеневий характер малості на нескінченності. Такі задачі для гауссових процесів розглядались Е. Гладишевим [18].

Теорема 5. *Нехай* $\kappa(\bar{t})$, $\bar{t} \in \mathbf{R}^m$, $m \geq 1$ — *однорідне узагальнене дробове поле з функцією відгуку* $f(\bar{t})$, *перетворення Фур'є якої задовольняє умову:*

1) $\left|\hat{f}(\bar{\lambda})\right| = M\|\bar{\lambda}\|^{-\beta} + o\left(\|\bar{\lambda}\|^{-\beta}\right)$ *при* $\|\bar{\lambda}\| \to \infty$, *де* $M > 0$, $\beta > m$.

Нехай $p = p(\beta) = k$, $k \in \mathbf{N}$, *якщо* $2km - m < 2\beta \leq 2km + m$, $\bar{p} = (p, \ldots, p) \in \in \mathbf{N}^m$,

$$c_n = \begin{cases} (\alpha_n \tau_n)^{2m-2\beta}, & \text{якщо} \quad 2\beta \neq 2km+m; \\ (\alpha_n \tau_n)^{2m-2\beta} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-1}, & \text{якщо} \quad 2\beta = 2km+m. \end{cases}$$

Тоді, якщо виконуються умови

2) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n \tau_n = 0$,

а у випадку $2\beta = 2km + m$ *додатково ще і*

4) *існує таке* $\theta > 0$, *що для довільного* $n \in \mathbf{N}$ $\alpha_n^2 \tau_n \geq \theta$,

то

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ c_n \alpha_n^{-m} \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \left(\Delta^{\bar{p}}_{\alpha_n \tau_n} \kappa((\bar{k}-\bar{1})\,\alpha_n \tau_n)\right)^2 = c,$$

де

$$c = M^2(\sigma_2 + \sigma_W^2)\, 2^{m-2\beta} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} (2\sin u_r)^{2p}\right) \|\bar{u}\|^{-2\beta} d\bar{u}.$$

***Зауваження* 4.** Якщо хоча б один з параметрів σ_2 або σ_W не дорівнює нулю, то очевидно, що $c \neq 0$.

Доведення. З умови 1 випливає, що існує така функція $g(\bar{\lambda})$, що

$$\left|\hat{f}(\bar{\lambda})\right| = \left(M + g(\bar{\lambda})\right)\|\bar{\lambda}\|^{-\beta}, \tag{13}$$

причому $\lim\limits_{\|\bar{\lambda}\|\to\infty} g(\bar{\lambda}) = 0$.

Виберемо довільне $\varepsilon > 0$ і таке $B = B(\varepsilon)$, що, якщо $\|\bar{\lambda}\| > B$, то $|g(\bar{\lambda})| < \varepsilon$.

Спочатку розглянемо випадок, коли $2km - m < 2\beta < 2km + m$.

Перевіримо виконання першої умови наслідку 4 з [29]. Позначивши вираз із першої умови через I_{1n}, подамо його у вигляді

$$I_{1n} = I_{1n1} + I_{1n2}, \tag{14}$$

де

$$I_{1n1} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| \le B} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \sin \frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \left| \hat{f}(\bar{\lambda}) \right|^2 d\bar{\lambda},$$

$$I_{1n2} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| > B} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \sin \frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \left| \hat{f}(\bar{\lambda}) \right|^2 d\bar{\lambda}.$$

Оцінимо I_{1n1}. Неважко довести, що

$$I_{1n1} \le \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| \le B} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \left| \hat{f}(\bar{\lambda}) \right|^2 d\bar{\lambda} \le$$

$$\le \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} (\alpha_n \tau_n)^{2mp} B^{2mp} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| \le B} \left| \hat{f}(\bar{\lambda}) \right|^2 d\bar{\lambda} =$$

$$= K_{11} (\alpha_n \tau_n)^{2mp + m - 2\beta}, \tag{15}$$

де $K_{11} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) B^{2mp} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| \le B} \left| \hat{f}(\bar{\lambda}) \right|^2 d\bar{\lambda} < \infty.$

Отже, із співвідношення (15) та умови 3 теореми 5, випливає $\lim\limits_{n \to \infty} I_{1n1} = 0$.

Оцінимо тепер I_{1n2}. За допомогою зображення (13) отримуємо

$$I_{1n2} \le M^2 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| > B} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \sin \frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \|\bar{\lambda}\|^{-2\beta} d\bar{\lambda} +$$

$$+ K_{12} \varepsilon + K_{13} \varepsilon^2 = I_{1n21} + K_{12} \varepsilon + K_{13} \varepsilon^2, \tag{16}$$

де K_{12} і K_{13} — сталі, що не залежать від n.

Розглянемо

$$I_{1n21} = M^2 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| > B} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \sin \frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \|\bar{\lambda}\|^{-2\beta} d\bar{\lambda} =$$

$$= M^2 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \sin \frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \|\bar{\lambda}\|^{-2\beta} d\bar{\lambda} -$$

$$- M^2 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| \le B} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \sin \frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \|\bar{\lambda}\|^{-2\beta} d\bar{\lambda}. \tag{17}$$

Другий доданок у (17) оцінимо наступним чином:

$$M^2 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| \le B} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2 \sin \frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \|\bar{\lambda}\|^{-2\beta} d\bar{\lambda} \le$$

$$\leq M^2\left(\sigma_2+\sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{2mp-m} (2\pi)^{m-1} \int\limits_{\rho \leq B} \rho^{2mp+m-1-2\beta} d\rho \leq$$

$$\leq K_{14} (\alpha_n \tau_n)^{2mp+m-2\beta}, \tag{18}$$

де $K_{14} < \infty$ і не залежить від n. Таким чином, із співвідношень (14) – (18) випливає

$$\lim_{n\to\infty} \left| I_{1n} - M^2\left(\sigma_2+\sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2\sin\frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \|\bar{\lambda}\|^{-2\beta} d\bar{\lambda} \right| \leq$$

$$\leq (K_{12} + K_{12}\varepsilon)\varepsilon.$$

Звідси, завдяки довільному вибору ε, маємо

$$\lim_{n\to\infty} I_{1n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sigma_2+\sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2\sin\frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) |\hat{f}(\bar{\lambda})|^2 d\bar{\lambda} =$$

$$= M^2 (\sigma_2+\sigma_W^2)\, 2^{m-2\beta} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} (2\sin u_r)^{2p} \right) \|\bar{u}\|^{-2\beta} d\bar{u} = c.$$

Отже, умова 1 наслідку 4 з [29] виконана.

Перевіримо виконання другої умови наслідку 4. Розглянемо

$$I_{2n} = \left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)^2 c_n^2\, \alpha_n^{-2m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \dfrac{\alpha_n(\lambda_r+\mu_r)}{2}}{\sin^2 \dfrac{\tau_n \alpha_n (\lambda_r+\mu_r)}{2}} \left(\sin\frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\sin\frac{\mu_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) |\hat{f}(\bar{\lambda})|^2 |\hat{f}(\bar{\mu})|^2 d\bar{\mu}\, d\bar{\lambda} =$$

$$= \left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)^2 c_n^2\, \alpha_n^{-2m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} \int\limits_{\mathbf{R}^m} H_2(\bar{\lambda},\bar{\mu})\, d\bar{\mu}\, d\bar{\lambda}$$

(де через $H_2(\bar{\lambda},\bar{\mu})$ для зручності позначимо підінтегральну функцію). Тоді

$$I_{2n} = I_{2n1} + I_{2n2} + I_{2n3}, \tag{19}$$

де

$$I_{2n1} = \left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)^2 c_n^2\, \alpha_n^{-2m} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| \leq B} \int\limits_{\|\bar{\mu}\| \leq B} H_2(\bar{\lambda},\bar{\mu})\, d\bar{\mu}\, d\bar{\lambda},$$

$$I_{2n2} = 2\left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)^2 c_n^2\, \alpha_n^{-2m} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| \leq B} \int\limits_{\|\bar{\mu}\| > B} H_2(\bar{\lambda},\bar{\mu})\, d\bar{\mu}\, d\bar{\lambda},$$

$$I_{2n3} = \left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)^2 c_n^2\, \alpha_n^{-2m} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| > B} \int\limits_{\|\bar{\mu}\| > B} H_2(\bar{\lambda},\bar{\mu})\, d\bar{\mu}\, d\bar{\lambda}.$$

