УДК 517.9

В. Е. Слюсарчук (Ривнэн. техн. ун-т)

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОСЦИЛЛЯЦИИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

We obtain necessary and sufficient conditions of oscillation of solutions of second order nonlinear differential equations with pulse influence in the Banach space.

Одержано необхідні й достатні умови осциляції розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку з імпульсною дією в банаховому просторі.

Пусть E — действительное банахово пространство, E_1 — подпространство пространства E, для которого $\operatorname{codim} E_1 = 1$, φ — линейный непрерывный функционал на E с ядром $\operatorname{Ker}\varphi = E_1$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$, T — произвольное счетное множество вещественных чисел t_n, $n \in \mathbb{N}$, для которых $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = +\infty$.

Рассмотрим импульсную систему, описываемую системой уравнений

$$\begin{aligned} &\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f(t, x(t)) = 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \setminus T, \\ &\frac{dx(t+0)}{dt} - \frac{dx(t-0)}{dt} + g(t, x(t-0)) = 0, \qquad t \in T, \\ &x(t+0) = x(t-0) = x(t), \qquad t \in T, \end{aligned} \tag{1}$$

где $f\colon (\mathbb{R}_+ \setminus T) \times E \to E$ и $g\colon T \times E \to E$ — произвольные непрерывные отображения.

Решение $x(t)$ системы (1) будем называть осциллирующим относительно подпространства E_1, если для каждого числа $a > 0$ найдутся числа $\tau_1, \tau_2 \in (a, +\infty)$, для которых

$$\varphi(x(\tau_1))\varphi(x(\tau_2)) < 0.$$

В данной работе при дополнительных ограничениях на отображения f и g укажем необходимые и достаточные условия осцилляции относительно E_1 решений системы (1), продолжив тем самым исследования о колеблемости решений системы (1), начатые автором в [1 – 3]. Заметим, что вопросам колеблемости траекторий импульсных систем к настоящему времени не уделялось должного внимания, хотя теория импульсных систем [4 – 8] и теория колеблемости траекторий гладких динамических систем [9 – 20] получили глубокое развитие.

1. Основные требования к системе (1). Будем считать, что для произвольных числа $t_0 \in \mathbb{R}_+ \setminus T$ и множества $\{x_1, x_2\} \subset E$ система (1) имеет единственное определенное на $\mathbb{R}_+$ решение $x(t)$, удовлетворяющее условиям $x(t_0) = x_1$ и $x'(t_0) = x_2$. Это решение обозначим через $x(t, t_0, x_1, x_2)$.

Рассмотрим множества

$$E_2 = \{x \in E\colon \varphi(x) > 0\}, \quad E_3 = \{x \in E\colon \varphi(x) < 0\}.$$

Кроме условия непрерывности функций $f(t, x)$ и $g(t, x)$ соответственно на $(\mathbb{R}_+ \backslash T) \times E$ и $T \times E$, будем требовать, чтобы эти функции представлялись в виде

$$f(t, x) = \sum_{k=1}^{n} p_k(t) f_k(x),$$

$$g(t, x) = \sum_{l=1}^{m} q_l(t) g_l(x),$$

где $n, m \in \mathbb{N}$, $p_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, — непрерывные на $\mathbb{R}_+ \backslash T$ ограниченные функции со значениями в $\mathbb{R}_+$, $q_l\colon T \to \mathbb{R}_+$, $l = \overline{1, m}$, — произвольные отображения и $f_k\colon E \to E$, $k = \overline{1, n}$, $g_l\colon E \to E$, $l = \overline{1, m}$, — непрерывные отображения, для которых $f_k E_i \subset E_i$, $y_l E_i \subset E_i$ для всех $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, m}$ и $i = \overline{1, 3}$.

2. Условия осцилляции решений системы (1). Обозначим через Φ_k множество непрерывных на $\mathbb{R}_+$ и дифференцируемых на $\mathbb{R}_+ \backslash T$ функций $z = z_k(t)$ со значениями в E_k, $k = \overline{2, 3}$, для каждой из которых $|\varphi(z_k(t))|$ — монотонная неубывающая на $\mathbb{R}_+$ функция, а через $\Delta y(t_n)$ — разность первого порядка от $y(t_n)$, т. е. $y(t_{n+1}) - y(t_n)$. Здесь $t_n \in T = \{t_1, t_2, \ldots\}$.

