УДК 517.956.223

Г. П. Лопушанська (Львів. ун-т)

РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ У ПРОСТОРІ УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ

The known approach to the solving generalized boundary-value problems for second order elliptic and parabolic equations and for second order strongly elliptic systems of the variational type is extended to the case of a general normal boundary-value problem for an elliptic equation of order $2m$. Representation of a generalized function from $(C^\infty(S))'$ is established and is used to prove the convergence of an approximate method of solving the normal elliptic boundary-value problem in unnormed spaces of generalized functions.

Відомий підхід до розв'язування узагальнених граничних задач для еліптичних та параболічних рівнянь 2-го порядку та сильно еліптичних систем 2-го порядку варіаційного типу поширюється на випадок загальної нормальної граничної задачі для еліптичного рівняння порядку $2m$. Встановлюється зображення узагальненої функції із $(C^\infty(S))'$, за допомогою якого доводиться збіжність одного наближеного методу розв'язування нормальної еліптичної граничної задачі у ненормованих просторах узагальнених функцій.

Нехай диференціальний оператор

$$A(x, D) = \sum_{|\alpha| \le 2m} a_\alpha(x) D^\alpha, \qquad a_\alpha(x) \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n),$$

є еліптичним у просторі $\mathbb{R}^n$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$, обмежена замкненою поверхнею S класу $\mathbb{C}^\infty$, $\Omega_e = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega}$. На S задана нормальна система граничних диференціальних операторів

$$B_j(x, D) = \sum_{|\alpha| \le m_j} b_{\alpha_j}(x) D^\alpha, \qquad b_{\alpha_j}(x) \in \mathbb{C}^\infty(S), \quad m_j \le 2m-1, \quad j = \overline{1, m},$$

яка накриває оператор $A(x, D)$ [1].

В $\overline{\Omega}$ розглядаємо граничну задачу

$$A(x, D)\, u(x) = F_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad B_j(x, D)\, u|_S = F_{1j}, \quad j = \overline{1, m}. \tag{1}$$

Узагальнена розв'язуваність задачі (1) та більш загальних задач у повних шкалах банахових просторів вивчена у роботах [2–5]. В даній роботі пропонується інший підхід до вивчення задачі (1) у ненормованих просторах узагальнених функцій.

Нехай A^* — оператор, формально спряжений до A, $\{T_j\}_{j=1}^m$ — система граничних операторів порядків $\mu_j \le 2m-1$ з коефіцієнтами із $\mathbb{C}^\infty(S)$, яка доповнює систему B_j до системи Діріхле порядку $2m$, оператори $\hat{B}_j$ і $\hat{T}_j$ порядків відповідно $2m-1-\mu_j$ та $2m-1-m_j$ утворюють на S систему Діріхле порядку $2m$ і такі, що правильна формула Гріна [1]

$$\int_\Omega (Au \cdot v - u \cdot A^* v)\, dx = \sum_{j=1}^m \int_S (T_j u \cdot \hat{B}_j v - B_j u \cdot \hat{T}_j v)\, ds, \qquad u, v \in \mathbb{C}^\infty.$$

Нехай $u(x)$ — розв'язок задачі (1) при регулярних $F_0(x)$ та $F_1(x), \ldots$ $\ldots, F_m(x)$,

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \tilde{u}(x), & x \in \Omega; \\ 0, & x \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

© Г. П. ЛОПУШАНСЬКА, 1999

аналогічно визначаємо $\tilde{F}_0(x)$; $\tilde{u}(x)$ та $\tilde{F}_0(x)$ можна розглядати як регулярні узагальнені функції із $D'(\mathbb{R}^n)$ з носіями в $\overline{\Omega}$. Тоді для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$ маємо

$$(\varphi, A\tilde{u}) = (A^*\varphi, \tilde{u}) = \int\limits_\Omega A^*\varphi \cdot u\, dx.$$

Перетворимо цей вираз, використовуючи формулу Гріна. Розглядаючи F_j та $T_j u$ як регулярні узагальнені функції із $D'(\mathbb{R}^n)$, зосереджені на поверхні S, маємо

$$(\varphi, F_j) = \int\limits_S \varphi F_j(x)\, dS,$$

$$(\hat{B}_j \varphi, T_j u) = \int\limits_S \hat{B}_j^* \varphi \cdot T_j u\, dS = \int\limits_S \varphi \cdot \hat{B}_j^*(T_j u)\, dS = (\varphi, \hat{B}_j^*(T_j u)),$$

$\hat{B}_j^*$ — спряжений на S оператор до оператора $\hat{B}_j$.

Тоді $\tilde{u}(x)$ задовольняє у $D'(\mathbb{R}^n)$ рівняння

$$A\tilde{u} = \tilde{F}_0 + \sum_{j=1}^{m} (\hat{T}_j^* F_{1j} - \hat{B}_j^* F_{2j}), \tag{2}$$

де $F_{2j} = T_j \cdot u|_S$, $j = \overline{1, m}$. Зауважимо, що формула (2) по суті співпадає із формулою (2.4.4) із [5].

