УДК 517.946.9

Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
М. Х. Шхануков-Лафишев (Кабардино-Балкар. ун-т, Нальчик)

СТАБИЛИЗАЦИЯ ЗА КОНЕЧНОЕ ВРЕМЯ В ЗАДАЧАХ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We obtain estimate for time of stabilization of solutions of problems with free boundary for one-dimensional quasilinear parabolic equations.

Одержано оцінки для часу стабілізації розв'язків задач з вільною межею для одновимірних квазілінійних параболічних рівнянь.

Хорошо известно, что решения линейных параболических уравнений в неограниченной или полуограниченной области не локализованы и их стабилизация к предельным стационарным решениям осуществляется за бесконечное время. А квазилинейные уравнения вида [1, 2] $\operatorname{div}\left(\psi(u)\operatorname{grad} u\right) - u_t = f(u)$ при выполнении условия [3, 4]

$$\int\limits_0^1 \left(\int\limits_0^u \psi(v)\, f(v)\, dv \right)^{-1/2} \psi(u)\, du \; < \; \infty$$

могут иметь решения с конечным носителем $\operatorname{supp} u < \infty$ и этот носитель может исчезать за конечное время — $\operatorname{supp} u \equiv 0$ при $t > T$. Такие качественно новые эффекты пространственно-временной локализации наблюдаются в реальных явлениях теплопроводности с поглощением и диффузии с реакцией, когда возмущения четко локализованы в некоторой ограниченной области $\Omega(t)$ и при определенных условиях исчезают за конечное время T. Область $\Omega(t)$, в которой необходимо рассматривать приведенное выше квазилинейное уравнение, ограничена известной поверхностью $S(t)$ и неизвестной — $\Gamma(t)$ $(\partial\Omega = S(t) \bigcup \Gamma(t))$. Последняя должна быть определена вместе с решением дифференциального уравнения по дополнительному краевому условию на ней.

Для приложений очень важным является исследование динамики области $\Omega(t)$ и времени стабилизации T. В данной работе мы установим оценки времени стабилизации решений одномерных задач, когда искомая функция зависит от одной пространственной координаты и времени, а свободная граница вырождается в точку $x = s(t)$. В этом случае для определения пары функций $u(x, t)$, $x_0 < x < s(t)$, и $s = s(t)$, $t > 0$, получаем следующую задачу со свободной границей для одномерного эволюционного уравнения:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^{n-1}} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^{n-1} \psi(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - f(u), \quad x_0 < x < s(t), \quad t > 0, \\
u(x, 0) = u_0(x), \quad x_0 \le x \le s(0), \\
\psi(u) \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha u = -\varphi(t), \quad x = x_0, \quad t > 0, \\
u = 0, \quad \psi(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = s(t), \quad t > 0,
\end{gathered} \tag{1}$$

где $n = 1, 2, 3$ соответственно при плоской, цилиндрической и сферической симметрии; x — расстояние от плоскости, оси или точки; $x_0 = 0$ при $n = 1$ и отлично от нуля при $n = 2, 3$.

Представляет интерес эволюция пространственно-локализованного начального распределения $u(x,0) = u_0(x)$, когда $\varphi(t) = 0$, $t \geq 0$. В качестве $u(x,0)$ может быть принято точное пространственно-локализованное решение соответствующей (1) стационарной задачи при $n = 1$ и заданных функциональных зависимостях $\psi(u) = u^{\sigma}$, $f(u) = u^{\beta}$, $\sigma > 0$, $\beta < 1 + \sigma$, $\varphi(t) = \varphi = \text{const}$. Оно имеет вид [5]

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} u\left(1 - \dfrac{x}{s}\right)^{2/(1+\sigma-\beta)}, & 0 < x < s, \ s = s(0); \\ 0, & x \geq s, \end{cases} \tag{2}$$

где

$$s = \frac{\sqrt{2(1+\sigma+\beta)}}{1+\sigma-\beta}\,\overline{u}^{(1+\sigma-\beta)/2},$$