Отображение $h\colon E \to E$ назовем локально липшицевым, если для произвольных $b \in E$ и $r \in (0, +\infty)$ найдется постоянная $M > 0$, для которой

$$\| h(x) - h(y) \| \le M \| x - y \|$$

для всех $x, y \in B(b, r) = \{x \in E\colon \|x - b\| \le r\}$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть:*

1) *выполняются требования пункта* 1;

2) $\inf\limits_{s \ge t \ge 0} \dfrac{\varphi(f_k(z(s)))}{\varphi(f_k(z(t)))} > 0$, $k = \overline{1, n}$, *и* $\inf\limits_{s \ge t \ge 0} \dfrac{\varphi(g_l(z(s)))}{\varphi(g_l(z(t)))} > 0$, $l = \overline{1, m}$, *для всех* $z \in \Phi_2 \cup \Phi_3$;

3) *несобственные интегралы*

$$\int_0^\infty \frac{d\varphi(z(t))}{\varphi(f_k(z(t)))}, \qquad k = \overline{1, n},$$

и числовые ряды

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta\varphi(z(t_{n-1}))}{\varphi(g_l(z(t_n)))}, \qquad l = \overline{1, m},$$

сходятся для всех $z \in \Phi_2 \cup \Phi_3$.

Тогда для осцилляции всех решений $x(t, 0, x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in (E \times E) \backslash (E_1 \times E_1)$, *системы уравнений* (1) *относительно подпространства* E_1 *достаточно, а в случае локально липшицевых или компактных отображений* $f_k\colon E \to E$, $k = \overline{1, n}$, $g_l\colon E \to E$, $l = \overline{1, m}$, *и необходимо выполнение соотношения*

$$\int_0^{+\infty} t \sum_{k=1}^{n} p_k(t)dt + \sum_{t \in T} t \sum_{l=1}^{m} q_l(t) = +\infty. \tag{2}$$

Доказательство. *Достаточность.* Пусть выполняется соотношение (2). Предположим, что система уравнений (1) имеет неосциллирующее относительно E_1 решение $z(t)$, для которого $(z(0), z'(0)) \in E_1 \times E_1$. Не ограничивая общности доказательства, полагаем

$$\varphi(z(a)) > 0 \quad \text{и} \quad \varphi(z(t)) \geq 0 \;\; \forall\, t \geq a \tag{3}$$

для некоторого числа $a \in (0, +\infty) \setminus T$. Поскольку на основании (1)

$$\frac{dz(s)}{ds} - \frac{dz(t)}{dt} + \int_t^s f(u, z(u))du + \sum_{u \in (t,s) \cap T} g(u, z(u)) = 0$$

для произвольных $t \geq a$ и $s > t$, $t, s \notin T$, и, следовательно,

$$\varphi\left(\frac{dz(s)}{ds}\right) - \varphi\left(\frac{dz(t)}{dt}\right) + \int_t^s \sum_{k=1}^{n} p_k(u)\varphi(f_k(z(u)))du +$$

$$+ \sum_{u \in (t,s) \cap T} \sum_{l=1}^{m} q_l(u)\varphi(g_l(z(u))) = 0, \qquad s > t \geq a, \tag{4}$$

то согласно (3) и условию 1 теоремы получим

$$\int_t^s \sum_{k=1}^{n} p_k(u)\varphi(f_k(z(u)))du +$$

$$+ \sum_{u \in (t,s) \cap T} \sum_{l=1}^{m} q_l(u)\varphi(g_l(z(u))) \geq 0$$

для всех t и s, для которых $s > t \geq a$. Поэтому функция $\varphi\left(\frac{dz(t+0)}{dt}\right)$ является невозрастающей функцией на $[a, +\infty)$. Следовательно, функция $\varphi(z(t))$ является вогнутой на $[a, +\infty)$ [21, с. 17] и существует предел

$$\lim_{t \to +\infty} \varphi\left(\frac{dz(t+0)}{dt}\right) = c \geq 0$$

(c не может быть отрицательным на основании (3) и вогнутости функции $\varphi(z(t))$ на $[a, +\infty)$). Отсюда и из (4) следует, что $\varphi(z(t))$ — монотонная неубывающая на $[a, +\infty)$ функция и

$$\varphi\left(\frac{dz(t+0)}{dt}\right) = c + \int_t^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k(u)\varphi(f_k(z(u)))du +$$

$$+ \sum_{u \in (t,+\infty) \cap T} \sum_{l=1}^{m} q_l(u)\varphi(g_l(z(u))) \qquad \forall\, t \geq a. \tag{5}$$