Нехай $D'(\overline{\Omega})$ та $D'(S)$ — простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на $D(\overline{\Omega}) = \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$ та $D(S) = \mathbb{C}^\infty(S)$, (φ, F) та $\langle \varphi, F \rangle$ — дії $F \in D'(\overline{\Omega})$ на $\varphi \in D(\overline{\Omega})$ та $F \in D'(S)$ на $\varphi \in D(S)$ відповідно. Для $F \in D'(S)$, $\varphi \in D(S)$

$$\langle \varphi, \hat{T}_j^* F \rangle = \langle T_j \varphi, F \rangle, \quad \langle \varphi, \hat{B}_j^* F \rangle = \langle \hat{B}_j \varphi, F \rangle.$$

Сформулюємо узагальнену граничну задачу. Нехай $F_0 \in D'(\overline{\Omega})$, $F_1, \ldots, F_m \in D'(S)$. Розв'язком задачі (1) називаємо таку узагальнену функцію $u \in D'(\overline{\Omega})$, що $\tilde{u}(x)$ задовольняє у $D'(\mathbb{R}^n)$ рівняння (2), де F_{2j}, $j = \overline{1, m}$, — деякі узагальнені функції із $D'(S)$.

Можна сформулювати задачу інакше: знайти узагальнені функції $u \in D'(\overline{\Omega})$ та $F_{21}, \ldots, F_{2m} \in D'(S)$ такі, щоб $\tilde{u}(x)$ задовольняла у $D'(\mathbb{R}^n)$ рівняння (2).

Позначимо через $\omega(x, y)$ нормальну фундаментальну функцію оператора $A(x, D)$. У роботі [6] доведено, що для її існування в області $G \supset \overline{\Omega}$ необхідно і досить, щоб $N_0 = N_0^* = \{0\}$, де $N_0 = \{u \in N,\ \operatorname{supp} u \in \overline{G}\}$, $N_0^* = \{u \in N^*,\ \operatorname{supp} u \in \overline{G}\}$, N і N^* — ядра задач $Au = F_0$ в G, $D_\nu^j u|_{\partial G} = 0$, $j = \overline{0, m}$, та $A^* u = F$, $D_\nu^j u|_{\partial G} = 0$, $j = \overline{0, m}$, відповідно. Далі вважатимемо ці умови виконаними.

Згідно з [7–9], єдиний у просторі $\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) = (\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^n))'$ розв'язок рівняння (2) можна подати у вигляді композиції правої частини рівняння та $\omega(x, y)$:

$$\tilde{u}(x) = \omega(x, y) * F, \tag{3}$$

де $F = \tilde{F}_0 + \sum_{j=1}^{m} (\hat{T}_j^* F_{1j} - \hat{B}_j^* F_{2j})$, тобто $(\varphi, \tilde{u}) = ((\varphi(x), \omega(x, y)), F)$.

Оскільки $\tilde{u}(x) = 0$ в Ω_e, то $(\varphi, \tilde{u}) = 0$ для довільної $\varphi \in D(\Omega_e)$, тобто

$$\left(\int_{\Omega_e} \varphi(x)\omega(x, y)\, dx, F \right) = 0, \qquad \varphi \in D(\Omega_e).$$

Оскільки $\int_{\Omega_e} \varphi(x)\omega(x, y)\, dx \in \mathbb{C}^\infty(\overline{\Omega})$, а $\operatorname{supp} F = \overline{\Omega}$, то можна використати аналог теореми Фубіні. Одержимо $\int_{\Omega_e} \varphi(x)(\omega(x, y), F(y))\, dx = 0$, $\varphi \in$ $\in D(\Omega_e)$, тоді $(\omega(x, y), F(y)) = 0$, $x \in \Omega_e$, тобто

$$(\omega(x, y), F_0(y)) + \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{T}_j(y, D)\, \omega(x, y), F_{1j}(y) \rangle -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{B}_j(y, D)\, \omega(x, y), F_{2j}(y) \rangle = 0, \qquad x \in \Omega_e. \tag{4}$$

Співвідношення (4) використаємо для знаходження невідомих узагальнених функцій $F_{21}, \ldots, F_{2m}$.

Нехай

$$z(x) = (\omega(x, y), F_0(y)) + \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{T}_j(y, D)\, \omega(x, y), F_{1j} \rangle -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{B}_j(y, D)\, \omega(x, y), F_{2j} \rangle, \qquad x \in \Omega_e.$$

Якщо F_{2j}, $j = \overline{1, m}$, задовольняють умову (4), то $z(x) \equiv 0$, $x \in \Omega_e$. Із вигляду $z(x)$ та властивостей $\omega(x, y)$ випливає, що $z(x) \in \mathbb{C}^\infty(\Omega_e)$,

$$A(x, D)\, z(x) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_e, \tag{5}$$

$$\lim_{|x| \to \infty} z(x) = 0, \tag{6}$$

причому при $|x| \to \infty$ $z(x)$ має порядок прямування до нуля такий, як і $\omega(x, 0)$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{S_{-\varepsilon}} \varphi_j(x_{-\varepsilon})\, T_j(x_{-\varepsilon}, D)\, z(x_{-\varepsilon})\, dS_{-\varepsilon} = 0, \qquad j = \overline{1, m}, \tag{7}$$

де $S_{-\varepsilon} = \{x_{-\varepsilon} = x - \varepsilon\nu(x),\ x \in S\}$ — паралельна до S поверхня в Ω_e ($\overline{\nu}(x)$ — орт внутрішньої нормалі на S у точці x), $\varphi_j(x_{-\varepsilon}) = \varphi_j(x)$, $T_j(x_{-\varepsilon}, D) =$ $= T_j(x, D)$, якщо $x_{-\varepsilon} = x - \varepsilon\nu(x)$, $x \in S$, $\varphi_j(x)$ — довільні функції із $D(S)$.