Скориставшись нерівностями

$$\frac{2}{\pi}|x| \leq |\sin x| \leq |x|, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

і тим, що

$$\sup_{n>1}\sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{\tau_n^2 \sin^2\left(\tau_n^{-1} x\right)}{\sin^2(x)} \le \frac{\pi^2}{4}, \tag{20}$$

оцінимо доданки у (19). Для першого доданку маємо нерівність

$$I_{2n1} \le K_{12}(\alpha_n \tau_n)^{2(m(2p+1)-2\beta)}, \tag{21}$$

де

$$K_{12} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \left(\frac{B}{2}\right)^{4mp} \left(\int\limits_{\|\bar\lambda\| \le B} \left|\hat f(\bar\lambda)\right|^2 d\bar\lambda \right)^2 < \infty.$$

Для другого доданку маємо

$$I_{2n2} \le \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} 2^{1-4mp} I_{1n1} I_{1n2}. \tag{22}$$

Із співвідношень (21), (22) і умови 3 теореми випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n1} = 0 \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty} I_{2n2} = 0.$$

Оцінимо третій доданок I_{2n3}. При цьому будемо розрізняти випадки, коли $2\beta \le 2mp$ і $2pm < 2\beta < (2p+1)m$. Спочатку оцінимо I_{2n3}, припускаючи, що $2\beta \le 2pm$:

$$I_{2n3} \le (M+\varepsilon)^4 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 c_n^2 \alpha_n^{-2m} \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{4\beta - 2m} \times$$

$$\times \int\limits_{\|\bar v\| > \frac{B\tau_n\alpha_n}{2}} \int\limits_{\|\bar u\| > \frac{B\tau_n\alpha_n}{2}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} (\sin v_r)^{2p} (\sin u_r)^{2p} \right) \times$$

$$\times \|\bar u\|^{-2\beta} \|\bar v\|^{-2\beta} \, d\bar u \, d\bar v.$$

Інтеграл у правій частині оцінюється зверху скінченною сумою однотипних інтегралів по всіх координатних кутах. Оцінимо, наприклад, той із них, у якому інтегрування проводиться по першому координатному куту. Розбивши перший координатний кут на $2m$-вимірні куби з довжиною ребра π, отримаємо

$$I_{2n3} \le (M+\varepsilon)^4 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 c_n^2 \alpha_n^{-2m} \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{4\beta - 2m} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,\pi]^m} \int\limits_{[0,\pi]^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} (\sin v_r)^{2p} (\sin u_r)^{2p} \right) \times$$

$$\times \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{m} (v_r + k_r \pi)^2 \right)^{-\beta} \right) \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{q_j=0}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{m} (u_r + q_r \pi)^2 \right)^{-\beta} \right) d\bar u \, d\bar v. \tag{23}$$

Розглянемо функцію $\varphi_{a,b}(\bar u)$, $\bar u \in [0,\pi]^m$, $b > m \ge 1$:

$$\varphi_{a,b}(\bar u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{k_i=0}^{\infty} \frac{\prod_{r=1}^{m} |\sin u_r|^a}{\left(\sum_{r=1}^{m} (u_r + k_r \pi)^2 \right)^{b/2}}. \tag{24}$$

Легко бачити, що при $b > m$ справедлива оцінка

$$\varphi_{a,b}(\bar{u}) \le \frac{\prod_{r=1}^{m} |u_r|^a}{\left(\sum_{r=1}^{m} (k_r\pi)^2\right)^{b/2}} + K_0, \tag{25}$$

де K_0 — деяка стала. Таким чином, із (23) і (25), отримуємо

$$I_{2n31} \le (M+\varepsilon)^4 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 c_n^2 \, \alpha_n^{-2m} \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{4\beta-2m} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,\pi]^m} \int\limits_{[0,\pi]^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)}\right) \left(\frac{\prod_{r=1}^{m} |u_r|^{2p}}{\left(\sum_{r=1}^{m} (u_r\pi)^2\right)^{\beta}} + K_0\right) \times$$

$$\times \left(\frac{\prod_{r=1}^{m} |v_r|^{2p}}{\left(\sum_{r=1}^{m} (v_r\pi)^2\right)^{\beta}} + K_0\right) d\bar{u}\, d\bar{v} \le (M+\varepsilon)^4 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 c_n^2 \, \alpha_n^{-2m} \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{4\beta-2m} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,\pi]^m} \int\limits_{[0,\pi]^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)}\right) \left(\prod_{r=1}^{m} |u_r|^{2p-\frac{2\beta}{m}} + K_0\right) \times$$

$$\times \left(\prod_{r=1}^{m} |v_r|^{2p-\frac{2\beta}{m}} + K_0\right) d\bar{u}\, d\bar{v} \le (M+\varepsilon)^4 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 c_n^2 \, \alpha_n^{-2m} \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{4\beta-2m} \times$$

$$\times \left(|\pi|^{2pm-2\beta} + K_0\right)^2 \prod_{r=1}^{m} \int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)} du_r\, dv_r. \tag{26}$$

Оскільки за властивістю ядра Фейєра

$$(\pi n)^{-1} \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{nx}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx = 1,$$

то із (26) випливає

$$I_{2n31} \le K_{23}\, \tau_n^m, \tag{27}$$

де

$$K_{23} = (M+\varepsilon)^4 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 \pi^m \left(\pi^{2pm-2\beta} + K_0\right)^2 2^{-4\beta+3m} \prod_{r=1}^{m} \int_0^{\pi} \frac{\tau_n \sin(\tau_n^{-1} x_r)}{\sin(x_r)} dx_r < \infty.$$

Таким чином, $\lim\limits_{n\to\infty} I_{2n31} = 0$. Отже, якщо $2\beta \le 2mp$, то $\lim\limits_{n\to\infty} I_{2n3} = 0$.

У випадку, коли $2mp < 2\beta < 2mp + m$, доведення відрізняється лише тим, що у процесі доведення розглядаються функції $\varphi_{a,b}(u)$ з іншими параметрами. А саме: $\varphi_{2p,2\beta}(u)$, $\varphi_{2p,2mp}(\bar{v})$. Таким чином, друга умова наслідку 4 з [29] також виконується.

Перевіримо виконання третьої умови наслідку 4. Позначимо вираз, що стоїть під знаком границі у третій умові через I_{3n} і подамо його у вигляді

$$I_{3n} = I_{3n1} + I_{3n2} + I_{3n3}, \tag{28}$$

де

$$I_{3n1} = c_n \sigma_4 \left(\alpha_n^{-1} \tau_n\right)^m \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| \le B} \int\limits_{\|\bar{\mu}\| \le B} H_3(\bar{\mu}, \bar{\lambda})\, d\bar{\mu}\, d\bar{\lambda},$$

$$I_{3n2} = 2c_n \sigma_4 \left(\alpha_n^{-1} \tau_n\right)^m \int\limits_{\|\bar{\mu}\| \le B} \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| > B} H_3(\bar{\mu}, \bar{\lambda})\, d\bar{\lambda}\, d\bar{\mu},$$

$$I_{3n3} = c_n \sigma_4 \left(\alpha_n^{-1} \tau_n\right)^m \int\limits_{\|\bar{\lambda}\| > B} \int\limits_{\|\bar{\mu}\| > B} H_3(\bar{\mu}, \bar{\lambda})\, d\bar{\mu}\, d\bar{\lambda},$$

а через $H_3(\bar{\mu}, \bar{\lambda})$ позначено підінтегральну функцію.