Обозначим через δ наименьшее из чисел

$$\inf_{s \geq t \geq a} \frac{\varphi(f_k(z(s)))}{\varphi(f_k(z(t)))}, \qquad k = \overline{1, n},$$

и

$$\inf_{s \geq t \geq a} \frac{\varphi(g_l(z(s)))}{\varphi(g_l(z(t)))}, \qquad l = \overline{1, m},$$

которое на основании второго условия теоремы положительное. Учитывая включение $z(t) \in \Phi_2$, сходимость несобственных интегралов

$$\int_a^{+\infty} \frac{d\varphi(z(t))}{\varphi(f_k(z(t)))}, \qquad k = \overline{1, n},$$

и числовых рядов

$$\sum_{n=k}^{\infty} \frac{\Delta\varphi(z(t_{n-1}))}{\varphi(g_l(z(t_n)))}, \qquad l = \overline{1, m},$$

в силу условия 3 теоремы 1 (здесь k — наименьшее из чисел множества $\mathbb{N}$, для которых $t_{k-1} > a$) и то, что

$$\Delta\varphi(z(t_{n-1})) = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \varphi\left(\frac{dz(t)}{dt}\right) dt =$$

$$= c\Delta t_{n-1} + \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\int_t^{+\infty} \sum_{k=1}^{n} p_k(u) \varphi(f_k(z(u))) du \right) dt +$$

$$+ \left(\sum_{i=n}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} q_l(t_i) \varphi(g_l(z(t_i))) \right) \Delta t_{n-1} \geq$$

$$\geq \left(\sum_{i=n}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} q_l(t_i) \varphi(g_l(z(t_i))) \right) \Delta t_{n-1},$$

на основании (5), придем к выводу, что для каждого $k = \overline{1, n}$ и $l = \overline{1, m}$

$$+\infty > \int_a^{+\infty} \frac{d\varphi(z(t))}{\varphi(f_k(z(t)))} = \int_a^{+\infty} \frac{\varphi\left(\dfrac{dz(t+0)}{dt}\right)}{\varphi(f_k(z(t)))} dt =$$

$$= \int_a^{+\infty} \frac{1}{\varphi(f_k(z(t)))} \left(c + \int_t^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} p_i(u) \varphi(f_i(z(u))) du \right) dt +$$

$$+ \int_a^{+\infty} \frac{1}{\varphi(f_k(z(t)))} \left(\sum_{u \in (t, +\infty) \cap T} \sum_{l=1}^{m} q_l(u) \varphi(g_l(z(u))) \right) dt \geq$$

$$\geq \int_a^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} p_k(u)\frac{\varphi(f_k(z(u)))}{\varphi(f_k(z(t)))}du\right)dt \geq$$

$$\geq \delta\int_a^{+\infty}\left(\int_t^{+\infty} p_k(u)du\right)dt = \delta\int_a^{+\infty}(t-a)p_k(t)dt \geq 0,$$

$$+\infty > \sum_{n=k}^{\infty}\frac{\Delta\varphi(z(t_{n-1}))}{\varphi(g_l(z(t_n)))} \geq$$

$$\geq \sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{\varphi(g_l(z(t_n)))}\sum_{i=n}^{\infty}\sum_{l=1}^{m} q_l(t_i)\varphi(g_l(z(t_i)))\Delta t_{n-1} \geq$$

$$\geq \sum_{n=k}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}\frac{\varphi(g_l(z(t_i)))}{\varphi(g_l(z(t_n)))}q_l(t_i)\right)\Delta t_{n-1} \geq$$

$$\geq \delta\sum_{n=k}^{\infty}\left(\sum_{i=n}^{\infty}q_l(t_i)\right)\Delta t_{n-1} = \delta\sum_{n=k}^{\infty}(t_n - t_{k-1})q_l(t_n) \geq 0.$$

Следовательно, несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty}(t-a)p_k(t)dt, \qquad k=\overline{1,n},$$

и числовые ряды

$$\sum_{n=k}^{\infty}(t_n - t_{k-1})q_l(t_n), \qquad l=\overline{1,m},$$

сходятся. Поэтому сходятся несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} t\, p_k(t)dt, \qquad k=\overline{1,n},$$

и числовые ряды

$$\sum_{n=k}^{\infty} t_n q_l(t_n), \qquad l=\overline{1,m},$$

что противоречит соотношению (2).

