УДК 517. 5

А. А. Лигун, А. А. Шумейко (Днепродзержин. техн. ун-т)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КРИВЫХ*

We investigate a problem of the asymptotically optimal placement of disks with the same radii under the condition of minimization of the Hausdorff distance between a given curve Γ and the union of disks under consideration.

Досліджується задача про асимптотично оптимальне розташування кіл однакового радіуса при мінімізації хаусдорфової відстані між даною кривою Γ та об'єднанням цих кіл.

В данной статье рассматривается задача одностороннего восстановления плоских кривых с помощью кусочно-окружностных функций в метрике Хаусдорфа. Вопросы кусочно-окружностной аппроксимации в той или иной мере рассматривались во многих работах (см., например, [1, 2]).

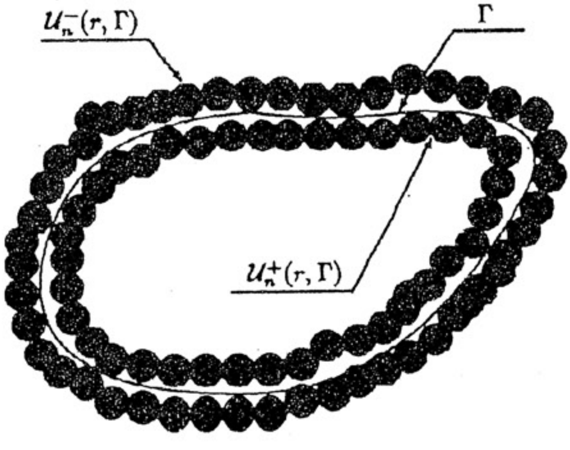
Такого рода задачи возникают в инженерной геометрии при оптимизации траектории движения режущего инструмента в процессе формообразования сложных поверхностей.

Перейдем к формальной постановке задачи. Определим, как обычно, хаусдорфово расстояние между двумя множествами $\mathcal{G}$ и Q равенством [3]

$$\rho(Q, \mathcal{G}) = \max\{\sup\{\inf\{|MN|;\ N\in Q\};\ M\in\mathcal{G}\};$$
$$\sup\{\inf\{|MN|;\ N\in\mathcal{G}\};\ M\in Q\}\},$$

где $|MN|$ — евклидово расстояние между точками M и N.

Пусть дана гладкая, без самопересечений кривая Γ. Через $\mathcal{U}_n^+(r,\Gamma)$ и $\mathcal{U}_n^-(r,\Gamma)$ обозначим любые объединения n кругов $B_i^{\pm}$ радиуса r, лежащих с противоположных сторон кривой Γ. Если кривая Γ замкнутая, то односвязную область, ограниченную Γ, обозначим через D, а дополнение этой области, содержащее бесконечно удаленную точку, — через $\overline{D}$. Тогда объединение кругов $\mathcal{U}_n^+(r,\Gamma)$ будет лежать внутри, а $\mathcal{U}_n^-(r,\Gamma)$ — снаружи области D (рисунок).



Под $\mathcal{R}(\Gamma, \mathcal{U}_n^+(r,\Gamma))$ $(\mathcal{R}(\Gamma, \mathcal{U}_n^-(r,\Gamma)))$ будем понимать хаусдорфово расстояние между кривой Γ и внешней (внутренней) границей множества $\mathcal{U}_n^+(r,\Gamma)$ $(\mathcal{U}_n^-(r,\Gamma))$.

*Поддержана грантом № U-92200 Международного научного фонда.

При фиксированных r и ε число $n^0 = n^o(\varepsilon, r, \Gamma)$ будем называть ε-оптимальным для кривой Γ, если при данном ε для любого множества $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \Gamma)$ из неравенства

$$\mathcal{R}\left(\Gamma, \mathcal{U}_n^{\pm}(r, \Gamma)\right) \le \varepsilon$$

следует $n \ge n^o$. Соответствующий ему набор кругов $\mathcal{U}_{n^o}^{\pm}(r, \Gamma)$ будем называть ε-оптимальным для кривой Γ.