Аналогічно, як і при розгляді другої умови, оцінимо перший доданок у (28). Отримаємо

$$I_{3n1} \le K_{31} (\tau_n \alpha_n)^{m(2p+1)-2\beta},$$

де

$$K_{31} = \sigma_4 \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \left(\frac{B}{2}\right)^{2mp} \left[\int\limits_{\|\bar{\mu}\| \le B} 1\, d\bar{\mu} \int\limits_{\|\bar{\mu}\| \le B} \left|\hat{f}(\bar{\mu})\right|^2 d\bar{\mu} \right] < \infty.$$

Отже,

$$\lim_{n \to \infty} I_{3n1} = 0. \tag{29}$$

Оцінимо другий доданок у (28):

$$I_{3n2} \le 2\sigma_4 (M + \varepsilon)\, c_n\, \alpha_n^{-m} \tau_n^m (\tau_n \alpha_n)^{mp} \left(\frac{B}{2}\right)^{mp} \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{\beta - 2m} \times$$

$$\times \int\limits_{\|\bar{u}\| \le \frac{B\alpha_n\tau_n}{2}} \int\limits_{\|\bar{v}\| > \frac{B\alpha_n\tau_n}{2}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} |\sin v_r|^p \right) \left| \hat{f}\left(\frac{2\bar{u}}{\alpha_n \tau_n}\right) \right| \times$$

$$\times \|\bar{v}\|^{-\beta}\, d\bar{v}\, d\bar{u}. \tag{30}$$

Інтеграл по змінній $\bar{v}$ у правій частині співвідношення (30) оцінюється скінченною сумою однотипних інтегралів по всіх координатних кутах. Тому досить буде оцінити один із них. Наприклад той, який береться по першому координатному куту (I_{3n21}). Розіб'ємо перший координатний кут на m-вимірні куби з довжиною ребра π. Отримаємо

$$I_{3n21} = \sigma_4 (M + \varepsilon)\, c_n\, \alpha_n^{-m} \tau_n^m\, 2^{2m-\beta} (\tau_n \alpha_n)^{mp+\beta-2m} \left(\frac{B}{2}\right)^{mp} \times$$

$$\times \int\limits_{\|\bar{u}\| \le \frac{B\alpha_n\tau_n}{2}} \int\limits_{[0,\pi]^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} \right) \left| \hat{f}\left(\frac{2\bar{u}}{\alpha_n \tau_n}\right) \right| \left| \varphi_{p,\beta}(\bar{v}) \right| d\bar{v}\, d\bar{u}. \tag{31}$$

Нехай n настільки велике, що виконується нерівність $B\alpha_n\tau_n \le 2\pi$. Тоді інтеграл по змінній $\bar{u}$ у правій частині співвідношення (31) оцінюється скінченною сумою однотипних інтегралів по всіх m-вимірних кубах, ребра яких лежать на координатних осях і одна з вершин співпадає з початком координат. При цьому довжина ребра дорівнює π. Тому досить буде оцінити один із них. Наприклад той, який береться по множині $[0, \pi]^m$. Оскільки $\left|\varphi_{p,\beta}(\bar{v})\right| \le$ $\le \prod_{r=1}^{m} |v_r|^{p-\beta/m} + K_0$, то цей інтеграл у свою чергу розпадається на суму двох інтегралів. Наведемо оцінку лише того з них, який відповідає першому доданку в оцінці функції $\varphi_{p,\beta}(\bar{v})$:

$$I_{3n11} = 2^{2m-\beta+1}\sigma_4(M+\varepsilon)\,c_n\,\alpha_n^{-m}\tau_n^m(\tau_n\alpha_n)^{mp+\beta-2m}\left(\frac{B}{2}\right)^{mp} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,\pi]^m}\int\limits_{[0,\pi]^m}\left(\prod_{r=1}^m \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)}\right)\left|\hat{f}\left(\frac{2\bar{u}}{\alpha_n\tau_n}\right)\right|\left(\prod_{r=1}^m |v_r|^{p-\beta/m}\right)d\bar{v}\,d\bar{u}.$$

Використовуючи властивості ядра Фейєра і інтегровність $\left|\hat{f}(\bar{z})\right|^2$, отримаємо

$$I_{3n211} \le K_{32}\,\alpha_n^{-m}(\tau_n\alpha_n)^{mp-\beta+m/2},$$

де $K_{32}<\infty$. Оскільки $2mp+m>\beta$, $\lim\limits_{n\to\infty}\tau_n\alpha_n=0$ і $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n^{-m}=0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}I_{3n211}=0$ і тому

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n2} = 0. \tag{32}$$

Оцінимо тепер третій доданок I_{3n3} у (28).

Як і при доведенні умови 2 наслідку 4 з [29], після заміни змінних

$$u_r = \frac{\lambda_n\alpha_n\tau_n}{2},\quad v_r = \frac{\mu_n\alpha_n\tau_n}{2},\quad r=\overline{1,m},$$

інтеграл оцінюється зверху скінченною сумою однотипних інтегралів по всіх координатних кутах. Як приклад, наведемо оцінку того із них, у якому інтегрування проводиться по першому координатному куту (I_{3n31}). Розіб'ємо перший координатний кут на $2m$-вимірні куби з довжиною ребра π і зобразимо I_{3n31} у вигляді суми однотипних інтегралів по елементах розбиття. Після того, як внесемо суму під знак інтегралу, отримаємо

$$I_{3n31} = (M+\varepsilon)^2\sigma_4\,c_n\,\alpha_n^{-m}\tau_n^m\left(\frac{\alpha_n\tau_n}{2}\right)^{2\beta-2m}\int\limits_{[0,\pi]^m}\int\limits_{[0,\pi]^m}\left(\prod_{r=1}^m\frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)}\right) \times$$

$$\times\ \varphi_{p,\beta}(\bar{u})\,\varphi_{p,\beta}(\bar{v})\,d\bar{u}\,d\bar{v}.$$

Скориставшись оцінкою функції $\varphi_{p,\beta}(\bar{v}) \le \prod_{r=1}^m|v_r|^{p-\beta/m}+K_0$, зобразимо I_{3n31} у вигляді суми чотирьох доданків. Наведемо оцінку того з них, який містить добуток $\prod_{r=1}^m|v_r|^{p-\beta/m}|u_r|^{p-\beta/m}$:

$$I_{3n311} = (M+\varepsilon)^2\sigma_4\,c_n\,\alpha_n^{-m}\tau_n^m\left(\frac{\alpha_n\tau_n}{2}\right)^{2\beta-2m} \times$$

$$\times \int\limits_{[0,\pi]^m}\int\limits_{[0,\pi]^m}\left(\prod_{r=1}^m\frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)}\right)\left(\prod_{r=1}^m|u_r|^{p-\beta/m}|v_r|^{p-\beta/m}\right)d\bar{v}\,d\bar{u}.$$

Використовуючи властивості ядра Фейєра, неважко довести, що

$$I_{3n311} \le K_{33}\,\alpha_n^{-m}, \tag{33}$$

де

$$K_{33} = (M+\varepsilon)^2\sigma_4\,2^{m-2\beta}\left(\frac{\pi^{2p-\frac{2\beta}{m}+1}}{2p-\frac{2\beta}{m}+1}\right)^m\left(\prod_{r=1}^m\int\limits_0^\pi\frac{\tau_n\sin^2\left(\tau_n^{-1}x_r\right)}{\sin^2 x_r}dx_r\right) < \infty.$$

Із співвідношення (32) і умови 2 теореми 5 випливає $\lim_{n\to\infty} I_{3n311} = 0$, а отже, і

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n3} = 0. \tag{34}$$

Таким чином, із співвідношень (28), (29), (32) і (34) випливає, що $\lim_{n\to\infty} I_{3n} = 0$, тобто третя умова наслідку 4 з [29] виконана. Отже, у випадку, коли $2\beta < 2mp + m$, теорему 5 доведено.

Нехай тепер $2\beta = 2mp + m$. Перевіримо виконання першої умови наслідку 4. Виберемо ε і $B(\varepsilon) = B$ такі ж, як і у випадку $2\beta < 2mp + m$, та скористаємось зображенням (14):

$$I_{1n} = I_{1n1} + I_{1n2}.$$

Використовуючи співвідношення (15) і вигляд нормуючої послідовності $(C_n,\ n \geq 1)$, легко довести, що

$$I_{1n1} \leq K_{11} |\ln(\tau_n \alpha_n)|^{-1}. \tag{35}$$

Оскільки за умовою теореми $\lim_{n\to\infty} (\alpha_n \tau_n) = 0$, то $\lim_{n\to\infty} |\ln(\tau_n\alpha_n)|^{-1} = 0$. Тому із співвідношення (35) випливає

$$\lim_{n\to\infty} I_{1n1} = 0. \tag{36}$$

Розглянемо другий доданок I_{1n2}. Використавши співвідношення (13), подамо цей доданок у вигляді суми

$$I_{1n2} = I_{1n21} + I_{1n22} + I_{1n23}, \tag{37}$$

де

$$I_{1n21} = M^2\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\|\bar\lambda\| > B} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2\sin\frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \|\bar\lambda\|^{-2\beta} d\bar\lambda,$$

$$I_{1n22} = 2Mg(\bar\lambda)\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\|\bar\lambda\| > B} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2\sin\frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \|\bar\lambda\|^{-2\beta} d\bar\lambda,$$

$$I_{1n23} = g^2(\bar\lambda)\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{-m} \int\limits_{\|\bar\lambda\| > B} \left(\prod_{r=1}^{m} \left(2\sin\frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2p} \right) \|\bar\lambda\|^{-2\beta} d\bar\lambda.$$