Таким образом, предположение о существовании неосциллирующего относительно подпространства E_1 решения $z(t)$ системы уравнений (1), для которого $(z(0), z'(0)) \notin E_1 \times E_1$, ложно.

Достаточность соотношения (2) для осцилляции соответствующих решений системы уравнений (1) доказана.

Необходимость. Пусть все решения $x(t, 0, x_1, x_2)$, $(x_1, x_2) \in (E \times E)\setminus(E_1 \times E_1)$, системы уравнений (1) являются осциллирующими относительно E_1.

Рассмотрим случай локально липшицевых отображений f_k, $k=\overline{1,n}$, и g_l, $l=\overline{1,m}$. Предположим, что соотношение (2) не выполняется, т. е.

$$0 \le \int_0^{+\infty} t \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\,dt + \sum_{t \in T} t \sum_{l=1}^{m} q_l(t) < +\infty. \tag{6}$$

Возьмем произвольный вектор $y \in E_2 \cup E_3$, замкнутый шар $B(y, r)$, $r > 0$, для которого $E_1 \cap B(y, r) = \varnothing$, и рассмотрим уравнение

$$z(t) = y - \int_t^{+\infty} (s-t) \sum_{k=1}^{n} p_k(s) f_k(z(s))\,ds -$$

$$- \sum_{s \in (t, +\infty) \cap T} (s-t) \sum_{l=1}^{m} q_l(s) g_l(z(s)), \quad t \ge a, \tag{7}$$

где a — такое положительное число, что $a \notin T$,

$$\int_a^{+\infty} (s-a) \sum_{k=1}^{n} p_k(s) \sup_{x \in B(y,r)} \|f_k(x)\|\,ds +$$

$$+ \sum_{s \in (a, +\infty) \cap T} (s-a) \sum_{l=1}^{m} q_l(s) \sup_{x \in B(y,r)} \|g_l(x)\| \le r \tag{8}$$

и

$$\Bigg\| \int_t^{+\infty} (s-t) \sum_{k=1}^{n} p_k(s) f_k(z_1(s))\,ds + \sum_{s \in (t,+\infty) \cap T} (s-t) \sum_{l=1}^{m} q_l(s) g_l(z_1(s)) -$$

$$- \int_t^{+\infty} (s-t) \sum_{k=1}^{n} p_k(s) f_k(z_2(s))\,ds - \sum_{s \in (t,+\infty) \cap T} (s-t) \sum_{l=1}^{m} q_l(s) g_l(z_2(s)) \Bigg\| \le$$

$$\le \frac{1}{2} \sup_{t \ge a} \|z_1(t) - z_2(t)\| \tag{9}$$

для всех непрерывных и ограниченных на $[a, +\infty)$ E-значных функций $z_i(t)$, $i = \overline{1,2}$, для которых $\sup\limits_{t \ge a} \|z_i(t) - y\| \le r$, $i = \overline{1,2}$.

Соотношения (8) и (9) возможны на основании (6) и локальной липшицевости отображений f_k, $k = \overline{1,n}$, и g_l, $l = \overline{1,m}$.

Далее рассмотрим банахово пространство X непрерывных и ограниченных на $[a, +\infty)$ E-значных функций $x = x(t)$ с нормой

$$\|x\|_X = \sup_{t \ge a} \|x(t)\|,$$

ограниченное замкнутое и выпуклое множество D всех функций $x = x(t) \in X$, для которых $x(t) \in B(y, r)$ $\forall t \ge a$, и оператор $\mathfrak{A} : X \to X$, определенный равенством

$$(\mathfrak{A}x)(t) = y - \int_t^{+\infty} (s-t) f(s, x(s))\,ds - \sum_{s \in (t,+\infty) \cap T} (s-t) g(s, x(s)), \quad t \ge a. \tag{10}$$

Из определения оператора $\mathfrak{A}$ и соотношений (8) и (9) вытекает, что $\mathfrak{A} D \subset D$ и

$$\|\mathfrak{A}x - \mathfrak{A}z\|_X \le \frac{1}{2} \|x - z\|_X \quad \forall x, z \in D.$$