Инфинитную последовательность (зависящую от ε) наборов кругов $\left\{\mathcal{U}_{n^*}^{\pm}(r, \Gamma)\right\}$, $n^* = n^*(r, \Gamma)$, будем называть асимптотически ε-оптимальной для кривой Γ и числа r, если при $\varepsilon \to 0$ выполняется асимптотическое равенство

$$n^* = n^o(1 + o(1)).$$

Возможна и двойственная постановка задачи.

При заданных n и r набор $\hat{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \Gamma)$ будем называть n-оптимальным для кривой Γ, если для любого набора из n кругов $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \Gamma)$ выполняется неравенство

$$\mathcal{R}\left(\Gamma, \hat{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \Gamma)\right) \le \mathcal{R}\left(\Gamma, \mathcal{U}_n^{\pm}(r, \Gamma)\right).$$

Последовательность наборов $\left\{\tilde{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \Gamma)\right\}_{n=1}^{\infty}$ будем называть асимптотически n-оптимальной для заданных r и Γ, если при $n \to \infty$ выполняется асимптотическое равенство

$$\mathcal{R}\left(\Gamma, \tilde{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \Gamma)\right) = \mathcal{R}\left(\Gamma, \hat{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \Gamma)\right)(1 + o(1)).$$

Легко устанавливается следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\left\{\tilde{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \Gamma)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность асимптотически n-оптимальных наборов кругов и* $\left\{\mathcal{U}_{n^*}^{\pm}(r, \Gamma)\right\}$ *— последовательность асимптотически ε-оптимальных наборов кругов. Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\mathcal{R}\left(\Gamma, \mathcal{U}_{n^*}^{\pm}(r, \Gamma)\right) = \varepsilon(1 + o(1))$$

и при $n \to \infty$

$$n^* = n(1 + o(1)).$$

Таким образом, если последовательность наборов кругов асимптотически оптимальна в одном смысле, то она будет асимптотически оптимальна и в другом смысле.

В связи с этим будем решать одну из поставленных задач — задачу определения наборов n кругов $\left\{\tilde{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \Gamma)\right\}_{n=1}^{\infty}$, n-оптимальных для кривой Γ.

Подобные задачи для сплайн-аппроксимации изучались во многих работах (см., например, [4] и библиографию к ней).

Определим некоторые необходимые нам в дальнейшем понятия. Для определенности будем рассматривать кривые $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$ $(t \in [0, T])$, заданные в натуральной параметризации.

Пусть $k(t) = x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)$ — кривизна кривой $\Gamma(t)$ в точке t и

$$\Phi(t) = \sqrt{1 - rk(t)}.$$

Через

$$\omega(z, t) = \sup\{|z(t')-z(t'')|, \ |t'-t''| \le t, \ t', t'' \in [0, T]\}$$

обозначим модуль непрерывности функции z в точке t и положим $\omega_n = \omega(\Phi, 1/n)$.

Теорема 2. *Пусть гладкая, замкнутая, без самопересечений кривая* $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$, *такова, что* $x, y \in C^4_{[0,T]}$, *число* r *меньше наименьшего радиуса кривизны кривой* Γ *и* $\{\Phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ — *произвольный набор функций из* $L^{\infty}_{[0,T]}$ *таких, что*

$$\||\Phi_n|-|\Phi|\|_{\infty} \le \omega_n^{\eta}, \tag{1}$$

где $\eta \in (0, 1/3)$.