Оцінимо I_{1n22}. Неважко бачити, що після заміни змінної $u_r = \dfrac{\lambda_n \alpha_n \tau_n}{2}$, $r = \overline{1, m}$, переходу до полярних координат і очевидних простих оцінок отримаємо

$$I_{1n22} \leq 2\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{2mp-m} M\varepsilon \Bigg\{ \int\limits_{\frac{B\alpha_n\tau_n}{2} < \rho < 1} d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \times$$

$$\times \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_2 \ldots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\rho} d\varphi_{m-1} + \int\limits_{1\leq\rho} d\rho \int\limits_0^{2\pi} d\varphi_1 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi_2 \ldots \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \rho^{-2mp-1} d\varphi_{m-1} \Bigg\} \leq K_{122}\,\varepsilon,$$

де $K_{122} = 4M\pi^{m-1}\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) < \infty$. Отже,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} I_{1n22} \le K_{122}\,\varepsilon. \tag{38}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} I_{1n23} \le K_{123}\,\varepsilon^2, \tag{39}$$

де $K_{123} = 2\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)\pi^{m-1} < \infty$.

Оцінимо I_{1n21}. Для цього подамо його у вигляді суми

$$I_{1n21} = I_{1n211} + I_{1n212}, \tag{40}$$

де

$$I_{1n211} = 2^{-2mp} M^2\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{2mp-m} \times$$

$$\times \int\limits_{\frac{B\alpha_n\tau_n}{2} < \|\bar u\| < \frac{1}{k}} \left(\prod_{r=1}^{m} (2\sin u_r)^{2p}\right) \|\bar u\|^{-2mp-m} d\bar u,$$

$$I_{1n212} = 2^{-mp} M^2\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) c_n (\alpha_n \tau_n)^{2mp-m} \int\limits_{\|\bar u\| > \frac{1}{k}} \left(\prod_{r=1}^{m} (2\sin u_r)^{2p}\right) \|\bar u\|^{-2mp-m} d\bar u.$$

Скориставшись переходом до полярних координат, отримаємо наступну оцінку:

$$I_{1n212} \le M^2\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-1}\, \pi^{m-1}\, k^{2mp} \frac{1}{mp} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-1}. \tag{41}$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-1} = 0$, то із (41) випливає, що для довільного k існує границя

$$\lim_{n\to\infty} I_{1n212} = 0. \tag{42}$$

Щоб оцінити I_{1n211}, скористаємось співвідношенням

$$x\left(k \sin\frac{1}{k}\right) \le \sin x \le x, \quad x \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right].$$

Тоді неважко довести, що, з одного боку,

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} I_{1n211} \ge M^2\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)\left(k \sin\frac{1}{k}\right)^{2mp} \times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi_1 \sin\varphi_1)^{2p} d\varphi_1 \left(\prod_{r=2}^{m-1} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi_r)^{2rp+r-1} \sin^{2p}\varphi_r\, d\varphi_r\right), \tag{43}$$

а, з іншого боку,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} I_{1n211} \le M^2\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) \times$$

$$\times \int\limits_0^{2\pi} (\cos\varphi_1 \sin\varphi_1)^{2p} d\varphi_1 \left(\prod_{r=2}^{m-1} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi_r)^{2rp+r-1} \sin^{2p}\varphi_r\, d\varphi_r\right). \tag{44}$$

Після переходу у (43) до границі при $k \to \infty$ із співвідношень (43) і (44) отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} I_{1n211} = M^2\left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)\int_0^{2\pi}(\cos\varphi_1\sin\varphi_1)^{2p}d\varphi_1 \times$$

$$\times\prod_{r=2}^{m-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi_r)^{2rp+r-1}\sin^{2p}\varphi_r\,d\varphi_r < \infty. \tag{45}$$

Таким чином, із (14), (36) – (40), (42), (45) випливає

$$0 \le \overline{\lim_{n\to\infty}}\,|I_{1n} - I_{1n211}| \le (K_{11}+K_{12}\varepsilon)\,\varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ було вибране довільним, то

$$\lim_{n\to\infty} I_{1n} = M^2\left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)\int_0^{2\pi}(\cos\varphi_1\sin\varphi_1)^{2p}d\varphi_1 \times$$

$$\times\prod_{r=2}^{m-1}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi_r)^{2rp+r-1}\sin^{2p}\varphi_r\,d\varphi_r < \infty.$$

Отже, умова 1 наслідку 4 виконується.

Перевіримо виконання другої умови наслідку 4. Як і у попередньому випадку зобразимо I_{2n} у вигляді $I_{2n} = I_{2n1} + I_{2n2} + I_{2n3}$ (див. (19)). Перший доданок оцінимо аналогічно нерівності (21): $I_{2n1} \le K_{21}|\ln(\alpha_n\tau_n)|^{-2}$, де $K_{21} < \infty$ і $\lim\limits_{n\to\infty}|\ln(\alpha_n\tau_n)|^{-1} = 0$. Тому

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n1} = 0. \tag{46}$$

Згідно з нерівністю (22) $I_{2n2} \le K_{22}I_{1n1}I_{1n2}$. Тому

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n2} = 0. \tag{47}$$

Оцінимо третій доданок I_{2n3}. Оскільки у кожному з m-кратних інтегралів, які входять у I_{2n3}, інтегрування проводиться по зовнішності кулі з радіусом B, то інтеграл I_{2n3} можна оцінити зверху, розширивши множину інтегрування до зовнішності вписаного у кулю m-вимірного куба зі стороною $2B/\sqrt{m}$. Отримана оцінка лише посилиться, якщо зовнішність куба подати як об'єднання півпросторів, границями яких будуть площини граней куба. Таким чином, I_{2n3} можна оцінити зверху скінченною сумою однотипних доданків, у яких інтегрування проводиться по вказаних півпросторах. Для прикладу наведемо оцінку одного з них:

$$I_{2n31} = \left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)^2 c_n^2\,\alpha_n^{-2m}\int\limits_{\substack{\lambda_1 > B/\sqrt{m}\\ \lambda_i \ge 0\\ i=\overline{2,m}}}\;\int\limits_{\substack{\mu_2 > B/\sqrt{m}\\ \mu_k \ge 0\\ i=\overline{3,m},1}} H_2(\overline{\mu},\overline{\lambda})\,d\overline{\mu}\,d\overline{\lambda}. \tag{48}$$

Скориставшись умовою (13) та описаним раніше методом розбиття першого координатного кута на куби з ребром довжиною π, оцінимо I_{2n31} сумою:

$$I_{2n31} \le I_{2n311} + I_{2n312} + I_{2n313}, \tag{49}$$

де

$$I_{2n311} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 (\alpha_n \tau_n)^{2m} \alpha_n^{-2m} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-2} (M+\varepsilon)^4 \, 2^{-4mp} \times$$
$$\times \int\limits_{[0,\pi]^m} \int\limits_{[0,\pi]^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} (\sin u_r)^{2p} (\sin v_r)^{2p} \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{i=2}^{m} \sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{m} (v_r + k_r \pi)^2 \right)^{-\frac{2mp+m}{2}} \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{j=1,3}^{m} \sum_{q_i=0}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{m} (u_r + q_r \pi)^2 \right)^{-\frac{2mp+m}{2}} \right) d\bar{u}\, d\bar{v}, \tag{50}$$

$$I_{2n312} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 (\alpha_n \tau_n)^{2m} \alpha_n^{-2m} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-2} (M+\varepsilon)^4 \, 2^{-4mp} \times$$
$$\times \int\limits_{D_{\pi 1}} \int\limits_{[0,\pi]^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} (\sin u_r)^{2p} (\sin v_r)^{2p} \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{i=2}^{m} \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(\sum_{r=2}^{m} (v_r + k_r \pi)^2 + v_1^2 \right)^{-\frac{2mp+m}{2}} \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{j=1,3}^{m} \sum_{q_i=0}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{m} (u_r + q_r \pi)^2 \right)^{-\frac{2mp+m}{2}} \right) d\bar{u}\, d\bar{v}, \tag{51}$$

$$I_{2n313} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 (\alpha_n \tau_n)^{2m} \alpha_n^{-2m} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-2} (M+\varepsilon)^4 \, 2^{-4mp} \times$$
$$\times \int\limits_{D_{\pi 1}} \int\limits_{D_{\pi 2}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} (\sin u_r)^{2p} (\sin v_r)^{2p} \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{i=2}^{m} \sum_{k_i=0}^{\infty} \left(\sum_{r=2}^{m} (v_r + k_r \pi)^2 + v_1^2 \right)^{-\frac{2mp+m}{2}} \right) \times$$
$$\times \left(\sum_{j=1,3}^{m} \sum_{q_i=0}^{\infty} \left(\sum_{r\ne 2}^{m} (u_r + q_r \pi)^2 + u_2^2 \right)^{-\frac{2mp+m}{2}} \right) d\bar{u}\, d\bar{v}, \tag{52}$$