а $\overline{u}$ — положительный корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{1+\sigma-\beta}}\,\overline{u}^{(1+\sigma+\beta)/2} + \alpha\overline{u} - \varphi = 0.$$

1. Случай плоского источника. Положим в уравнении (1) $n = 1$, $\psi(u) = u^{\sigma}$, $\varphi(t) = 0$, $x_0 = 0$. Тогда получим задачу

$$u_t = (u^{\sigma} u_x)_x - f(u), \quad 0 < x < s(t), \quad t > 0, \tag{3}$$

$$u^{\sigma} u_x = \alpha u, \quad x = 0,$$

$$u = u^{\sigma} u_x = 0, \quad x = s(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x).$$

Умножим уравнение (3) скалярно на $(u^{1+\sigma})_t$:

$$(u_t, (u^{1+\sigma})_t) - ((u^{\sigma} u_x)_x, (u^{1+\sigma})_t) + (f(u), (u^{1+\sigma})_t) = 0, \tag{5}$$

где $(u, v) = \int_0^{s(t)} uv\,dx$, $(u,u) = \|u\|_0^2$.

Преобразуем каждый из полученных интегралов. Для первого из них получаем

$$\int_0^{s(t)} u_t (u^{1+\sigma})_t\,dx = (1+\sigma)\int_0^{s(t)} u_t^2 u^{\sigma}\,dx = (1+\sigma)\|u_t u^{\sigma/2}\|_0^2.$$

Интегрируя по частям во втором интеграле с учетом граничных условий (4), имеем

$$\int_0^{s(t)} (u^{\sigma} u_x)_x (u^{1+\sigma})_t\,dx =$$

$$= (1+\sigma)^{-1}\left[(u^{1+\sigma})_x (u^{1+\sigma})_t \Big|_0^{s(t)} - \int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x (u^{1+\sigma})_{xt}\,dx \right] =$$

$$= -\frac{\alpha(1+\sigma)}{2+\sigma}[u^{2+\sigma}(0,t)]_t - \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2.$$

Подставляя полученные выражения в тождество (5), находим

$$(1+\sigma)\,\|u_t u^{\sigma/2}\|_0^2 + \left(f(u),(u^{1+\sigma})_t\right) +$$

$$+\ \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\left[\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2 + \frac{2\alpha(1+\sigma)^2}{2+\sigma}u^{2+\sigma}(0,t)\right] = 0. \qquad (6)$$

Используя дифференциальное уравнение (3), преобразуем сумму первых двух слагаемых тождества (6):

$$(1+\sigma)\,\|u_t u^{\sigma/2}\|_0^2 + \left(f(u),(u^{1+\sigma})_t\right) =$$

$$= (1+\sigma)\int_0^{s(t)} u_t^2 u^\sigma\,dx + \int_0^{s(t)} f(u)(u^{1+\sigma})_t\,dx =$$

$$= (1+\sigma)\int_0^{s(t)} \left[(1+\sigma)^{-1}(u^{1+\sigma})_{xx} - f(u)\right]^2 dx +$$

$$+\ (1+\sigma)\int_0^{s(t)} f(u)u^\sigma\left[(1+\sigma)^{-1}(u^{1+\sigma})_{xx} - f(u)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx}^2 u^\sigma\,dx - \int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx} f(u)u^\sigma\,dx =$$

$$= \frac{1}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx}^2 u^\sigma\,dx + \alpha(1+\sigma)\,u^{1+\sigma}(0,t)\,f\left(u(0,t)\right) +$$

$$+\ \frac{1}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2 f'_u\,dx + \frac{\sigma}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2\frac{f(u)}{u}\,dx. \qquad (7)$$

Из физического смысла задачи следует, что $f(u)$ монотонно возрастает, $f(u) \geq 0$, $f(0) = 0$, а $g(u) = f'_u$ — монотонно убывающая функция.