Выберем набор точек $\{t^*_{i,n}\}_{i=0}^{n}$ *из условий*

$$\int_0^{t^*_{i,n}} \left(|\Phi_n(t)| + \omega_n^{\eta}\right) dt = \frac{i}{n}\int_0^T \left(|\Phi_n(t)| + \omega_n^{\eta}\right) dt, \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

а центры окружностей $(X_{i,n}, Y_{i,n})$ *исходя из равенств*

$$(X_{i,n}, Y_{i,n}) = \left(x\left(t^*_{i,n}\right) \mp r y'\left(t^*_{i,n}\right), \ y\left(t^*_{i,n}\right) \pm r x'\left(t^*_{i,n}\right)\right), \qquad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

и обозначим через $\tilde{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \Gamma)$ *объединение всех кругов радиуса* r *с центрами в точках* $(X_{i,n}, Y_{i,n})$. *Тогда при* $n \to \infty$ *последовательность* $\left\{\tilde{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \Gamma)\right\}_{n=1}^{\infty}$ *асимптотически оптимальна для кривой* Γ *и при этом выполняется соотношение*

$$\mathcal{R}\left(\Gamma, \tilde{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \Gamma)\right) = \frac{1}{8rn^2}\left(\int_0^T \Phi(t)\,dt\right)^2 (1 + o(1)). \tag{3}$$

Доказательство теоремы опирается на несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $\mathcal{L}$ — *дуга окружности радиуса* R *с центром в начале координат и центральным углом* α, *отсчитываемым от нуля,* ε, $\varepsilon < r$, — *заданная погрешность приближения и* n — *минимальное число кругов, при котором найдется такое множество* $\tilde{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \mathcal{L})$, *что будет выполняться неравенство*

$$\mathcal{R}\left(\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \mathcal{L})\right) \le \varepsilon. \tag{4}$$

Тогда

$$\mathcal{A} \le n \le \mathcal{A} + 2,$$

где

$$\mathcal{A} = \frac{\alpha}{2\varphi} + 1,$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{(R \mp \varepsilon)^2 + (R \pm r)^2 - \varepsilon^2}{2(R \mp \varepsilon)(R \mp r)}\right), \tag{5}$$

и центры кругов, составляющих множество $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \mathcal{L})$, *будут определяться равенствами*

$$(X_i, Y_i) = (R \mp r)(\cos(2i+\theta)\varphi, \sin(2i+\theta)\varphi), \qquad \theta \in [-1, 1]. \tag{6}$$

***Замечание* 1.** Если $\varepsilon \to 0$, то

$$\varphi = \sqrt{\frac{2r\varepsilon}{R(R \mp r)}}. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку по условию $\varepsilon < r$, то ясно, что множество $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \mathcal{L})$ с минимальным числом кругов n, удовлетворяющее условию (4), должно быть односвязным. Пусть существует хотя бы один круг $B_i^{\pm}$ из $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \mathcal{L})$, который не касается дуги $\mathcal{L}$. Построим вектор от центра окружности дуги $\mathcal{L}$ до центра этого круга. Сдвинем этот круг вдоль направления вектора к дуге $\mathcal{L}$. Расстояние от полученного множества $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \mathcal{L})$ до $\mathcal{L}$ может лишь уменьшится. Таким образом, множество $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \mathcal{L})$, удовлетворяющее условию (4) с наименьшим числом n, состоит из пересекающихся шаров, каждый из которых касается дуги $\mathcal{L}$. Дополним множество на каждом из концов по кругу так, чтобы полученное множество осталось связным и каждый из добавленных кругов касался дуги $\mathcal{L}$ на конце. Пусть $\mathcal{L}_i$ — часть дуги $\mathcal{L}$, заключенной между точками касания кругов $B_i^{\pm}$ и $B_{i+1}^{\pm}$. Тогда хаусдорфово расстояние между дугой $\mathcal{L}$ и ближайшей границей объединения двух соседних кругов будет

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}\left(\mathcal{L}_i, B_i^{\pm} \cup B_{i+1}^{\pm}\right) = R - (R-r)\cos(\alpha_i/2) - \sqrt{r^2 - (R-r)^2 \sin^2(\alpha_i/2)},$$