де

$$D_{\pi 1} = \left[\frac{\alpha_n \tau_n B}{2m^{1/2}}, \pi\right] \times [0,\pi]^{m-1}, \quad \text{а} \quad D_{\pi 2} = [0,\pi] \times \left[\frac{\alpha_n \tau_n B}{2m^{1/2}}, \pi\right] \times [0,\pi]^{m-2}.$$

Скориставшись нерівністю (20), легко довести, що

$$I_{2n311} \le |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-2} \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 (M+\varepsilon)^4 S_1^2 \, 2^{-4mp-2m} \pi^{4m}, \tag{53}$$

де через S_1 позначено оцінку суми ряду під знаком інтегралу.

Оскільки за умовою $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n\tau_n)=0$, то із (53) випливає

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n311}=0. \tag{54}$$

Позначивши через S_2 суму ряду

$$S_2=\sum_{i=2}^{m}\sum_{\substack{j=2\\ j\neq i}}^{m}\sum_{k_i=0}^{\infty}\sum_{k_j=1}^{\infty}\left(\sum_{r=1}^{m}(k_r\pi)^2\right)^{-\frac{2mp+m}{2}}<\infty, \tag{55}$$

отримаємо оцінку для I_{2n312}:

$$I_{2n312}\le I_{2n3121}+I_{2n3122}, \tag{56}$$

де

$$I_{2n3121}=\left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)^2(\alpha_n\tau_n)^{2m}\alpha_n^{-2m}\left|\ln(\alpha_n\tau_n)\right|^{-2}(M+\varepsilon)^4\,2^{-4mp}\times$$
$$\times\, S_2 S_1\int\limits_{[0,\pi]^m}\int\limits_{[0,\pi]^m}\prod_{r=1}^{m}\frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)}\,d\bar{u}\,d\bar{v}, \tag{57}$$

$$I_{2n3122}=\left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)^2(\alpha_n\tau_n)^{2m}\alpha_n^{-2m}\left|\ln(\alpha_n\tau_n)\right|^{-2}S_1\,2^{-4mp}\times$$
$$\times\int\limits_{D_{\pi 1}}\int\limits_{[0,\pi]^m}\left(\prod_{r=1}^{m}\frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)}(\sin u_r)^{2p}(\sin v_r)^{2p}\right)\|\bar{v}\|^{-2mp-m}\,d\bar{u}\,d\bar{v}. \tag{58}$$

Доданок I_{2n3121} легко оцінюється за допомогою співвідношення (20) і, таким чином, очевидно, що

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n3121}=0. \tag{59}$$

Щоб оцінити I_{2n3122} оцінимо $|\sin v_r|\le v_r$, $|\sin u_r|\le 1$, перейдемо до полярних координат, скоротимо на ρ_1^{2mp}, оцінимо „зайві" степені $\cos\varphi_i$ і $\sin\varphi_i$ одиничкою, і повертаючись до вихідних координат, отримаємо

$$I_{2n3122}\le\left(\sigma_2+\sigma_W^2\right)^2(\alpha_n\tau_n)^{2m}\alpha_n^{-2m}\left|\ln(\alpha_n\tau_n)\right|^{-2}(M+\varepsilon)^4 S_1\,2^{-4mp}\times$$
$$\times\int\limits_{D_{\pi 1}}\int\limits_{[0,\pi]^m}\left(\prod_{r=1}^{m}\frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)}\right)\|\bar{v}\|^{-m}\,d\bar{u}\,d\bar{v}.$$

Далі, скориставшись відокремленістю норми $\|\bar{v}\|$ на множині $D_{\pi 1}$ від нуля і властивостями ядра Фейєра, отримаємо

$$I_{2n3122}=\alpha_n^{-m}\left|\ln(\alpha_n\tau_n)\right|^{-2}(M+\varepsilon)^4\,2^{-4mp}\left(\frac{B}{2m^{1/2}}\right)^{-m}\times$$
$$\times\prod_{r=1}^{m}\int\limits_{[0,\pi]}\int\limits_{[0,\pi]}\frac{\tau_n\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)}\,du_r\,dv_r. \tag{60}$$

І оскільки за умовою теореми $\lim\limits_{n\to\infty}(\tau_n\alpha_n)=0$, то із (60) випливає

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n3122}=0. \tag{61}$$

Таким чином, із співвідношень (56), (59) і (61) випливає

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n312} = 0. \tag{62}$$

Оцінимо тепер третій доданок у співвідношенні (49). Легко бачити, що застосовуючи співвідношення (55) для оцінки обох функціональних рядів під знаком інтегралу, отримаємо оцінку, аналогічну (56):

$$I_{2n313} \le I_{2n3131} + I_{2n3132} + I_{2n3133} + I_{2n3134}, \tag{63}$$

де

$$I_{2n3131} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 (\alpha_n \tau_n)^{2m} \alpha_n^{-2m} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-2} (M+\varepsilon)^4\, 2^{-4mp} \times$$

$$\times \int_{D_{\pi 1}} \int_{D_{\pi 2}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} (\sin u_r)^{2p} (\sin v_r)^{2p} \right) S_2^2\, d\bar{u}\, d\bar{v},$$

$$I_{2n3132} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 (\alpha_n \tau_n)^{2m} \alpha_n^{-2m} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-2} (M+\varepsilon)^4\, 2^{-4mp} \times$$

$$\times \int_{D_{\pi 1}} \int_{D_{\pi 2}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} (\sin u_r)^{2p} (\sin v_r)^{2p} \right) \frac{S_2}{\|\bar{v}\|^{2mp+m}}\, d\bar{u}\, d\bar{v},$$

$$I_{2n3133} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 (\alpha_n \tau_n)^{2m} \alpha_n^{-2m} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-2} (M+\varepsilon)^4\, 2^{-4mp} \times$$

$$\times \int_{D_{\pi 1}} \int_{D_{\pi 2}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} (\sin u_r)^{2p} (\sin v_r)^{2p} \right) \frac{S_2}{\|\bar{u}\|^{2mp+m}}\, d\bar{u}\, d\bar{v},$$

$$I_{2n3134} = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 (\alpha_n \tau_n)^{2m} \alpha_n^{-2m} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-2} (M+\varepsilon)^4\, 2^{-4mp} \times$$

$$\times \int_{D_{\pi 1}} \int_{D_{\pi 2}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} (\sin u_r)^{2p} (\sin v_r)^{2p} \right) \frac{1}{\|\bar{u}\|^{2mp+m}} \frac{1}{\|\bar{v}\|^{2mp+m}}\, d\bar{u}\, d\bar{v}.$$

Відмітимо, що I_{2n3131} оцінюється аналогічно I_{2n3121}, а I_{2n3132} і I_{2n3133} — аналогічно I_{2n3122}. Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n3131} = \lim_{n\to\infty} I_{2n3132} = \lim_{n\to\infty} I_{2n3133} = 0. \tag{64}$$

Оцінимо I_{2n3134}. Для цього оцінимо $|\sin v_r| \le |v_r|$, $|\sin u_r| \le |u_r|$ і, використовуючи перехід до полярних координат, отримаємо наступну оцінку:

$$I_{2n3134} \le \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 (\alpha_n \tau_n)^{2m} \alpha_n^{-2m} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-2} (M+\varepsilon)^4 \times$$

$$\times \int_{D_{\pi 1}} \int_{D_{\pi 2}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} \right) \|\bar{u}\|^{-m} \|\bar{v}\|^{-m}\, d\bar{u}\, d\bar{v}.$$

Далі, скориставшись обмеженістю норм $\|\bar{u}\|$ і $\|\bar{v}\|$ на множині інтегрування знизу і властивостями ядра Фейєра, отримаємо

$$I_{2n3134} \le (\tau_n \alpha_n^2)^{-m} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-2} K_{2n3134}, \tag{65}$$

де

$$K_{2n3134} = (M+\varepsilon)^4 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right)^2 \left(\frac{B}{2m^{1/2}}\right)^{-2m} \times$$

$$\times \prod_{r=1}^{m} \int_{[0,\pi]} \int_{[0,\pi]} \frac{\tau_n \sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)}\, du_r\, dv_r < \infty.$$

Оскільки за умовою існує $\theta > 0$ таке, що $\tau_n \alpha_n^2 \geq \theta > 0$ для довільного n, то існує границя

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n3134} = 0. \tag{66}$$

Таким чином, із (64) і (66) випливає

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n313} = 0. \tag{67}$$

Отже, як випливає із (40), (54), (62) і (67)

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n31} = 0. \tag{68}$$

А це доводить, що

$$\lim_{n\to\infty} I_{2n3} = 0. \tag{69}$$

Із співвідношень (45) – (47) і (69) випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} I_{2n} = 0$. Тобто друга умова наслідку 4 виконується.