Подставляя (7) в тождество (6), имеем

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\left[\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2 + \overline{\alpha}u^{2+\sigma}(0,t)\right] + \alpha(1+\sigma)\,u^{1+\sigma}(0,t)\,f\left(u(0,t)\right) +$$

$$+\ \frac{1}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2\,g(u)\,dx + \frac{\sigma}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_x^2\frac{f(u)}{u}\,dx \leq 0. \qquad (8)$$

Интегралы, входящие в неравенство (8), вообще говоря, несобственные, так как в силу граничных условий на фронте волны $x = s(t)$ имеем $u = 0$, $f(u) = 0$, $g(u) = \infty$. Поэтому, чтобы последние два интеграла имели смысл, достаточно потребовать выполнения условий

$$f(u)\left(u^\sigma u_x\right)^2 = O(u), \qquad \left(u^\sigma u_x\right)^2 g(u) = O(1) \quad \text{при} \quad x \to s(t). \qquad (9)$$

Следовательно, наши рассуждения справедливы в классе функций, определяемых соотношениями (9).

Рассмотрим некоторые частные случаи задачи (3), (4).

1.1. $\boldsymbol{\alpha = 0}$, $\boldsymbol{\sigma = 0}$. В этом случае из неравенства (8) имеем

$$\frac{d}{dt}\|u_x\|_0^2 + 2\int_0^{s(t)} u_x^2\, g(u)\, dx \le 0. \tag{10}$$

Так как $u(x,t) \le \sqrt{s}\,\|u_x\|_0$, $s = s(0)$, то $g(u) \ge g(\sqrt{s}\,\|u_x\|_0)$. Поэтому

$$\int_0^{s(t)} u_x^2\, g(u)\, dx \ge g(\sqrt{x}\,\|u_x\|_0)\,\|u_x\|_0^2. \tag{11}$$

Подставляя (11) в (10), получаем

$$\frac{d}{dt}\|u_x\|_0^2 + 2g(\sqrt{s}\,\|u_x\|_0)\,\|u_x\|_0^2 \le 0,$$

или

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2g(\sqrt{sy})\,y \le 0, \qquad y(t) = \|u_x\|_0^2. \tag{12}$$

Для времени стабилизации, т. е. того значения $t = T$, при котором $y(T) = 0$, из (12) находим

$$T \le \frac{1}{2}\int_0^{s(0)} \frac{dy}{g(\sqrt{sy})\,y} < \infty. \tag{13}$$

В частности, когда $f(u) = u^{\beta}$, $g(u) = f'_u = \beta u^{\beta-1}$,

$$g(\sqrt{sy}) = \frac{\beta}{s^{(1-\beta)/2}}\, y^{(\beta-1)/2}, \qquad g(\sqrt{sy})\,y = \frac{\beta}{s^{(1-\beta)/2}}\, y^{(\beta+1)/2}.$$

Тогда (13) принимает вид

$$T \le \frac{\nu}{2}\int_0^{y(0)} \frac{dy}{y^{(1+\beta)/2}} < \infty \quad \text{при} \quad \beta < 1, \quad \nu = \frac{s^{(1-\beta)/2}}{\beta}.$$

Используя начальное распределение (2), находим

$$y(0) = \frac{2\sqrt{2}}{(3+\beta)\sqrt{1+\beta}}\,\bar{u}^{(3+\beta)/2},$$

где $\bar{u}$ — положительный корень уравнения

$$\sqrt{\frac{2}{1-\beta}}\,\bar{u}^{(1+\beta)/2} - \varphi = 0.$$

Для определения времени стабилизации при этом получаем формулу

$$T \le \frac{2^{1-\beta}}{[(1-\beta)(3+\beta)]^{(1-\beta)/2}}\,\bar{u}^{1-\beta}.$$