Поэтому на основании принципа сжатых отображений [22, с. 72] найдется функция $z = z(t) \in D$, которая будет решением уравнения (7). Легко убедиться в том, что эта функция также будет решением системы уравнений (1) для $t \geq \geq a$. Это решение не будет осциллирующим относительно E_1, как элемент множества D. В силу требований пункта 1 найдется решение $y(t)$ системы уравнений (1), совпадающее с $z(t)$ на $[a, +\infty)$. Для этого решения будет выполняться включение $(y(0), y'(0)) \in (E \times E)\backslash(E_1 \times E_1)$ согласно единственности решения $x(t)$ системы (1), для которого $x(0) = y(0)$ и $x'(0) = y'(0)$ (если $(x(0), x'(0)) \in E_1 \times E_1$, то система (1) имеет решение $x(t)$, для которого $(x(t), x'(t)) \in E_1 \times E_1$ $\forall\, t \geq 0$, что следует из включений $f_k E_1 \subset E_1$, $g_l E_1 \subset \subset E_1$, $k = \overline{1, n}$.

Итак, в случае невыполнения соотношения (2) система (1) имеет неосциллирующее относительно E_1 решение $x = x(t)$, для которого $(x(0), x'(0)) \in \in (E \times E)\backslash(E_1 \times E_1)$, что противоречит условию — все решения $x(t, 0, x_1, x_2)$ системы уравнений (1), для которых $(x_1, x_2) \in (E \times E)\backslash(E_1 \times E_1)$, являются осциллирующими относительно подпространства E_1.

Таким образом, необходимость соотношения (2) для осцилляции соответствующих решений системы уравнений (1) в случае локально липшицевых отображений f_k, $k = \overline{1, n}$, и g_l, $l = \overline{1, m}$, доказана.

Рассмотрим случай компактных отображений f_k, $k = \overline{1, n}$, и g_l, $l = \overline{1, m}$. Пусть соотношение (2) не выполняется, т. е. выполняется соотношение (6). Возьмем произвольный вектор $y \in E_2 \bigcup E_3$ и число $r > 0$, чтобы $E_1 \bigcap B(y, r) = \varnothing$, и рассмотрим уравнение (7), где a — такое число из $\mathbb{R}_+ \backslash T$, что имеет место соотношение (8). Выбор такого числа a возможен на основании соотношения (6) и компактности отображений f_k, $k = \overline{1, n}$, и g_l, $l = \overline{1, m}$.

Далее, как и в случае локально липшицевых отображений f_k, $k = \overline{1, n}$, и g_l, $l = \overline{1, m}$, рассмотрим банахово пространство X, ограниченное замкнутое выпуклое множество D всех функций $x = x(t) \in X$, для которых $x(t) \in B(y, r)$ $\forall\, t \geq a$, и оператор $\mathfrak{A} : X \to X$, определенный равенством (10). Из (8) и (10) вытекает, что $\mathfrak{A} D \subset D$.

Рассмотрим функцию

$$\delta(t) = L\left(\int\limits_t^{+\infty} (s-t) \sum_{k=1}^{n} p_k(s)\, ds + \sum_{s \in (t, +\infty) \bigcap T} (s-t) \sum_{l=1}^{m} q_l(s) \right),$$

где

$$L = \max_{k = \overline{1, n};\, l = \overline{1, m}} \left\{ \sup_{x \in B(y, r)} \| f_k(x) \|, \sup_{x \in B(y, r)} \| g_l(x) \| \right\}.$$

Для каждого $y \in D$

$$\sup_{t \in [a, +\infty) \backslash T} \left\| \frac{d(\mathfrak{A} y)(t)}{dt} \right\| \leq$$

$$\leq \int\limits_a^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(s) \| f_k(y(s)) \| ds +$$

$$+ \sum_{s\in(a,+\infty)\cap T} \sum_{l=1}^{m} q_l(s)\|g_l(y(s))\| \leq$$

$$\leq L\left(\int_a^{+\infty} \sum_{k=1}^{\infty} p_k(s)ds + \sum_{s\in(a,+\infty)\cap T} \sum_{l=1}^{\infty} q_l(s)\right) < \infty.$$

Поэтому множество всех функций $z = z(t) \in \mathfrak{A}D$ равностепенно непрерывно на $[a, +\infty)$. Поскольку для каждой функции $z = z(t) \in \mathfrak{A}D$ имеет место оценка

$$\|z(t) - y\| \leq \delta(t) \qquad \forall t \geq a$$

и

$$\lim_{t\to+\infty} \delta(t) = 0,$$

то на основании условия 2 теоремы 1 и обобщенной теоремы Арцела [22, с. 110] множество $\mathfrak{A}D$ относительно компактно.