Перевіримо виконання третьої умови наслідку 4. Позначимо вираз із третьої умови через I_{3n}. Позначивши підінтегральну функцію у третій умові через $H_3(\bar\lambda, \bar\mu)$, подамо I_{3n} у вигляді

$$I_{3n} = I_{3n1} + I_{3n2} + I_{3n3}, \tag{70}$$

де

$$I_{3n1} = c_n \sigma_4 (\tau_n \alpha_n^{-1})^m \int_{\|\bar\lambda\|\leq B} \int_{\|\bar\mu\|\leq B} H_3(\bar\lambda, \bar\mu)\, d\bar\mu\, d\bar\lambda,$$

$$I_{3n2} = 2c_n \sigma_4 (\tau_n \alpha_n^{-1})^m \int_{\|\bar\lambda\|> B} \int_{\|\bar\mu\|\leq B} H_3(\bar\lambda, \bar\mu)\, d\bar\mu\, d\bar\lambda,$$

$$I_{3n3} = 2c_n \sigma_4 (\tau_n \alpha_n^{-1})^m \int_{\|\bar\lambda\|> B} \int_{\|\bar\mu\|> B} H_3(\bar\lambda, \bar\mu)\, d\bar\mu\, d\bar\lambda.$$

Оцінимо перший доданок I_{3n1}. Скориставшись співвідношенням (20), нерівністю $|\sin x| \leq |x|$, нерівністю Гельдера та інтегровністю у середньому квадратичному $\left|\hat f(\bar\lambda)\right|$, отримаємо

$$I_{3n1} \leq K_{31} \left|\ln(\alpha_n \tau_n)\right|^{-1}, \tag{71}$$

де

$$K_{31} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{2m} \left(\frac{B}{2}\right)^{2mp} \sigma_4 \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left[\frac{m}{2}\right]} \frac{B^m}{m} \int_{\|\bar\mu\|\leq B} \left|\hat f(\bar\mu)\right|^2 d\bar\mu < \infty.$$

Оскільки за умовою теореми $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n \alpha_n = 0$, то із (71) випливає

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n1} = 0. \tag{72}$$

Оцінимо I_{3n2}. Після заміни змінних $v_r = \frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2}$, $u_r = \frac{\mu_r \alpha_n \tau_n}{2}$, $r = \overline{1,m}$, інтеграл по змінній $\bar{v}$ оцінюється зверху скінченною сумою однотипних інтегралів по півпросторах, межами яких є площини граней куба, вписаного в кулю: $\|\bar{v}\| \le \frac{B\alpha_n \tau_n}{2}$. Як приклад наведемо оцінку одного з них:

$$I_{3n21} = 2(M+\varepsilon)\sigma_4 c_n (\tau_n \alpha_n^{-1})^m (\alpha_n \tau_n)^{mp} \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{mp-\frac{3m}{2}} \left(\frac{B}{2}\right)^{mp} \times$$

$$\times \int\limits_{\|\bar{u}\| \le \frac{B\alpha_n\tau_n}{2}} \int\limits_{\substack{v_1 > \frac{B\alpha_n\tau_n}{2m^{1/2}} \\ v_i \ge 0,\ i=\overline{2,m}}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \frac{\tau_n (v_r + u_r)}{2}}{\sin^2 (v_r + u_r)} (\sin v_r)^p \right) \times$$

$$\times \left| \hat{f}\left(\frac{2\bar{u}}{\alpha_n \tau_n} \right) \right| \|\bar{v}\|^{-\frac{2mp+m}{2}} d\bar{v}\, d\bar{u}.$$

Аналогічно, як і при перевірці другої умови, розіб'ємо множину $\{ v_1 > \pi,$ $v_i > 0,\ i = \overline{2,m} \}$ на m-вимірні куби з довжиною ребра π. Після того, як внесемо суму під знак інтегралу, оцінимо I_{3n21} сумою

$$I_{3n21} = (S_3 + S_4)\, I_{3n211} + I_{3n212}, \tag{73}$$

де

$$S_3 = \sum_{i=2}^{m} \sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \left(\sum_{r=1}^{m} (k_r \pi)^2 \right)^{-\frac{2mp+m}{4}}, \tag{74}$$

$$S_4 = \sum_{j=2}^{m} \sum_{\substack{i=2 \\ j\ne i}}^{m} \sum_{k_i=0}^{\infty} \sum_{k_j=1}^{\infty} \left(\sum_{r=2}^{m} (v_r + k_r \pi)^2 \right)^{-\frac{2mp+m}{4}}, \tag{75}$$

$$I_{3n211} = 2(M+\varepsilon)\sigma_4 c_n (\tau_n \alpha_n^{-1})^m (\alpha_n \tau_n)^{mp} \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{mp-\frac{3m}{2}} \left(\frac{B}{2}\right)^{mp} \times$$

$$\times \int\limits_{\|\bar{u}\| \le \frac{B\alpha_n\tau_n}{2}} \int\limits_{[0,\pi]^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \left(\tau_n^{-1} (u_r + v_r) \right)}{\sin^2 (u_r + v_r)} \right) \left| \hat{f}\left(\frac{2\bar{u}}{\alpha_n \tau_n} \right) \right| d\bar{v}\, d\bar{u},$$

$$I_{3n212} = 2(M+\varepsilon)\sigma_4 c_n (\tau_n \alpha_n^{-1})^m (\alpha_n \tau_n)^{mp} \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{mp-\frac{3m}{2}} \left(\frac{B}{2}\right)^{mp} \times$$

$$\times \int\limits_{\|\bar{u}\| \le \frac{B\alpha_n\tau_n}{2}} \int\limits_{D_{\pi 1}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2 \left(\tau_n^{-1} (u_r + v_r) \right)}{\sin^2 (u_r + v_r)} (\sin v_r)^{2p} \right) \|\bar{v}\|^{\frac{-2mp-m}{2}} \left| \hat{f}\left(\frac{2\bar{u}}{\alpha_n \tau_n} \right) \right| d\bar{v}\, d\bar{u}.$$

Оцінимо I_{3n211}. Припустимо, що n досить велике, для того, щоб виконувалась нерівність $B\alpha_n\tau_n < 2\pi$. Тоді, використовуючи властивості ядра Фейєра, неважко довести, що I_{3n212} оцінюється скінченною сумою однотипних інтегралів:

$$I_{3n211} = \sum_{\alpha} I_{\alpha},$$

де $I_{\alpha} \le K_{\alpha} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-1} \alpha_n^{-m}$ і

$$K_{\alpha} = 2^{-2mp+m+1} \pi^{m/2} (M+\varepsilon)\, \sigma_4 (S_3 + S_4) \times$$
$$\times \left(\prod_{r=1}^{m} \int_0^{\pi} \frac{\tau_n \sin^2(\tau_n^{-1} x_r)}{\sin^2 x_r} dx_r \right) \left(\int_{\mathbf{R}^m} |\hat{f}(\bar{z})|^2 d\bar{z} \right)^{\frac{1}{2}} < \infty .$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n211} = 0. \tag{76}$$

