УДК 512. 6

О. І. Грабовський (З-д ЗБВіК, Кам'янець-Подільський)

СТУПІНЬ ОБУМОВЛЕНОСТІ МАТРИЦІ ПЕРЕХОДУ ДО НОРМАЛЬНОЇ ФОРМИ ЖОРДАНА

Necessary and sufficient conditions of well conditioned reduction of a matrix to the Jordan normal form are established.

Встановлено необхідні й достатні умови добре обумовленого зведення матриці до нормальної форми Жордана.

Означення. *Зведення до нормальної форми Жордана матриці* J *назвемо добре обумовленим, якщо існує дійсна функція* f_J, *що не спадає, така, що кожну подібну до* J *матрицю* A *можна зобразити у вигляді* SJS^{-1}, *де* $\|S\|\,\|S^{-1}\| < f_J(\|A\|)$, $\|\cdot\|$ — *евклідова норма* $\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(AA^*)}$.

Нехай A — будь-яка комплексна матриця розміру $n \times n$. Тоді має місце наступне твердження.

Теорема. *Зведення добре обумовлене тоді і тільки тоді, коли матриця* J *є діагональною.*

Доведення. Достатність. Нехай $\|A\| = a$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — власні числа матриці A із кратностями відповідно $\kappa_1, \ldots, \kappa_m$. Користуючись унітарною інваріантністю евклідової норми [1, с. 353] та лемою Шура про те, що будь-яка квадратна матриця унітарно подібна до трикутної, знайдемо такі унітарні матриці U, V, $UV = E$, що $A = UBV$, де B — трикутна матриця із лексикографічно впорядкованими власними числами, причому $\|B\| = a$. Встановимо розбиття $n \times n$ матриць на $m \times m$ блоків таким чином, що за $1 \le j \le m$ блок B_{jj} відповідає власному числу λ_j. Викреслимо з матриці $D = B - \lambda_j E$, $\operatorname{Rg} D = n - \kappa_j$, її j-ті рядок та стовпець блоків, отримавши матрицю D^j. Маємо $\det D^j \neq 0$, звідки $\operatorname{Rg} D^j = n - \kappa_j$, значить, всі рядки матриці D, що входять у її j-й рядок блоків D_j, лінійно виражаються через інші її рядки; у цю лінійну комбінацію рядки, що знаходяться вище блокового рядка D_j, якщо такі є, входять із нульовими коефіцієнтами, оскільки $D_{j1} = O, \ldots, D_{j,j-1} = O$. Крім цього, $D_{j+1,j} = O, \ldots, D_{mj} = O$, якщо ці блоки є, отже, $D_{jj} = O$ та $B_{jj} = \lambda_j E$, де $j = 1, \ldots, m$, E — одинична матриця κ_j-го розміру. Розглянемо послідовність матриць

$$G^1, G^2, \ldots, G^m; \qquad G^p = \left\{G^p_{jk}\right\}, \tag{1}$$

що визначаються так: $G^1 = B$; далі, для $1 < p \le m$; $G^p_{jj} = B_{jj}$ за $j = 1, \ldots, m$; $G^p_{jk} = B_{jk}$ за $j, k \ge p$; решта блоків — нульові; $G^m = J$. Для кожного p, $1 \le p < m$, побудуємо послідовність матриць $H^p, H^{p+1}, \ldots, H^m$, де $H^p = G^p$; $H^q = \left\{H^q_{jk}\right\} = Q^q H^{q-1} P^q$, де $Q^q P^q = E$; $p < q \le m$; тут P^q, Q^q — матриці $m \times m$ блоків, кожна з яких відрізняється від одиничної лише блоком з індексами p, q: $P^q_{pq} = C_{pq}$, $Q^q_{pq} = -C_{pq}$, де

$$C_{pq} = (\lambda_q - \lambda_p)^{-1} H_{pq}^{q-1}. \tag{2}$$

При таким чином визначених матрицях Q^q, P^q p-й рядок матриці H^q задовольняє рекурентне співвідношення

$$H_p^q = H_p^{q-1} - C_{pq} H_q^{q-1}; \tag{3}$$

у цьому рядку для всіх $k \le q$, $k \ne p$ маємо $H_{pk}^q = O$; $H_{pp}^q = \lambda_p E$; для всіх $j \ne p$ здійснюється рівність

$$H_j^q = H_j^{q-1} = \ldots = H_j^p = G_j^p = G_j^{p+1}.$$

У нас $H^m = G^{p+1}$, отже, для послідовності (1) можна побудувати наступне рекурентне співвідношення:

$$G^{p+1} = L^p G^p K^p, \quad L^p = Q^m Q^{m-1} \ldots Q^{p+1},$$
$$K^p = P^{p+1} P^{p+2} \ldots P^m.$$