Якщо зовнішня узагальнена гранична задача (5) – (7) має тільки тривіальний розв'язок $z(x) \equiv 0$, то для знаходження $F_{21}, \ldots, F_{2m}$ використовуємо (7), оскільки тоді $F_{21}, \ldots, F_{2m}$ будуть також задовольняти умову (4). Оскільки формула (7) правильна при довільних диференціальних операторах T_j з гладкими коефіцієнтами (а не лише при визначених вище формулою Гріна), то мати на одне рівняння більше). Нові інтегральні рівняння отримаємо, діючи операторами $T_j^*(y, D)$ на рівняння системи (10), $j = \overline{1, m}$.

Нехай $\overline{F}_2 = (F_1, \ldots, F_m, F_{m+1}, \ldots, F_{2m})$, аналогічно визначені $\overline{\varphi}(y)$ та $\overline{g}(y)$. Одержану систему інтегральних рівнянь запишемо у матричному вигляді

$$\lambda(y)\overline{\varphi}(y) + \int\limits_S K(x, y)\,\overline{\varphi}(y)\,dS = \overline{g}(y).$$

Невідому узагальнену вектор-функцію $\overline{F}_2$ визначаємо із перетворення

$$\langle \overline{g}, \overline{F}_2 \rangle = \langle \overline{\varphi}_g, \overline{Q} \rangle - \left\langle \left(\int\limits_S \Phi_0'\, dS \right)^{-1} \Phi_0', \overline{Q} \right\rangle \int\limits_S \overline{\varphi}_g\, dS, \qquad g \in D(S), \tag{11}$$

де узагальнена вектор-функція $\overline{Q}$ однозначно визначається узагальненими функціями F_i, $i = \overline{1, 2m}$, оскільки $\langle T_i^* g_i, F_i \rangle = \langle g_i, T_i F_i \rangle$, $i = \overline{1, 2m}$, $\overline{\varphi}_g$ — розв'язок системи

$$\lambda(y)\overline{\varphi}(y) + \int\limits_S K(x, y)\,\overline{\varphi}(y)\,dS = \overline{g}(y) - \overline{C}_g, \tag{12}$$

$$\overline{C}_g = \left(\int\limits_S \Phi_0^*\, dS \right)^{-1} \int\limits_S \Phi_0^*\, \overline{g}\, dS,$$

$\Phi_0^*(y)$ — матриця, рядки якої є лінійно незалежними розв'язками спряженої лінійної однорідної системи інтегральних рівнянь, $\Phi_0(y)$ — матриця лінійно незалежних розв'язків відповідної (12) лінійної однорідної системи інтегральних рівнянь, $D_1'(S) = \{ F \in D'(S) \colon \langle E, F \rangle = 0 \}$, $W'(S) = \{ F \in D'(S) \colon \langle \Phi_0', F \rangle = 0 \}$.

Лема 1. *Перетворення* $\langle \overline{g}, \overline{F}_2 \rangle = \langle \overline{\varphi}_g, \overline{Q} \rangle$, *де* $\overline{g} \in D(S)$, $\overline{\varphi}_g$ *— розв'язок системи* (12), *є ізоморфізмом* $W'(S)$ *на* $D_1'(S)$.

Тоді (11) визначає для довільної $\overline{Q} \in D'(S)$ узагальнену вектор-функцію $\overline{F}_2 \in D_1'(S)$. Знайшовши $\overline{F}_2$, одержуємо F_2, а отже, і розв'язок $u(x)$ задачі (1).

За теоремою 1 [8] рівняння (2) має єдиний розв'язок при однозначно визначених $F_{2j} \in D'(S)$ та довільно заданих $F_{1j} \in D'(S)$, $j = \overline{1, m}$. Але із (2)

$$(A^* \varphi, \tilde{u}) = (\varphi, F_0) + \sum_{j=1}^{m} \left(\langle \hat{T}_j \varphi, F_{1j} \rangle - \langle \hat{B}_j \varphi, F_{2j} \rangle \right) \tag{13}$$

для довільної $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$. Звідси для $\varphi(y) = \psi(y)$, де $\psi(y)$ — розв'язок спряженої однорідної задачі $A^* \psi(x) = 0$, $x \in \Omega$, $\hat{B}_j \psi|_S = 0$, одержуємо

$$(\psi, F_0) + \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{T}_j \psi, F_{1j} \rangle = 0. \tag{14}$$

Це необхідна умова розв'язуваності задачі (1).