если $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \mathcal{L})$ лежит между началом координат и дугой $\mathcal{L}$, и

$$\mathcal{R} = (R+r)\cos(\alpha_i/2) + \sqrt{r^2 - (R+r)^2 \sin^2(\alpha_i/2)} - R$$

— в противном случае. Здесь α_i — угол между радиусами-векторами центров этих кругов. Ясно, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha$ и

$$\mathcal{R}\left(\mathcal{L}, \tilde{\mathcal{U}}_n^{\pm}(r, \mathcal{L})\right) = \max_i \mathcal{R}\left(\mathcal{L}_i, B_i^{\pm} \cup B_{i+1}^{\pm}\right).$$

Нетрудно видеть, что при условии (4) значение α_i не может быть больше значения 2φ.

Пусть в множестве $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \mathcal{L})$, удовлетворяющем условию (4) с минимальным числом кругов n, есть круги, расположенные так, что угол между радиусами-векторами центров двух соседних кругов ϕ меньше угла 2φ (как мы уже выяснили, больше значения угла 2φ он быть не может). Сдвигая круги так, чтобы значение угла между радиусами-векторами центров соседних шаров стало равным 2φ (условие (4) при этом не нарушится), можно добиться лишь уменьшения числа n, что противоречит предположению.

Равенство (7) легко получается из (5) с помощью формулы Тейлора.

Пусть кривая $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$ и $\Delta_n = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T\}$, $t_i = t_{i,n}$, — произвольное разбиение отрезка $[0, T]$ с шагом $h_{i+1/2} = t_{i+1} - t_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Если $\Gamma_i = \Gamma(t_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $\Gamma_{i+1/2} = \Gamma\left(t_{i+1/2}\right) = \Gamma\left(\left(t_{i+1} + t_i\right)/2\right)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, то через $\gamma(\Gamma, \Delta_n, t)$ обозначим кривую, которая для $t \in \left[t_i, t_{i+1}\right]$ совпадает с дугой окружности, проходящей через точки Γ_i, $\Gamma_{i+1/2}$, Γ_{i+1} с радиусом $R_{i+1/2}$.

Лемма 2. *Пусть кривая* $\Gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [0, T]$, *такова, что* $x, y \in \in C^3_{[0,T]}$. *Тогда равномерно по* i *при* $n \to \infty$

$$\rho(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n)) = 3^{-5/2} \max_{0 \le i \le n-1} \left(\left| F_{i+1/2} \right| h^3_{i+1/2} + o\left(h^3_{i+1/2}\right) \right),$$

где $F(t) = k'(t) = x'(t) y'''(t) - x'''(t) y'(t)$.

Доказательство. Пусть $t \in \left[t_i, t_{i+1}\right]$. Не нарушая общности, можно считать $t_i = -h$, $t_{i+1} = h$. Рассмотрим числа

$$X = x_0 - \frac{1}{q_0}\left(y_0' + \frac{h^2}{12}(x_0' x_0''' + y_0' y_0''') + \frac{1}{6} h^2 y_0''' \right),$$

$$Y = y_0 + \frac{1}{q_0}\left(x_0' + \frac{h^2}{12}(x_0' x_0''' + y_0' y_0''') + \frac{1}{6} h^2 x_0''' \right),$$

$$R = \frac{1}{q_0}\sqrt{1 + \frac{h^2}{2}(x_0' x_0''' + y_0' y_0''')},$$

где

$$q_0 = k_0 + \frac{1}{12} h^2 F_0 - \frac{1}{4} h^2 (x_0'' y_0''' - x_0''' y_0'')$$

и $z_0 = z(0)$.