Итак, отображение $\mathfrak{A} : D \to D$ компактно. Согласно теореме Шаудера о неподвижной точке [23, с. 37] отображение $\mathfrak{A}$ имеет в D неподвижную точку. Следовательно, уравнение (7) имеет решение $z = z(t) \in D$, которое будет решением и системы (1) при $t \geq a$.

Рассуждая далее так, как и в случае локально липшицевых отображений f_k, $k = \overline{1,n}$, и g_l, $l = \overline{1,m}$, также приходим к противоречию.

Таким образом, необходимость соотношения (2) для осцилляции соответствующих решений системы уравнений (1) в случае компактных отображений f_k, $k = \overline{1,n}$, и g_l, $l = \overline{1,m}$, также обоснована.

Теорема 1 доказана.

3. Комментарии ко второму и третьему условиям теоремы 1. Из ограничений на E_1 вытекает, что банахово пространство E можно представить в виде $E = E_1 + Y$, где Y — действительное одномерное подпространство пространства E. Пусть P_1 — проектор на E_1 параллельно Y и P_2 — проектор на Y параллельно E_1.

Укажем условия, обеспечивающие выполнение условий 2 и 3 теоремы 1.

Предположим, что $P_2 f_k(x) = P_2 f_k(P_2 x)$ и $P_2 g_l(x) = P_2 g_l(P_2 x)$ для всех $x \in E$; $k = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,m}$. Возьмем произвольный ненулевой элемент $b \in Y$ и рассмотрим функции

$$\alpha_k(s) = \|P_2 f_k(sb)\|, \quad \beta_k(s) = \|P_2 f_k(-sb)\|, \quad k = \overline{1,n},$$

$$\gamma_l(s) = \|P_2 g_l(sb)\|, \quad \delta_l(s) = \|P_2 g_l(-sb)\|, \quad l = \overline{1,m},$$

где $s \in \mathbb{R}_+$.

Условие 2 теоремы 1 выполняется, если, например, рассмотренные функции $\alpha_k(s)$, $\beta_k(s)$, $\gamma_l(s)$ и $\delta_l(s)$, $k = \overline{1,n}$, $l = \overline{1,m}$, являются возрастающими на $\mathbb{R}_+$.

При этих же предположениях выполняется и условие 3 теоремы 1, если дополнительно сходятся несобственные интегралы

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\alpha_k(x)},\quad \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\beta_k(x)},\quad k=\overline{1,n},\qquad \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\gamma_l(x)},\quad \int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{\delta_l(x)},\quad l=\overline{1,m}.$$

Заметим, что сходимость несобственного интеграла $\int_{x_0}^{+\infty}\frac{dx}{\nu(x)}$, где $\nu(x)$ — непрерывная возрастающая на $[x_0,+\infty)$ функция со значениями в $(0,+\infty)$, обеспечивает сходимость числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\Delta x_{n-1}}{\nu(x_n)}$$

для каждой неубывающей последовательности $x_0, x_1, x_2, \ldots$, так как

$$\int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}\frac{dx}{\nu(x)} \geq \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n}\frac{dx}{\nu(x_n)} = \frac{\Delta x_{n-1}}{\nu(x_n)} \geq 0 \qquad \forall\, n\geq 1$$

(это замечание улучшает признак Абеля и Дини [24, с. 290]).

4. Приложение теоремы 1 к дифференциальным уравнениям. Если $q_l(t)\equiv 0$, $l=\overline{1,m}$, то в системе уравнений (1) $g(t,x)\equiv 0$. Поэтому в случае непрерывной на $\mathbb{R}_+\times E$ функции $f(t,x)$, как частный случай теоремы 1, можно получить утверждение об осцилляции относительно E_1 решений дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + f(t,x(t)) = 0, \qquad t\geq 0. \tag{11}$$

Теорема 2. *Пусть:*

1) $f(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(t)f_k(x)$, *где* $n\in\mathbb{N}$, $p_k(t)$, $k=\overline{1,n}$, — *непрерывные на* $\mathbb{R}_+$ *ограниченные функции со значениями в* $\mathbb{R}_+$, $f_k\colon E\to E$, $k=\overline{1,n}$, — *компактные или локально липшицевые отображения, для которых* $f_k\, E_i\subset E_i$ *для всех* $k=\overline{1,n}$ *и* $i=\overline{1,3}$;

2) *для произвольных чисел* $t_0\geq 0$ *и множества* $\{x_1,x_2\}\subset E$ *уравнение* (11) *имеет единственное определенное на* $\mathbb{R}_+$ *решение* $x(t,t_0,x_1,x_2)$, *для которого* $x(t_0,t_0,x_1,x_2)=x_1$, $x'(t_0,t_0,x_1,x_2)=x_2$;