Нехай тепер $F_{2j}^{(1)}$, $F_{2j}^{(2)}$ — два набори узагальнених функцій, які задовольняють умову (4), $F_{2j} = F_{2j}^{(1)} - F_{2j}^{(2)}$. Тоді рівняння (2) має два розв'язки $\tilde{u}_1(x)$, $\tilde{u}_2(x) \in \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ і можна в деяких випадках, замінивши оператори T_j на $\tilde{T}_j$ того ж порядку, добитись, щоб задача (5) – (7) з операторами $\tilde{T}_j$ замість T_j була однозначно розв'язуваною.

Підставляючи $z(x)$ в умови (7), одержуємо

$$\sum_{j=1}^{m}\left\langle \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{-\varepsilon}} \varphi_i(x_{-\varepsilon})\,T_i(x_{-\varepsilon},D)\,\hat{B}_j(y,D)\,\omega(x_{-\varepsilon},y)\,dS_{-\varepsilon},\ F_{2j}\right\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left\langle \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{-\varepsilon}} \varphi_i(x_{-\varepsilon})\,T_i(x_{-\varepsilon},D)\,\hat{T}_j(y,D)\,\omega(x_{-\varepsilon},y)\,dS_{-\varepsilon},\ F_{1j}\right\rangle +$$

$$+\left(\int_S \varphi_i(x)\,T_i(x,D)\,\omega(x,y)\,dS,\ F_0\right),\qquad \varphi_i\in D(S),\quad i=\overline{1,m}. \tag{8}$$

Сума порядків операторів T_j та $\hat{B}_j$ дорівнює $2m-1$, тому існує

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_{-\varepsilon}} \varphi_i(x_{-\varepsilon})\,T_i(x_{-\varepsilon},D)\,\hat{B}_i(y,D)\,\omega(x_{-\varepsilon},y)\,dS =$$

$$= \lambda_i(y)\,\varphi_i(y) + \int_S \varphi_i(x)\,T_i(x,D)\,\hat{B}_i(y,D)\,\omega(x,y)\,dS,\qquad \lambda_i,\ \varphi_i\in D(S).$$

Якщо ж $\mu_i+2m-\mu_j>2m-1$ при деякому $j\neq i$, то використовуємо існування спряжених до $\hat{T}_j$ та $\hat{B}_j$ на S диференціальних граничних операторів $\hat{T}_j^*$ та $\hat{B}_j^*$.

Підсумовуючи рівності (8), отримуємо

$$\sum_{j=1}^{m}\langle g_j, F_{2j}\rangle = \sum_{j=1}^{m}\left\langle \hat{T}_j(y,D)\int_S \sum_{i=1}^{m}\varphi_{gi}(x)\,T_i(x,D)\,\omega(x,y)\,dS\Big|_S,\ F_{1j}\right\rangle +$$

$$+\int_S \sum_{i=1}^{m}\varphi_{gi}(x)\,T_i(x,D)\,(\omega(x,y),F_0(y))\,dS, \tag{9}$$

де $g_j\in D(S)$, $(\varphi_{g1},\ldots,\varphi_{gm})=\varphi_g$ — розв'язок системи інтегро-диференціальних рівнянь

$$\lambda_j(y)\,\varphi_j(y) + \int_S \varphi_j(x)\,T_j(x,D)\,\hat{B}_j(y,D)\,\omega(x,y)\,dS + \sum_{i\neq j} T_i^*\varphi_i(y)\,k_i(y) +$$

$$+\int_S \sum_{i\neq j} T_i^*\varphi_i(x)\,\hat{B}_j(y,D)\,\omega(x,y)\,dS = g_j(y),\qquad j=\overline{1,m}, \tag{10}$$

$$C(y,D)\int_S f(x,y)\,dS\Big|_S = \lim_{\varepsilon\to 0} C(y,D)\int_{S_{-\varepsilon}} f(x_{-\varepsilon},y)\,dS,$$

$k_j(y)\neq 0$ лише при $\mu_j=0$.

Систему (10) можна звести до системи $2m$ регулярних інтегральних рівнянь Фредгольма 2-го роду, ввівши нові функції $T_i^*\varphi_i(y)=\varphi_{m+i}(y)$, $T_i^*g_i(y)=$ $=g_{m+i}(y)$, $i=\overline{1,m}$, якщо всі $\mu_i\neq 0$ (у випадку $\mu_i=0$ при деякому i будемо

$$(\varphi, \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) = \sum_{j=1}^{m} \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, \hat{B}_j(y, D)\, \omega(x, y)\, dx,\ F_{2j} \right\rangle, \quad \varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n).$$

Із (4) маємо

$$\sum_{j=1}^{m} \left\langle \int_{\Omega_e} \varphi(x)\, \hat{B}_j(y, D)\, \omega(x, y)\, dx,\ F_{2j} \right\rangle = 0, \quad \varphi \in D(\Omega_e).$$

Тому для довільної $\varphi \in \mathscr{E}(\mathbb{R}^n)$

$$(\varphi, \tilde{u}_1 - \tilde{u}_2) = \sum_{j=1}^{m} \left\langle \int_{\Omega} \varphi(x)\, \hat{B}_j(y, D)\, \omega(x, y)\, dx,\ F_{2j} \right\rangle = (\varphi, u_1 - u_2).$$

Отже,

$$(\varphi, u_1 - u_2) = \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{B}_j\, \psi(y), F_{2j} \rangle,$$

де

$$\psi(y) = \int_{\Omega} \varphi(x)\, \omega(x, y)\, dx$$

— довільний розв'язок рівняння $A^* \psi = \varphi$ у $\overline{\Omega}$. Якщо як розв'язок цього рівняння взяти $\psi(y)$ таке, що $\hat{B}_j \psi|_S = 0,\ j = \overline{1, m}$, то матимемо $(\varphi, u_1 - u_2) = 0$ для довільної $\varphi \in D(\overline{\Omega})$, ортогональної до ядра N задачі (1).