Используя формулу Тейлора в окрестности нуля, можно показать, что окружность $\gamma(\Gamma, \Delta_n)$ на этом участке имеет центр, с точностью до $O(h^3)$ совпадающий с координатами точки (X, Y), а R — с ее радиусом. Кроме того, если

$$\varepsilon^2(t) = (x(t) - X)^2 + (y(t) - Y)^2 - R^2,$$

то для $\tau \in [-h, h]$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{6q_0} k_0 F_0 \left(h^2 - \tau^2\right)\tau + o(h^3) = \frac{1}{6} F_0 \left(h^2 - \tau^2\right)\tau + o(h^3).$$

Таким образом, если $\xi = 2(t - t_{i+1/2}) / h_{i+1/2}$, то для $t \in \left[t_i, t_{i+1}\right]$ равномерно по i

$$\varepsilon_i(t) = \frac{1}{6} F_{i+1/2} \left(1 - \xi^2\right) \xi h^3_{i+1/2} + o\left(h^3_{i+1/2}\right).$$

Поскольку $\max_{|\xi| \le 1} \left| \xi(1 - \xi^2) \right| = 2\sqrt{3}/9$, то равномерно по i выполняется соотношение

$$|\varepsilon_i| = \max_{t \in [t_i, t_{i+1}]} |\varepsilon_i(t)| = \frac{1}{9\sqrt{3}} \left| F_{i+1/2} \right| h^3_{i+1/2} + o\left(h^3_{i+1/2}\right)$$

и поэтому

$$\rho(\Gamma, \gamma(\Gamma, \Delta_n)) = 3^{-5/2} \max_{0 \le i \le n-1} \left(\left| F_{i+1/2} \right| h^3_{i+1/2} + o\left(h^3_{i+1/2}\right) \right).$$

Заметим, что при $t \in \left[t_i, t_{i+1}\right]$ равномерно по i

$$R_{i+1/2} = \frac{1}{\left| k_{i+1/2} \right|} + o\left(h^2_{i+1/2}\right) \tag{8}$$

для угла, стягивающего i-ю дугу окружности, выполняется соотношение

$$\alpha_{i+1/2} = h_{i+1/2}\left|k_{i+1/2}\right| + O\left(h_{i+1/2}^2\right). \tag{9}$$

Для равномерного разбиения $\delta_N = \{iT/N\}_{i=0}^N$ эти соотношения принимают вид

$$\rho(\Gamma, \gamma(\Gamma, \delta_n)) = 3^{-5/2}\left(\frac{T}{N}\right)^3 \max_{0\le i\le N-1}\left|F_{i+1/2}\right| + o\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

Кроме того, для $t \in [iT/N, (i+1)T/N]$

$$R_{i+1/2} = \frac{1}{\left|k_{i+1/2}\right|} + O\left(\frac{1}{N^2}\right) \tag{10}$$

и

$$\alpha_{i+1/2} = \left(\frac{T}{N}\right)\left|k_{i+1/2}\right| + O\left(\frac{1}{N^2}\right). \tag{11}$$

***Доказательство теоремы* 2**. Пусть $N = \left[n^{3/4}\right] + 1$, где $[a]$ — целая часть числа a, $n > [T/(2r)] + 1$, и $\delta_N = \{iT/N\}_{i=0}^N$. Как было отмечено при доказательстве леммы 1, не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что все круги множества $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \Gamma)$ касаются кривой Γ. Для $i = 1, \ldots, N$ обозначим через $\mathcal{U}_{n_i}^{\pm}(r, \Gamma)$ объединение n_i кругов из набора $\mathcal{U}_n^{\pm}(r, \Gamma)$, которые касаются дуги $\Gamma_i\Gamma_{i+1}$.

Построим кривую $\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N, t)$, которая для $t \in \left[t_i, t_{i+1}\right]$ совпадает с дугой окружности, проходящей через точки $\tilde{\Gamma}_i$, $\tilde{\Gamma}_{i+1/2}$, $\tilde{\Gamma}_{i+1}$, где $\tilde{\Gamma}_i = (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)$ и

$$(\tilde{x}_i, \tilde{y}_i) = \left(x_i - y_i' 3^{-5/2}\left(\frac{T}{N}\right)^3\left|F_{i+1/2}\right|,\ y_i + x_i' 3^{-5/2}\left(\frac{T}{N}\right)^3\left|F_{i+1/2}\right|\right).$$

Аналогично определяются $\tilde{\Gamma}_{i+1/2}$ и $\tilde{\Gamma}_{i+1}$.