3) $\inf\limits_{s\geq t\geq 0}\frac{\varphi(f_k(z(s)))}{\varphi(f_k(z(t)))} > 0$, $k=\overline{1,n}$, *для всех* $z\in\Phi_2\cup\Phi_3$;

4) *несобственные интегралы*

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{d\varphi(z(t))}{\varphi(f_k(z(t)))},\qquad k=\overline{1,n},$$

сходятся для всех $z\in\Phi_2\cup\Phi_3$.

Для того чтобы для произвольных $(x_1,x_2)\in(E\times E)\setminus(E_1\times E_1)$ *решение* $x(t,0,x_1,x_2)$ *уравнения* (11) *было осциллирующим относительно подпространства* E_1, *необходимо и достаточно выполнение соотношения*

$$\int_0^{+\infty} t \sum_{k=1}^{n} p_k(t)\,dt = +\infty.$$

Замечание 1. В условиях 3 и 4 теоремы 2 множества Φ_k, $k = \overline{2,3}$, можно заменить множествами Ψ_k, $k = \overline{2,3}$, где Ψ_k — множество C^1-отображений z_k: $\mathbb{R}_+ \to E_k$, $k = \overline{2,3}$, для каждого из которых $|\varphi(z_k(t))|$ — монотонная неубывающая на $\mathbb{R}_+$ функция. Частный случай теоремы 2, когда $n = 1$ и отображение f локально липшицево, приведен автором в [25].

Замечание 2. Пусть $E = \mathbb{R}$ и $f(t,x) = p(t)x^{2m+1}$, где $p(t)$ — непрерывная неотрицательная на $\mathbb{R}_+$ функция и $m \in \mathbb{N}$. Теорема 2 обобщает и усиливает теорему Аткинсона [10]: все решения уравнения (11), кроме нулевого, осциллируют тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{+\infty} tp(t)\,dt = +\infty.$$

5. Приложение теоремы 1 к разностным уравнениям. Пусть в системе уравнений (1) $T = \mathbb{N}$ и $p_k(t) \equiv 0$, $k = \overline{1,n}$. Тогда $f(t,x) \equiv 0$ и система (1) принимает вид

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = 0, \qquad t \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N},$$

$$\frac{dx(n+0)}{dt} - \frac{dx(n-0)}{dt} + g(n, x(n-0)) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{12}$$

$$x(n+0) = x(n-0) = x(n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, что каждое решение этой системы уравнений кусочно-линейно,

$$\frac{dx(n+0)}{dt} = x(n+1) - x(n) = \Delta x(n)$$

и

$$\frac{dx(n-0)}{dt} = x(n) - x(n-1) = \Delta x(n-1), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\Delta^2 x(n-1) + g(n, x(n)) = 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{13}$$

где

$$\Delta^2 x(n-1) = \Delta x(n) - \Delta x(n-1) = x(n+1) - 2x(n) + x(n-1).$$

Система уравнений (1) тесно связана не только с дифференциальными уравнениями, как видно из пункта 4, но и с разностными уравнениями. Учитывая связь между системой уравнений (12) и разностным уравнением (13) и теорему 1, получаем условия осцилляции относительно E_1 решений уравнения (13).

Обозначим через V_k множество отображений z_k: $\mathbb{N} \to E_k$, $k = \overline{2,3}$, для каждого из которых $\Delta|\varphi(z_k(n))| \geq 0$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$, и через $x(n, x_1, x_2)$ — решение уравнения (13), удовлетворяющее условиям

$$x(1, x_1, x_2) = x_1, \quad x(2, x_1, x_2) = x_2.$$

Теорема 3. *Пусть:*

1) $g(n, x) = \sum_{l=1}^{m} q_l(n) g_l(n)$, *где* $m \in \mathbb{N}$, $q_l : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$, $l = \overline{1, m}$, *— произвольные отображения с относительно компактными множествами значений,* $g_l : E \to E$, $l = \overline{1, m}$, *— компактные или локально липшицевые отображения, для которых* $g_l E_i \subset E_i$ *для всех* $l = \overline{1, m}$ *и* $i = \overline{1, 3}$;

2) $\inf\limits_{p \geq n \geq 1} \dfrac{\varphi(g_l(z(p)))}{\varphi(g_l(z(n)))} > 0$, $l = \overline{1, m}$, *для всех* $z \in V_2 \cup V_3$;

3) *числовые ряды*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\Delta\varphi(z(n-1))}{\varphi(g_l(z(n)))}, \qquad l = \overline{1, m},$$

сходятся для всех $z \in V_2 \cup V_3$.