Отже, незважаючи на неоднозначність (взагалі кажучи) визначення $F_{21}, \ldots, F_{2m}$ із умови (4), отриманий за формулою (3) розв'язок рівняння (2) єдиний. Сформулюємо висновки.

Теорема 1. *Нехай* $F_0 \in D'(\overline{\Omega})$, $F_{11}, \ldots, F_{1m} \in D'(S)$ *і задовольняють умову* (14), *узагальнені функції* $F_{21}, \ldots, F_{2m} \in D'(S)$ *і задовольняють умову* (4). *Тоді існує єдиний у* $D'(\overline{\Omega})/N$ *розв'язок* $u(x) \in D'(\overline{\Omega})$ *задачі* (1), *визначений за формулою*

$$(\varphi, u) = \left(\int_{\Omega} \varphi(x)\, \omega(x, y)\, dx,\ F_0 \right) + \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega} \varphi(x) \langle \hat{T}_j(y, D)\, \omega(x, y), F_{1j} \rangle\, dx -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \int_{\Omega} \varphi(x) \langle \hat{B}_j(y, D)\, \omega(x, y), F_{2j} \rangle\, dx, \quad \varphi \in D(\overline{\Omega}). \tag{15}$$

Якщо задача (5) – (7) *однозначно розв'язувана, то узагальнені функції* $F_{21}, \ldots, F_{2m} \in D_1'(S)$ *можна визначити згідно з формулами* (11), (12).

У роботі [10] задача (1) вивчалась в іншому формулюванні: розв'язком задачі (1) є узагальнена функція $u \in D'(\overline{\Omega})$, яка задовольняє тотожність

$$(A^* \psi, u) = (\psi, F_0) + \sum_{j=1}^{m} \langle \hat{T}_j \psi, F_{1j} \rangle \tag{16}$$

для довільної $\psi \in X(\overline{\Omega})$; $X(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}):\ \hat{B}_j \varphi|_S = 0,\ j = \overline{1, m}\}$. Було доведено однозначну розв'язуваність у $D'(\overline{\Omega})/N$ (при умові (14)) задачі (1) у такому формулюванні та одержано зображення її розв'язку за допомогою вектор-функції Гріна.

Справедлива наступна теорема.

Доведення. Оскільки $F \in D'(S)$, то F — фінітна узагальнена функція, а тому існує таке натуральне число $q = q(F)$, що для довільного $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta = \delta(\varepsilon, F) > 0$, що коли $\varphi \in D(S)$ і $\left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\alpha'} \varphi(x)\right| < \delta$ для всіх $|\alpha'| \le q$, то $|\langle \varphi, F\rangle| < \varepsilon$. За лемою 3 існує таке натуральне число k і таке $\tau > 0$, що коли

$$\|\psi\|_{L_2(S)} = \|(\lambda - A_S)^{k/(2m)} \varphi(y)\|_{L_2(S)} < \tau,$$

то

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\alpha'} \varphi(x)\right| = \left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\alpha'} (\lambda - A_S)^{-k/(2m)} \psi(x)\right| < \delta$$

для всіх $|\alpha'| \le q$.

Визначимо узагальнену функцію $T \in D'(S)$:

$$\langle \psi, T\rangle = \langle \varphi, F\rangle, \qquad \psi \in D(S), \qquad \varphi = (\lambda - A_S)^{-k/(2m)} \psi.$$

Оскільки при $\|\psi\|_{L_2(S)} < \tau$ маємо $\left|\left(\frac{\partial}{\partial \xi'}\right)^{\alpha'} \varphi(x)\right| < \delta$ для всіх $|\alpha'| \le q$, то $|\langle \varphi, F\rangle| < \varepsilon$. Отже, $|\langle \psi, T\rangle| < \varepsilon$ при $\|\psi\|_{L_2(S)} < \tau$, тобто T — лінійний неперервний функціонал на $L_2(S)$.

За теоремою Фішера – Рісса існує $f \in L_2(S)$ така, що $\langle \psi, T\rangle = \int_S \psi f \, dS$, а звідси випливає (14).

Нехай S_1 — довільна замкнена поверхня класу $\mathbb{C}^\infty$, яка належить Ω_e, $\operatorname{dist}(S_1, S) > 0$, $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ — зчисленна всюди густа множина точок на S_1, G — область, обмежена поверхнею S_1.

Теорема 4. *Система вектор-функцій*

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \hat{B}(y, D)\, \omega(x_k, y), \qquad i = \overline{0, m-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{21}$$

де $\hat{B}u = (\hat{B}_1 u, \ldots, \hat{B}_m u)$, *лінійно незалежна і повна в* $L_2(S)$.