Оцінимо I_{3n212}. Скориставшись описаним раніше методом переходу до полярних координат, отримаємо

$$I_{3n212} \le 2(M+\varepsilon)\, \sigma_4\, c_n (\tau_n \alpha_n^{-1})^m\, (\alpha_n \tau_n)^{mp} \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2} \right)^{mp - \frac{3m}{2}} \left(\frac{B}{2} \right)^{mp} \times$$
$$\times \int\limits_{\|\bar{u}\| \le \frac{B\alpha_n\tau_n}{2}} \int\limits_{\left[\frac{B\alpha_n\tau_n}{2m^{1/2}}\right] \times [0,\pi]^{m-1}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r + v_r)\right)}{\sin^2(u_r + v_r)} \right) \times$$
$$\times \left| \hat{f}\left(\frac{2\bar{u}}{\alpha_n \tau_n} \right) \right| \|\bar{v}\|^{-\frac{m}{2}} d\bar{v}\, d\bar{u}. \tag{77}$$

Вираз у правій частині співвідношення (77) оцінюється аналогічно I_{3n211}, якщо попередньо скористатись відокремленістю норми $\|\bar{v}\|$ від нуля на $D_{\pi 1}$. Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n212} = 0. \tag{78}$$

Отже, як випливає із (73), (76), (78), маємо $\lim\limits_{n\to\infty} I_{3n21} = 0$, а тому і

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n2} = 0. \tag{79}$$

Оцінимо третій доданок I_{3n3} у співвідношенні (70). Скориставшись співвідношенням (13) для перетворення Фур'є функції відгуку і заміною змінних $u_r = \frac{\lambda_r \alpha_n \tau_n}{2}$, $v_r = \frac{\mu_r \alpha_n \tau_n}{2}$, $r = \overline{1,m}$, знову оцінимо отримані два m-кратні інтеграли по зовнішності сфер $\|\bar{v}\| \le \frac{B\alpha_n\tau_n}{2}$ і $\|\bar{u}\| \le \frac{B\alpha_n\tau_n}{2}$, скінченною сумою однотипних інтегралів по півпросторах, межами яких є площини бічних граней, вписаних у сфери кубів. Як приклад, наведемо оцінку одного з них:

$$I_{3n31} = (M+\varepsilon)^2 c_n (\tau_n \alpha_n^{-1})^m \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2} \right)^{2mp-m} \times$$

$$\times \int\limits_{\substack{u_1 > \frac{B\alpha_n\tau_n}{2m^{1/2}} \\ u_r \geq 0,\ r=\overline{1,m}}} \int\limits_{\substack{v_1 > \frac{B\alpha_n\tau_n}{2m^{1/2}} \\ v_r \geq 0,\ r=\overline{1,m}}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)} |\sin v_r|^p |\sin u_r|^p \right) \times$$

$$\times \|\bar{u}\|^{-mp-\frac{m}{2}} \|\bar{v}\|^{-mp-\frac{m}{2}} d\bar{v}\, d\bar{u}.$$

Якщо зобразити перший координатний кут у вигляді об'єднання кубів з довжиною ребра π, то можна оцінити I_{3n31} сумою:

$$I_{3n31} \leq I_{3n311} + I_{3n312} + I_{3n313}, \tag{80}$$

де

$$I_{3n311} = (M+\varepsilon)^2 \sigma_4 c_n (\tau_n \alpha_n^{-1})^m \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{2mp-m} \left(S_3^2 + 2S_4S_3 + S_4^2\right) \times$$

$$\times \int\limits_{[0,\pi]^m} \int\limits_{[0,\pi]^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)} \right) d\bar{u}\, d\bar{v},$$

$$I_{3n312} = (M+\varepsilon)^2 \sigma_4 c_n (\tau_n \alpha_n^{-1})^m \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{2mp-m} 2(S_3+S_4) \times$$

$$\times \int\limits_{D_{\pi 1}} \int\limits_{[0,\pi]^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)} |\sin u_r|^p |\sin v_r|^p \right) \|\bar{u}\|^{-mp-\frac{m}{2}} d\bar{v}\, d\bar{u},$$

$$I_{3n313} = (M+\varepsilon)^2 \sigma_4 c_n (\tau_n \alpha_n^{-1})^m \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{2mp-m} \times$$

$$\times \int\limits_{D_{\pi 1}} \int\limits_{D_{\pi 1}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)} |\sin u_r|^p |\sin v_r|^p \right) \times$$

$$\times \|\bar{u}\|^{-mp-\frac{m}{2}} \|\bar{v}\|^{-mp-\frac{m}{2}} d\bar{v}\, d\bar{u}.$$

Скориставшись властивостями ядра Фейєра, легко довести, що

$$I_{3n311} \leq K_{3311} |\ln(\tau_n \alpha_n)|^{-1} \alpha_n^{-m},$$

де

$$K_{3311} = (M+\varepsilon)^2 \sigma_4 2^{m-2mp} (S_3+S_4)^2 \pi^2 \left\{ \prod_{r=1}^{m} \left(\int\limits_0^{\pi} \frac{\tau_n \sin^2\left(\tau_n^{-1} x_r\right)}{\sin^2 x_r} dx_r + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_0^{2\pi} \frac{\tau_n \sin^2\left(\tau_n^{-1} x_r\right)}{\sin^2 x_r} dx_r \right) \right\} < \infty.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n311} = 0. \tag{81}$$

Оцінимо другий доданок I_{3n312}. Скориставшись переходом до полярних координат, отримаємо

$$I_{3n312} \le (M+\varepsilon)^2 \sigma_4 c_n (\tau_n \alpha_n^{-1})^m \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{2mp-m} 2(S_3+S_4) \times$$

$$\times \int\limits_{D_{\pi 1}} \int\limits_{[0,\pi]^m} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)} \right) \|\bar{u}\|^{-\frac{m}{2}} d\bar{v}\, d\bar{u}.$$

Далі, скориставшись відокремленістю норми $\|\bar{u}\|$ від нуля на множині $D_{\pi 1}$ і властивостями ядра Фейєра, отримаємо

$$I_{3n312} \le K_{3312} \left(\alpha_n^2 \tau_n\right)^{-\frac{m}{2}} \alpha_n^{-\frac{m}{2}} |\ln(\tau_n \alpha_n)|^{-1}, \tag{82}$$

де

$$K_{3312} = (M+\varepsilon)^2 \sigma_4 |\ln(\tau_n \alpha_n)|^{-1} 2^{m-2mp} \left(\frac{B}{2m^{1/2}}\right)^{-\frac{m}{2}} \times$$

$$\times \pi^m \prod_{r=1}^{m} \int_0^{\pi} \frac{\tau_n \sin^2\left(\tau_n^{-1} x_r\right)}{\sin^2 x_r} dx_r < \infty.$$

Оскільки за умовою теореми $\lim\limits_{n\to\infty} (\tau_n \alpha_n) = 0$ і існує таке $\theta > 0$, що для довільного $n \ge 1$ $\alpha_n \tau_n \ge \theta$, то із (82) випливає

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n312} = 0. \tag{83}$$

Оцінимо третій доданок I_{3n313}. Використовуючи оцінки $|\sin v_r| \le |v_r|$, $|\sin u_r| \le |u_r|$ і перехід до полярних координат, отримаємо

$$I_{3n313} \le (M+\varepsilon)^2 \sigma_4 c_n (\tau_n \alpha_n^{-1})^m \left(\frac{\alpha_n \tau_n}{2}\right)^{2mp-m} \times$$

$$\times \int\limits_{D_{\pi 1}} \int\limits_{D_{\pi 1}} \left(\prod_{r=1}^{m} \frac{\sin^2\left(\tau_n^{-1}(u_r+v_r)\right)}{\sin^2(u_r+v_r)} \right) \|\bar{u}\|^{-\frac{m}{2}} \|\bar{v}\|^{-\frac{m}{2}} d\bar{v}\, d\bar{u}.$$

Скориставшись відокремленістю норм $\|\bar{u}\|$ і $\|\bar{v}\|$ від нуля на множині $D_{\pi 1}$ і властивостями ядра Фейєра, отримаємо

$$I_{3n313} \le K_{3313} \tau_n^{-m} \alpha_n^{-2m} |\ln(\tau_n \alpha_n)|^{-1}, \tag{84}$$

де

$$K_{3313} = (M+\varepsilon)^2 \sigma_4 2^{m-2mp} \left(\frac{B}{2m^{1/2}}\right)^{-m} \pi^m \left(\prod_{r=1}^{m} \int_0^{\pi} \frac{\tau_n \sin^2\left(\tau_n^{-1} x_r\right)}{\sin^2 x_r} dx_r \right) < \infty.$$

Оскільки за умовою теореми $\lim\limits_{n\to\infty} (\tau_n \alpha_n) = 0$ і існує таке $\theta > 0$, що для довільного $n \ge 1$ $\alpha_n^2 \tau_n \ge \theta$, то із (84) випливає

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n313} = 0. \tag{85}$$

Таким чином, із співвідношень (80), (81), (83) і (85) випливає

$$\lim_{n\to\infty} I_{3n3} = 0, \tag{86}$$

тобто третя умова наслідку 4 виконується. Теорему доведено.