Тут $1 \le p < m$, $L^p K^p = E$. Звідси

$$J = G^m = L^m L^{m-1} \ldots L^2 G^1 K^2 K^3 \ldots K^m,$$

що рівносильно $B = G^1 = KJL$, де $K = K^2 \ldots K^m$; $L = L^m \ldots L^2$; $KL = E$. Перемножуючи, отримуємо, що матриці $K = \{K_{jk}\}$ та $L = \{L_{jk}\}$ визначаються так:

$$K_{jk} = \sum_{j = p_0 < p_1 < \ldots p_s = k} \left(C_{p_0 p_1} C_{p_1 p_2} \ldots C_{p_{s-1} p_s} \right), \quad s \le k - j, \quad L_{jk} = -C_{jk},$$

де $k > j$; $K_{jj} = L_{jj} = E$, $j = 1, \ldots, m$; $K_{jk} = L_{jk} = O$ для всіх $k < j$.

Із співвідношень (2) і (3) виводимо оцінки:

$$\|H_p^q\| \le \|H_p^{q-1}\| + \|C_{pq}\| \|H_p^{q-1}\| \le \|H_p^{q-1}\| \left(1 + a\Delta_{pq}^{-1}\right),$$

де $\Delta_{\alpha\beta} = |\lambda_\beta - \lambda_\alpha|$, $1 \le p < q < m$.

Оскільки

$$\|H_p^p\| \le a, \quad \|H_p^q\| \le a\left(1 + a\Delta_{p,p+1}^{-1}\right) \ldots \left(1 + a\Delta_{pq}^{-1}\right),$$

то

$$\|C_{pq}\| \le \Delta_{pq}^{-1} \|H_{pq}^{q-1}\| \le a\Delta_{pq}^{-1}\left(1 + a\Delta_{p,p+1}^{-1}\right) \ldots \left(1 + a\Delta_{p,q-1}^{-1}\right)$$

для $q \ge p + 2$, та $\|C_{pq}\| \le a\Delta_{pq}^{-1}$ для $q = p + 1$. Але $A = UBV = UKJLV$, отож у твердженні $A = SJS^{-1}$ можемо покласти $S = UK$, $S^{-1} = LV$. Оскільки U, V — унітарні матриці, то $\|S\| = \|K\|$ та $\|S^{-1}\| = \|L\|$, де

$$\|K_{jk}\| \le M_{jk} = \sum_{j = p_0 < p_1 < \ldots < p_s = k} N_{p_0 p_1} N_{p_1 p_2} \ldots N_{p_{s-1} p_s}, \quad s \le k - j;$$

$$\|L_{jk}\| \le N_{jk} = a\Delta_{jk}^{-1}\left(1 + a\Delta_{j,j+1}^{-1}\right) \ldots \left(1 + a\Delta_{j,k-1}^{-1}\right), \quad j < k;$$

$$\|K_{jj}\| = \|L_{jj}\| = \sqrt{\kappa_j}, \quad j = 1, \dots, m;$$

$$\|K_{jk}\| = \|L_{jk}\| = 0, \quad j > k.$$

Отже, покладемо

$$f_J(a) = \sqrt{\left(n + \sum_{j,k=1,\dots,m;\, j<k} M_{jk}^2\right)\left(n + \sum_{j,k=1,\dots,m;\, j<k} N_{jk}^2\right)}.$$

Необхідність. Припустимо, що для деякої матриці J, яка не має діагонального вигляду (містить хоча б одну клітину Жордана J_n розміру $n > 1$) існує не спадна функція f_J. Тут достатньо розглянути випадок, коли J складається тільки з однієї такої клітини $J = J_n$ із власним числом $\lambda = 0$. Нехай $A(\varepsilon) \sim J$ — матриця, елементи якої $a_{12} = \varepsilon$, $0 < |\varepsilon| \leq 1$; решта елементів залишається така, як у матриці J. Розв'язуючи рівняння $A = SJS^{-1}$ відносно S, отримуємо $S = \operatorname{diag}(\varepsilon\delta, \delta, \dots, \delta)$, $\delta \neq 0$. Тоді $S^{-1} = \operatorname{diag}(\varepsilon^{-1}\delta^{-1}, \delta^{-1}, \dots, \delta^{-1})$ і для числа обумовленості q матриці $A(\varepsilon)$ отримаємо

$$q(A(\varepsilon)) = \|S\|\,\|S^{-1}\| = \sqrt{|\varepsilon|^2 + n - 1}\,\sqrt{|\varepsilon|^{-2} + n - 1},$$

де $n > 1$; $q(A(\varepsilon)) \to \infty$ при $|\varepsilon| \to 0$, що суперечить умові

$$q(A(\varepsilon)) < f_J(\|A(\varepsilon)\|) \leq f_J(\|A(1)\|) = \text{const}.$$

1. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М.: Мир, 1989. – 655 с.

Одержано 06.09.94,
після доопрацювання — 23.10.97