Доведення. Нехай

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{M} C_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \hat{B}(y, D)\, \omega(x_k, y) = 0, \qquad y \in S,$$

M — довільне натуральне число. Функція

$$v(y) = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{k=1}^{M} C_{ik} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x_k, y)$$

є розв'язком задачі

$$A^* v(y) = 0, \quad y \in \Omega, \qquad \hat{B}_j v|_S = 0, \quad j = \overline{1, m},$$

тому $v \in N^*$, тобто

$$v(y) = \sum_{j=1}^{l} d_j \psi_j(y), \quad y \in \Omega.$$

За теоремою 2 з [6] із існування $\omega(x, y)$ в $\overline{G}$ випливає, що $v(y)$ є нескінченно диференційовною функцією в $G \setminus \overline{\Omega}$. Але $\hat{B}_j(y, D)\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x_k, y) \to \infty$ при $y \to x_{k_0}$, $i = \overline{0, m-1}$, $j = \overline{1, m}$. Тому необхідно, щоб $C_{ik_0} = 0$, $i = \overline{1, m-1}$. За довільністю k_0 всі $C_{ik_0} = 0$.

Доведемо повноту в $L_2(S)$ системи (21). Досить довести її повноту в $C_{L_2}(S)$. Нехай

$$\lambda(y) = \begin{pmatrix} \lambda_1(y) \\ \vdots \\ \lambda_m(y) \end{pmatrix} \text{— довільна вектор-функція із } D(S) \subset G_{L_2}(S).$$

Тоді

$$\sum_{j=1}^{m} \int_S \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \hat{B}_j(y, D)\, \omega(x_k, y)\, \lambda_j(y)\, dS = 0, \tag{22}$$

$$i = \overline{0, m-1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Із формули Гріна для $\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x, y)$ та w такої, що $B_j w|_S = 0$, $T_j w|_S = \lambda_j$, $j = \overline{1, m}$, маємо

$$\int_\Omega A w(y) \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x, y)\, dS - \sum_{j=1}^{m} \int_S \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \hat{B}_j(y, D)\, \omega(x, y)\, \lambda_j(y)\, dS =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i w(x), & x \in \Omega; \\ 0, & x \in C \setminus \overline{\Omega}, \end{cases} \qquad i = \overline{0, m-1}.$$

Нехай $g(y) = A\, w(y)$, $y \in \overline{\Omega}$,

$$v(x) = \int_\Omega \omega(x, y)\, g(y)\, dy.$$

Тоді

$$A\, v(x) = \begin{cases} g(x), & x \in \Omega; \\ 0, & x \in G \setminus \overline{\Omega}, \end{cases}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i v(x_k) = \sum_{j=1}^{m} \int_S \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \hat{B}_j(y, D)\, \omega(x_k, y)\, \lambda_j(y)\, dS,$$

а тому, згідно з (22),

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i v(x_k) = 0, \quad i = \overline{1, m-1}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Із густоти множини точок $\{x_k\}$ на S_1 випливає $\left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i v\Big|_{S_1} = 0, \ i = \overline{0, m-1}$.

Отже, $v(x)$ є розв'язком задачі Коші для рівняння $Av = 0$ в $G \setminus \overline{\Omega}$; за єдиністю розв'язку її (що випливає із існування нормальної фундаментальної функції для оператора A [6]) одержуємо $v(x) \equiv 0, \ x \in G \setminus \overline{\Omega}$. А із вигляду $v(x)$ маємо $B_j v|_S = T_j v|_S = 0, \ j = \overline{1, m}$.

Нехай $z(x) = w(x) - v(x)$. Тоді $A z(x) = 0, \ x \in \Omega, \ B_j z|_S = 0, \ T_j z|_S = \lambda_j(y), \ y \in S$.

Отже, $z(x) = z_0(x)$ — розв'язок задачі $Az = 0$ в Ω, $B_j z|_S = 0, \ j = \overline{1, m}$, і, крім того, $T_j z_0|_S = \lambda_j, \ j = \overline{1, m}$. Із формули Гріна маємо

$$\int_\Omega z_0 A^* \psi \, dx = \sum_{j=1}^m \int_S \lambda_j \hat{B}_j \psi \, dS, \qquad \psi \in D(\overline{\Omega}).$$

Вибираючи $\psi(x)$ розв'язком задачі $A^* \psi = 0$ в Ω, $\hat{B}_j \psi|_S = \lambda_j, \ j = \overline{1, m}$, одержуємо $\int_S \sum_{j=1}^m \lambda_j^2 \, dS = 0$, тобто $\lambda_j(y) \equiv 0, \ y \in S, \ j = \overline{1, m}$.

Теорему доведено.

Перенумеруємо систему вектор-функцій (21). Нехай

$$\Psi_{(l)}(y) = \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \hat{B}(y, D)\,\omega(x_k, y), \qquad \hat{\Psi}_{(l)}(y) = \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \hat{T}(y, D)\,\omega(x_k, y),$$

$$W_{(l)}(y) = \left(\frac{\partial}{\partial \nu_x}\right)^i \omega(x_k, y),$$

якщо $l = (k-1)m + i + 1, \ i = \overline{0, m-1}, \ k = 1, 2, \ldots$.