Множество $\mathcal{U}_{n_i}^{\pm}(r, \Gamma)$ дополним двумя кругами, касающимися $\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N, t)$ в точках $\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N, iT/N)$ и $\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N, (i+1)T/N)$. Это множество обозначим через $\tilde{\mathcal{U}}_{n_i}^{\pm}(r, \Gamma)$. Тогда на промежутке $[iT/N, (i+1)T/N]$ получаем

$$\mathcal{R}\left(\Gamma, \tilde{\mathcal{U}}_{n_i}^{\pm}(r, \Gamma)\right) \ge \mathcal{R}\left(\tilde{\gamma}(\Gamma, \delta_N), \tilde{\mathcal{U}}_{n_i}^{\pm}(r, \Gamma)\right) - 3^{-5/2}\left(\frac{T}{N}\right)^3\left|F_{i+1/2}\right| + O\left(\frac{1}{N^4}\right).$$

Отсюда, из леммы 2 и замечания 1 следует, что равномерно по i

$$\mathcal{R}\left(\Gamma, \mathcal{U}_{n_i}^{\pm}(r, \Gamma)\right) \ge \frac{1}{8r(n_i+2)^2}\left(1 - rk_{i+1/2}\right)\left(\frac{T}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{8r(n_i+2)^2}\Phi_{i+1/2}^2\left(\frac{T}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{N^3}\right).$$

Далее, учитывая выбор N, получаем

$$\mathcal{R}\Big(\Gamma, \mathcal{U}_n^{\pm}(r, \Gamma)\Big) \ge \max_{0 \le i \le n-1} \mathcal{R}\Big(\Gamma, \mathcal{U}_{n_i}^{\pm}(r, \Gamma)\Big) \ge$$

$$\ge \max_{0 \le i \le n-1} \frac{1}{8r(n_i+2)^2} \Phi_{i+1/2}^2\left(\frac{T}{N}\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^{2,25}}\right).$$

Задача

$$\max \frac{A_i}{\beta_i^2} \to \inf A_i > 0, \qquad i = 1, 2, \dots, N,$$

при условии

$$\beta_i \ge 0, \qquad \sum_{i=1}^{N} \beta_i = B$$

имеет единственное решение и ее экстремальное значение равно

$$B^{-2}\left(\sum_{i=1}^{N} A_i^{1/2}\right)^2,$$

что вместе с предыдущим позволяет записать

$$\mathcal{R}\Big(\Gamma, \mathcal{U}_n^{\pm}(r, \Gamma)\Big) \ge \frac{1}{8(n+3N)^2 r}\left(\sum_{i=1}^{N} \Phi_{i+1/2}\left(\frac{T}{N}\right)\right)^2 + O\left(\frac{1}{n^{2,25}}\right) =$$

$$= \frac{1}{8rn^2}\left(\int_0^T \Phi(t)\,dt\right)^2\left(1 + O\left(\frac{1}{n^{0,25}}\right)\right),$$

что и доказывает оценку снизу.

Перейдем к доказательству оценки сверху. Выберем значения параметра $t_{i,n}^*$, соответствующие точкам касания кругов с кривой Γ из условия теоремы, т. е.

$$\int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} \left(|\Phi_n(t)| + \omega_n^{\eta}\right) dt = \frac{A_n}{n}. \tag{12}$$

Здесь и далее

$$A_n = \int_0^T \left(|\Phi_n(t)| + \omega_n^{\eta}\right) dt, \qquad A = \int_0^T |\Phi_n(t)|\,dt.$$

Тогда при достаточно больших n (см. условие (1)) существует число $|\chi_{i+1/2}| \le \le 1$ такое, что

$$\int_{t_{i,n}^*}^{t_{i+1,n}^*} \left(|\Phi_n(t)| + \omega_n^{\eta}\left(1 + \chi_{i+1/2}\right)\right) dt = \frac{A_n}{n}.$$