Для того чтобы для произвольных $(x_1, x_2) \in (E \times E) \setminus (E_1 \times E_1)$ *решение* $x(n, x_1, x_2)$ *уравнения* (13) *было осциллирующим относительно подпространства* E_1, *необходимо и достаточно выполнения соотношения*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{m} n q_l(n) = +\infty.$$

Замечание **3.** Аналог теоремы 3 для разностных уравнений в банаховом пространстве приведен в [26].

Замечание **4.** В теореме 3 отсутствует аналог условия 2 теоремы 2. Этот аналог, очевидно, имеет место, что вытекает из простоты системы уравнений (12) ($f(t, x) \equiv 0$).

1. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків диференціальних рівнянь з імпульсною дією в банаховому просторі // Конструктивні методи дослідження диференціальних рівнянь: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1993. – С. 174 – 178.
2. *Слюсарчук В. Ю.* Достатні умови осциляції траєкторій імпульсних систем з нефіксованими моментами імпульсної дії // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 192 – 197.
3. *Слюсарчук В. Ю.* Необхідні і достатні умови осциляції розв'язків нелінійних імпульсних систем з мультиплікативно розділеною правою частиною // Укр. мат. журн. – 1995. – 47, № 3. – С. 381 – 389.
4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 311 с.
5. *Цыпкин Я. З., Попков Ю. С.* Теория нелинейных импульсных систем. – М.: Наука, 1973. – 415 с.
6. *Завалишин С. Т., Сесекин А. Н., Дрозденко С. Е.* Динамические системы с импульсной структурой. – Свердловск: Сред.-Урал. изд-во, 1983. – 112 с.
7. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
8. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием. – Киев: Вища шк., 1987. – 288 с.
9. *Sturm C.* Sur les équations différentielles linéares du second ordre // J. Math. Pura Appl. – 1836. – 1. – P. 106 – 186.
10. *Atkinson F. V.* On second order non-linear oscillations // Pacific J. Math. – 1955. – 5, № 1. – P. 643 – 647.
11. *Bihari I.* Oscillation and monotonicity theorems concerning non-linear differential equations of the second order // Acta Math. Acad. Sciens. Hungar. – 1958. – 9, № 1, 2. – P. 83 – 104.

12. *Belohorec Š.* Oscilatorické riešnia istej nelineárnej diferencialnej rownice druhého radu // Mat.-fys. časop. – 1961. – **11**. – S. 250 – 255.
13. *Кондратьев В. А.* О колеблемости решений уравнения $y^{(n)} + p(x)y = 0$ // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1961. – **10**. – С. 419 – 436.
14. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Тбилис. ун-т, 1975. – 352 с.
15. *Шевело В. Н.* Осцилляция решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – Киев: Наук. думка, 1978. – 155 с.
16. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
17. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
18. *Слюсарчук В. Е.* Усиление теоремы Кнезера о нулях решений уравнения $y'' + p(x)y = 0$ // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 520 – 524.
19. *Domshlak Y., Stavroulakis I. P.* Oscillation of first-order delay differential equations in a critical case // Appl. Anal. – 1996. – **61**. – P. 359 – 371.
20. *Diblik J.* Positive and oscillations solutions of differential equations with delay in critical case // J. Comp. and Appl. Math. – 1998. – **88**. – P. 185 – 202.
21. *Ушаков Р. П., Хацет В. І.* Опуклі функції та нерівності. – Київ: Вища шк., 1986. – 112 с.
22. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.
23. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. – М.: Мир, 1977. – 232 с.
24. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.
25. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків диференціальних рівнянь в банаховому просторі // Матеріали міжн. мат. конф., присвяченої пам'яті Ганса Гана. – Чернівці, 1995. – С. 269 – 275.
26. *Слюсарчук В. Ю.* Осциляція розв'язків різницевого рівняння $\Delta^2 x(n) + \sum_{k=1}^{m} p_k(n) g_k(x(n)) = 0$ в банаховому просторі // Системи еволюційних рівнянь з післядією: Зб. наук. праць. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1995. – С. 98 – 102.

Получено 21.03.96,
после доработки — 20.07.98