Ортогоналізуємо систему вектор-функцій (21) (одержану повну ортонормовану систему вектор-функцій позначаємо через $\{\psi_{(i)}(y)\}_{i=1}^\infty$):

$$\psi_{(i)}(y) = \sum_{l=1}^i a_{li} \Psi_{(l)}(y).$$

Тепер із (4) можемо знайти коефіцієнти Фур'є $F_{2(i)}$ невідомої узагальненої вектор-функції $F_2 = (F_{21}, \ldots, F_{2m}) \in D'(S)$:

$$F_{2(i)} = \langle \psi_{(i)}, F_2 \rangle = \sum_{l=1}^i a_{li} [(W_{(l)} F_0) + \langle \hat{\Psi}_{(l)} F_1 \rangle], \qquad i = 1, 2, \ldots . \tag{23}$$

Теорема 5. *Довільну узагальнену вектор-функцію* $F \in D'(S)$ *можна розвинути в ряд Фур'є за системою* $\{\psi_{(k)}(y)\}_{k=1}^\infty$ *розв'язків рівняння* $A_s \psi = 0$, *збіжний у* $D'(S)$.

Доведення. Запишемо формальне розвинення узагальненої вектор-функції $F \in D'(S)$ у ряд Фур'є за системою $\{\psi_{(k)}(y)\}_{k=1}^\infty$;

$$F = \sum_{k=1}^\infty F_{(k)} \psi_{(k)}(x),$$

де $F_{(k)} = \langle \psi_{(k)}, F \rangle$ — коефіцієнти Фур'є узагальненої вектор-функції F. Відомо, що для збіжності цього розвинення до F у $D'(S)$ досить довести збіжність числового ряду $\sum_{k=1} F_{(k)} \varphi_{(k)}$ для довільної $\varphi \in D(S)$, де $\varphi_{(k)} = \int_S \psi'_{(k)} \varphi \, dS$ — коефіцієнти розвинення φ за системою $\{\psi_{(k)}(y)\}_{k=1}^{\infty}$.

За теоремою 3 існують такі натуральне число k і вектор-функція $f \in L_2(S)$, що

$$\langle \varphi, F \rangle = \sum_{j=1}^{m} \int_S ((\lambda - A_S)^{k/(2m)} \varphi(y))' f(y) \, dS, \qquad \varphi \in D(S).$$

Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{(k)} F_{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{(k)} \langle \psi_{(k)}, F \rangle =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{(k)} \int_S ((\lambda - A_S)^{k/(2m)} \psi_k(y))' f(y) \, dS.$$

Нехай q, l — цілі невід'ємні числа такі, що $k = 2mq - l$. Для довільної $\varphi \in D(S)$ вектор-функція

$$(\lambda - A_S)^{-l/(2m)} \psi(y) = \int_S \omega_{S, l/(2m)}(y, z, \lambda) \, \psi(z) \, dS \in L_2(S),$$

якщо $n - 1 - l < \dfrac{n-1}{2}$, тобто $l > \dfrac{n-1}{2}$, згідно з оцінками (19) для фундаментальної функції $\omega_{S, l/(2m)}(y, z, \lambda)$. Тоді

$$(\lambda - A_S)^{k/(2m)} \psi_{(k)}(y) = (\lambda - A_S)^{-l/(2m)} (\lambda - A_S)^q \psi_{(k)}(y) =$$

$$= \lambda^q (\lambda - A_S)^{-l/(2m)} \psi_{(k)},$$

а вектор-функція

$$\tilde{f}(z) = \lambda^q \int_S \omega_{S, l/(2m)}(y, z, \lambda) \, f(y) \, dS_y \in L_2(S).$$

Отже,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{(k)} F_{(k)} = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{(k)} \int_S ((\lambda - A_S)^{-l/(2m)} \psi_{(k)}(y))' f(y) \, dS =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{(k)} \int_S \left(\int_S \omega_{S, l/(2m)}(y, z, \lambda) \, \psi_{(k)}(z) \, dS \right)' f(y) \, dS =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{(k)} \int_S \psi'_{(k)}(z) \left(\int_S \omega_{S, l/(2m)}(y, z, \lambda) \, f(y) dS \right) dS = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{(k)} \tilde{f}_{(k)} \le$$

$$\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{(k)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_{(k)}^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Розглянемо послідовність $u^{(N)}(x)$:

$$(\varphi, u^{(N)}) = \left(\int_{\Omega} \varphi(x) \, \omega(x, y) \, dx, \; F_0 \right) +$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\left\langle\int_{\Omega}\varphi(x)\,\hat{T}_j(y,D)\,\omega(x,y)\,dx,\ F_{1j}\right\rangle -$$

$$-\int_{\Omega}\varphi(x)\left\langle\hat{B}(y,D)\,\omega(x,y),\ \sum_{i=1}^{N}F_{2(i)}\,\psi_{(i)}(y)\right\rangle dx,\qquad \varphi\in D(\overline{\Omega}),\tag{24}$$

де $F_{2(i)}$ визначені згідно з формулою (23).