Согласно теореме о среднем, существует точка $\zeta_{i+1/2} \in \left(t_{i,n}^*, t_{i+1,n}^*\right)$ такая, что

$$\left(\left|\Phi_n(\zeta_{i+1/2})\right| + \omega_n^{\eta}\left(1 + \chi_{i+1/2}\right)\right) h_{i+1/2} = \frac{A_n}{n},$$

причем

$$A_n = \int_0^T \left(|\Phi_n(t)| + \omega_n^\eta\right)dt = \int_0^T \left(|\Phi_n(t)| + \omega_n^\eta\left(1+\chi_{i+1/2}\right)\right)dt = A + O\left(\omega_n^\eta\right).$$

Поэтому

$$\left(\left|\Phi(\zeta_{i+1/2})\right| + \omega_n^\eta\left(1+\chi_{i+1/2}\right)\right)h_{i+1/2} = \frac{A_n}{n}\left(1 + O\left(\omega_n^\eta\right)\right).$$

Из (12) следует, что $\omega_n^\eta h_{i+1/2} \le A_n/n$, т. е. $h_{i+1/2} \le A_n/\left(n\omega_n^\eta\right)$.

Если $\rho_{i+1/2}^*$ — хаусдорфово расстояние между кривыми Γ и $\gamma(\Gamma, \Delta_n^*, t)$ на i-м промежутке $\left[t_{i,n}^*, t_{i+1,n}^*\right]$, то

$$\rho_{i+1/2}^* \le \frac{1}{9\sqrt{3}}\left|F_{i+1/2}\right|h_{i+1/2}^3 + O\left(h_{i+1/2}^4\right).$$

Таким образом, учитывая значение η, имеем

$$\rho_{i+1/2}^* = O\left(\frac{1}{n^3}\omega_n^{-3\eta}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Используя (8) и (9), из замечания 1 получаем, что на i-м промежутке

$$\mathcal{R}\left(\Gamma, \mathcal{U}_n^\pm(r, \Gamma, \Delta_n^*)\right) \le \frac{\left|\Phi_{i+1/2}^2\right|}{8rk_{i+1/2}^2}h_{i+1/2}^2 k_{i+1/2}^2 + \rho_{i+1/2}^* + O\left(h_{i+1/2}^3\right) =$$

$$= \frac{1}{8r}\left|\Phi_{i+1/2}^2\right|h_{i+1/2}^2 + O\left(\frac{1}{n^3}\omega_n^{-3\eta}\right) + O\left(h_{i+1/2}^3\right) = \frac{1}{8r}\left(\left|\Phi(\zeta_{i+1/2})\right|h_{i+1/2}\right)^2 +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^3}\omega_n^{-3\eta}\right) + O\left(h_{i+1/2}^2\,\omega\left(\Phi^2, h_{i+1/2}\right) + h_{i+1/2}^3\right) =$$

$$= \frac{1}{8r}\left(\left(\left|\Phi(\zeta_{i+1/2})\right| + \omega_n^\eta\left(1+\chi_{i+1/2}\right)\right)h_{i+1/2}\right)^2 +$$

$$+ O\left(\frac{1}{n^3}\omega_n^{-3\eta}\right) + O\left(h_{i+1/2}^2\,\omega\left(\Phi^2, h_{i+1/2}\right) + h_{i+1/2}^3 + h_{i+1/2}^2\omega_n^\eta\right) =$$

$$= \frac{1}{8r}\left(\frac{A}{n}\right)^2(1 + o(1)).$$

Тогда для хаусдорфова расстояния между кривой Γ и $\mathcal{U}_n^\pm(r, \Gamma, \Delta_n^*)$ выполняется соотношение

$$\mathcal{R}\left(\Gamma, \mathcal{U}_n^\pm(r, \Gamma, \Delta_n^*)\right) \le \frac{1}{8rn^2}A^2(1 + o(1)),$$

что и доказывает основное утверждение.