***Зауваження* 5.** Порівнюючи при $m = 1$ теорему 5 з відповідним результатом Є. Г. Гладишева [18], слід звернути увагу, що теорему Є. Г. Гладишева задовольняють гауссові процеси, для яких $\beta > 1/2$, а теорему 5 — узагальнені дробові процеси з $\beta > 1$. Умова $\beta > 1$ виникає при перевірці умови 3, яка відображає специфіку узагальнених дробових процесів. Оскільки спектральна щільність узагальненого дробового процесу дорівнює $\left|\hat f(\lambda)\right|^2$, $\lambda \in \mathbf{R}$, то при $\beta > 1$ для достатньо малих $\varepsilon > 0$ виконується умова $\int_{\mathbf{R}} |\lambda|^{1+\varepsilon} \left|\hat f(\lambda)\right|^2 d\lambda < \infty$. А це, згідно з теоремою Колмогорова про неперервність майже напевне реалізацій стаціонарних випадкових процесів [30], приводить до того, що сепарабельні модифікації процесів, які розглядаються у теоремі 5, матимуть неперервні майже напевне реалізації. При $\beta \le 1$ без додаткових умов на спектральну міру П цього може і не бути. Для гауссових процесів маємо іншу ситуацію, і тут для неперервності майже напевне реалізацій процесу досить умови $\beta > 1/2$.

Аналогічно теоремі 5 доводиться наступна теорема.

Теорема 6. *Нехай* $\kappa(\bar t)$, $\bar t \in \mathbf{R}^m$, *— однорідне дробове поле з функцією відгуку* $f(\bar t)$, *перетворення Фур'є якої задовольняє умову*

$$1)\ \left|\hat f(\bar\lambda)\right| = M \prod_{r=1}^{m} |\lambda_r|^{-\beta_r/2} + o\left(\prod_{r=1}^{m} |\lambda_r|^{-\beta_r/2}\right) \text{ при } \sup_{1\le r\le m} |\lambda_r| \to \infty;\ M > 0.$$

$$\text{Нехай } p_r = p_r(\beta_r) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } 2 < \beta_r \le 3, \\ k, & \text{якщо } 2k-1 < \beta_r \le 2k+1,\ k \ge 2, \end{cases} \quad r = \overline{1,m},\ k \in \mathbf{N},$$

$$\bar p = (p_1, \ldots, p_m), \quad c_n = \prod_{r=1}^{m} c_{nr}, \quad c_{nr} = \delta_n(\beta_r)\,(\alpha_n \tau_n)^{2-\beta_r},$$

де

$$\delta_n(\beta_r) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \beta_r \ne 2k+1; \\ |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-1}, & \text{якщо } \beta_r = 2k+1. \end{cases}$$

Тоді, якщо виконуються умови: 2) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, 3) $\lim_{n\to\infty} \alpha_n \tau_n = 0$, 4) *існує таке* $\theta > 0$, *що для довільного* $n \ge 1$ $(\tau_n)^{\frac{m-1}{2}} (\alpha_n)^{\frac{3m-1}{2}} > \theta > 0$, *то*

$$\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\, c_n \alpha_n^{-m} \sum_{\bar k = \bar 1}^{\bar N} \left(\Delta^{\bar p}_{\alpha_n \tau_n} \kappa((\bar k - \bar 1)\tau_n \alpha_n)\right)^2 = c,$$

де

$$c = \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) M^2 \prod_{r=1}^{m} 2^{2p_r + 1 - \beta_r} \int_{\mathbf{R}} \left((\sin u_r)^{2p_r} |u_r|^{-\beta_r}\right) du_r \ne 0.$$

***Приклад* 2.** Розглянемо узагальнене дробове поле $\kappa(\bar t)$, $\bar t \in \mathbf{R}^m$, $m \ge 1$, з функцією відгуку наступного вигляду: $f(\bar t) = \exp\{-b\|\bar t\|\}$, $\bar t \in \mathbf{R}^m$, перетворення Фур'є якої має вигляд

$$\hat f(\bar\lambda) = 2^{\frac{2-m}{2}} \pi^{\frac{1-2m}{2}} \Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right) b \left(\|\bar\lambda\|^2 + b^2\right)^{-\frac{1+m}{2}}.$$

Отже, $\left|\hat f(\bar\lambda)\right| = M\|\bar\lambda\|^{-m-1} + o\left(\|\bar\lambda\|^{-m-1}\right)$ при $\|\bar\lambda\| \to \infty$. Тобто $\beta = m + 1$. Тоді, якщо $m = 1$, то $\beta = 2$ і тому в умовах теореми 5 потрібно вибрати $p = 2$ і

$c_n = (\alpha_n \tau_n)^{-2}$, причому α_n і τ_n вибираються так, щоб виконувались умови $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\tau_n \alpha_n) = 0$. Тоді

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ S_n^{(2)}(\kappa) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ c_n \alpha_n^{-1} \sum_{k=1}^{N} \left(\Delta^p_{\tau_n \alpha_n} \kappa((k-1)\tau_n \alpha_n)\right)^2 = \frac{8b^2}{3}\left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right).$$

Якщо ж $m = 2$, то $\beta = 3$, і тому в умовах теореми 5 потрібно вибрати $p = 1$, $c_n = (\alpha_n \tau_n)^{-2} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-1}$, причому α_n і τ_n вибираються так, щоб виконувались умови $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\tau_n \alpha_n) = 0$ і щоб існувало таке $\theta > 0$, що для довільного $n \geq 1$ $\alpha_n^2 \tau_n \geq \theta$. Тоді

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ S_n^{(2)}(\kappa) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ \alpha_n^{-4} \tau_n^{-2} |\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-1} \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \left(\Delta^{\bar{p}}_{\tau_n \alpha_n} \kappa((\bar{k}-\bar{1})\tau_n \alpha_n)\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{b}{2\pi}\right)^2 \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) 2^{-4} \int\limits_{\mathbf{R}^2} \left(\prod_{r=1}^{2} (2\sin u_r)^2\right) \|\bar{u}\|^{-6} d\bar{u} \neq 0.$$

Зауважимо, що порівняно з випадком $m = 1$, порядок різницевого оператора зменшився на одиницю, а у нормуючій послідовності з'явився додатковий множник $|\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-1}$.

Якщо ж $m \geq 3$, то $\beta = m + 1$, і тому в умовах теореми 5 потрібно вибрати $p = 1$ і $c_n = (\alpha_n \tau_n)^{-2}$, причому α_n і τ_n вибираються так, щоб виконувались умови $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} (\tau_n \alpha_n) = 0$. Тоді

$$\underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ S_n^{(2)}(\kappa) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\ c_n \alpha_n^{-m} \sum_{\bar{k}=\bar{1}}^{\bar{N}} \left(\Delta^{\bar{p}}_{\alpha_n \tau_n} \kappa((\bar{k}-\bar{1})\alpha_n \tau_n)\right)^2 =$$

$$= b^2 \pi^{1-2m} \left(\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right)^2 2^{-2m} \left(\sigma_2 + \sigma_W^2\right) \int\limits_{\mathbf{R}^m} \left(\prod_{r=1}^{m} (2\sin u_r)^2\right) \|\bar{u}\|^{-2m-2} d\bar{u} \neq 0.$$

Таким чином, порівняно з випадком $m = 1$, порядок різницевого оператора зменшився на одиницю, а порівняно з випадком $m = 2$, у нормуючій послідовності зник множник $|\ln(\alpha_n \tau_n)|^{-1}$.

29. *Булдигін В. В., Мельник В. М., Шпортюк В. Г.* Про Леві – Бакстерову властивість дробових полів. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1463 – 1476.

30. *Крамер Г., Лидбеттер М. Р.* Стационарные случайные процессы. – М.: Мир, 1969. – 398 с.

Одержано 26.03.97