Враховуючи формулу (3) розв'язку задачі (1), маємо

$$(\varphi,u^{(N)}-u)=$$

$$=\left\langle\int_{\Omega}\varphi(x)\,\hat{B}(y,D)\,\omega(x,y)\,dx,\ \sum_{i=1}^{N}F_{2(i)}\,\psi_{(i)}(y)-F_2\right\rangle,\qquad \varphi\in D(\overline{\Omega}).$$

Оскільки

$$g(y)=\int_{\Omega}\varphi(x)\,\hat{B}(y,D)\,\omega(x,y)\,dx\ \in\ D(S)$$

для довільної $\varphi\in D(\overline{\Omega})$, то за теоремою 5

$$\lim_{N\to\infty}\left\langle g(y),\ \sum_{i=1}^{n}F_{2(i)}\,\psi_{(i)}-F\right\rangle=0,$$

а отже, $(\varphi,u^{(N)}-u)\to 0$ при $N\to\infty$ для довільної $\varphi\in D(\overline{\Omega})$.

Якщо $F_0=0$, то визначена послідовність

$$u^{(N)}(x)=\sum_{j=1}^{m}\langle\hat{T}_j(y,D)\,\omega(x,y),F_{1j}\rangle -$$

$$-\sum_{i=1}^{N}F_{2(i)}\int_{S}(\hat{B}(y,D)\,\omega(x,y))'\,\psi_{(i)}(y)\,dS,\qquad x\in\Omega.\tag{25}$$

Оскільки $\hat{B}(y,D)\,\omega(x,y)\in D(S)$ для довільної точки $x\in\Omega$, то за теоремою 5

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}F_{2(i)}\int_{S}(\hat{B}(y,D)\,\omega(x,y))'\,\psi_{(i)}(y)\,dS=\langle\hat{B}(y,D)\,\omega(x,y),\ F_2\rangle,$$

де F_2 — узагальнена вектор-функція з коефіцієнтами Фур'є $F_{2(i)}$. А тоді за теоремою 1 послідовність (25) збігається у кожній точці до розв'язку $u(x)$ задачі (1) при $F_0=0$, при цьому

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{S_\varepsilon}\varphi(x_\varepsilon)\,T_j\,u(x_\varepsilon)\,dS=\langle\varphi,F_2\rangle,\qquad \varphi\in D(S).$$

Отже, доведено таку теорему.

Теорема 6. *Нехай* $F_0\in D'(\overline{\Omega})$, $F_{11},\ldots,F_{1m}\in D'(S)$ *і задовольняють умову* (14). *Послідовність* $u^{(N)}(x)$, *визначена за формулою* (24), *наближає розв'язок задачі* (1) *у просторі* $D'(\overline{\Omega})$. *Якщо* $F_0=0$, *то послідовність* (25) *збігається у кожній точці області* Ω *до розв'язку* $u(x)$ *задачі* (1) *при* $F_0==0$, *при цьому послідовність*

$$g^N(x) = \sum_{i=1}^{N} F_{2(i)} \int_S (\hat{B}(y, D)\,\omega(x, y))'\,\psi_{(i)}(y)\,dS$$

наближає у $D'(S)$ *узагальнені граничні значення вектор-функції* $\begin{pmatrix} T_1 u(x) \\ \vdots \\ T_m u(x) \end{pmatrix}$.

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Е.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
2. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г., Ройтберг Я. А.* Теоремы о гомеоморфизмах и локальное повышение гладкости вплоть до границы решений эллиптических уравнений // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 4. – С. 745–748.
3. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи с неоднородными граничными условиями и локальное повышение гладкости вплоть до границы обобщенных решений // Там же. – 1964. – **157**, № 4. – С. 798–801.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1965. – 798 с.
5. *Ройтберг Я. А.* Эллиптические задачи в обобщенных функциях. I–IV. – Чернигов: Чернигов. пед. ин-т, 1990, 1991 (Англ. перевод: Roitberg Ya. Elliptic boundary value problems in the spaces of distributions. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. publ., 1996. – 427 p.
6. *Мех И. Я.* О фундаментальных решениях эллиптических операторов // Докл. АН УССР. – 1991. – № 5. – С. 14–18.
7. *Лопушанська Г. П.* Про один метод розв'язування крайових задач у просторах розподілів // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1991. – Вип. 36. – С. 28–33.
8. *Лопушанська Г. П.* Про один підхід до вивчення крайових задач у просторах розподілів і граничні інтегральні рівняння // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 5. – С. 632–639.
9. *Лопушанская Г. П.* О решении граничных задач для эллиптических систем в пространстве обобщенных функций // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 8. – С. 1401–1410.
10. *Гупало А. С., Лопушанская Г. П.* Об одном представлении решения обобщенной эллиптической граничной задачи // Там же. – 1987. – **23**, № 3. – С. 518–521.
11. *Лопушанська Г. П.* Про один наближений метод розв'язування задачі Діріхле // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 10. – С. 1417–1420.
12. *Ройтберг И. Я., Ройтберг Я. А.* Об аппроксимации решений эллиптических граничных задач линейными комбинациями фундаментальных решений // Докл. НАН Украины. – 1992. – № 12. – С. 15–20.
13. *Ивасишен С. Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач. – Киев: Выща шк., 1990. – 200 с.
14. *Интегральные* операторы в пространствах суммируемых функций / Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. – М.: Наука, 1966. – 499 с.

Одержано 21.10.96