Замечание 2. Строго говоря, построенное множество $\tilde{\mathcal{U}}_n^\pm(r, \Gamma)$ не лежит с одной стороны кривой Γ. Нетрудно показать, что величина $\rho\left(\Gamma, \tilde{\mathcal{U}}_n^+(r, \Gamma) \cap \overline{D}\right)$ $\left(\rho\left(\Gamma, \tilde{\mathcal{U}}_n^-(r, \Gamma) \cap D\right)\right)$ имеет порядок $\varepsilon^{3/2}$, поэтому чтобы построить множество, целиком лежащее с одной стороны, достаточно все круги из множества $\tilde{\mathcal{U}}_n^\pm(r, \Gamma)$ отодвинуть от кривой Γ на эту величину. Полученное множество останется асимптотически оптимальным и будет лежать строго с одной стороны от кривой Γ.

Рассмотрим одно важное приложение полученного результата.

Пусть $y = f(x) > 0$, $x \in [a, b]$, — функция, имеющая четвертую непрерывную производную на промежутке $[a, b]$. Через $\Pi(f)$ обозначим поверхность вращения графика функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, вокруг оси OX. Пусть $\mathcal{U}_n(f, r)$ — связное объединение полукругов $y_i - \sqrt{r^2 - (x - x_i)^2} \le y \le y_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, с радиусом r, лежащих выше $f(x)$ и

$$\gamma\big(\mathcal{U}_n(f, r), x, y\big) = \Big\{(x, y)\colon x \in [a, b], y = \min\big\{u\colon (x, u) \in \mathcal{U}_n(f, r)\big\}\Big\}$$

— верхняя граница подграфика $\mathcal{U}_n(f, r)$.

Через $\Pi_n(f, r)$ обозначим поверхность вращения линии $\gamma\big(\mathcal{U}_n(f, r), x, y\big)$ вокруг оси OX. Понятия n-оптимальности и ε-оптимальности, введенные ранее, имеют место и для $\Pi_n(f, r)$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $f(x) > 0$, $f \in C^4_{[a, b]}$, число r меньше наименьшего радиуса кривизны $f(x)$ и $\{x_i^*\}_{i=0}^n = \{t_{i,n}^*\}_{i=0}^n$ — набор точек, выбранных из условий (2). Определим центры полукругов множества $\tilde{\mathcal{U}}_n(f, r)\big(X_{i,n}, Y_{i,n}\big)$, исходя из равенств*

$$\big(X_{i,n}, Y_{i,n}\big) = \left(x_i^* - \frac{rf'(x_i^*)}{\sqrt{1 + \big(f'(x_i^*)\big)^2}},\ y(x_i^*) + \frac{r}{\sqrt{1 + \big(f'(x_i^*)\big)^2}}\right),$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда при $n \to \infty$ последовательность $\big\{\tilde{\Pi}_n(f, r)\big\}_{n=1}^\infty$ асимптотически оптимальна для $\Pi(f)$ и при этом выполняется соотношение

$$\rho\big(\Pi(f), \tilde{\Pi}_n(f, r)\big) = \frac{1}{8rn^2}\left(\int_0^T \Phi(t)\,dt\right)^2 (1 + o(1)).$$

1. *Завьялов Ю. С., Леус В. А., Скороспелов В. А.* Сплайны в инженерной геометрии. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
2. *Schoenberg I. J.* On polynomial spline functions on the circle I, II // Proc. Conf. Construct. Theory of Functions. – Budapest, 1972.– p. 403–433.
3. *Сендов Б.* Хаусдорфовые приближения. – София, 1979. – 320 с.
4. *Лигун А. А., Шумейко А. А.* Об оптимальном выборе узлов при приближении функций интерполяционными сплайнами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1984. – **24**, № 9. – С. 1283–1293.

Получено 21.10.96,
после доработки — 23.06.97