1.2. $\boldsymbol{\alpha > 0,\ \sigma > 0,\ f(u) \ge c u^{\beta},\ c > 0}$ ***— некоторая постоянная величина.*** В этом случае для суммы первых двух слагаемых тождества (6) находим

$$(1+\sigma)\,\|u_t u^{\sigma/2}\|_0^2 + \left(f(u), (u^{1+\sigma})_t\right) =$$

$$= \frac{1}{1+\sigma}\int_0^{s(t)} (u^{1+\sigma})_{xx}^2\, u^{\sigma}\, dx + \alpha(1+\sigma)\, u^{1+\sigma}(0,t)\, f(u(0,t)) +$$

$$+\ \frac{1}{1+\sigma}\int_0^{s(t)}(u^{1+\sigma})_x^2 f_u'\,dx + \frac{\sigma}{1+\sigma}\int_0^{s(t)}(u^{1+\sigma})_x^2\frac{f(u)}{u}\,dx \ \geq$$

$$\geq\ \alpha(1+\sigma)\,u^{1+\sigma}(0,t)\,f(u(0,t)) + \frac{\sigma}{1+\sigma}\int_0^{s(t)}(u^{1+\sigma})_x^2\frac{f(u)}{u}\,dx \ \geq$$

$$\geq\ c\alpha(1+\sigma)\,u^{1+\sigma+\beta}(0,t) + \frac{c\sigma}{1+\sigma}\int_0^{s(t)}(u^{1+\sigma})_x^2\frac{1}{u^{1-\beta}}\,dx\,. \qquad (14)$$

Так как

$$[u^{1+\sigma}(x,t)]^2 \leq s\int_0^{s(t)}(u^{1+\sigma})_x^2\,dx,$$

то последний интеграл в соотношении (14) оценивается снизу следующим образом:

$$\int_0^{s(t)}(u^{1+\sigma})_x^2\frac{dx}{[(u^{1+\sigma})^2]^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}} \ \geq$$

$$\geq\ \frac{1}{s^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}}\left(\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2\right)^{(1+\beta+2\sigma)/2(1+\sigma)}. \qquad (15)$$

С помощью (14) и (15) из неравенства (8) получаем

$$\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\left[\|(u^{1+\sigma})_x\|_x^2 + \overline{\alpha}u^{2+\sigma}(0,t)\right] +$$

$$+\ \alpha(1+\sigma)c\,[u^{2+\sigma}(0,t)]^{(1+\sigma+\beta)/(2+\sigma)} + \nu\left(\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2\right)^{(1+\beta+2\sigma)/2(1+\sigma)} \geq 0, \qquad (16)$$

где

$$\nu = \frac{c\sigma}{1+\sigma}\frac{1}{s^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}}, \qquad \overline{\alpha} = \frac{2\alpha(1+\sigma)^2}{2+\sigma}.$$

Не нарушая общности, будем считать $0 \leq u \leq 1$. Такую нормировку можно ввести, если решение регулярно в рассматриваемой области $Q_T = \{(x,t):\ 0 < x < s(t),\ 0 < t \leq T\}$, разделив u на $u_0 = \max\limits_{Q_T} u$. Тогда выполняется неравенство

$$[u^{2+\sigma}(0,t)]^{(1+\beta+\sigma)/(2+\sigma)} \geq [u^{2+\sigma}(0,t)]^{(1+\beta+2\sigma)/2(1+\sigma)}, \qquad \beta \leq 1. \qquad (17)$$

С помощью (17) неравенство (16) перепишем в виде

$$\frac{d}{dt}\left[\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2 + \overline{\alpha}u^{2+\sigma}(0,t)\right] + \nu_1\left[\left(\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2\right)^{\kappa} + \overline{\alpha}\,(u^{2+\sigma}(0,t))^{\kappa}\right] \leq 0, \quad (18)$$

$$\kappa = \frac{1+\beta+\sigma}{2(1+\sigma)}, \qquad \nu_1 = \min\left\{\frac{2}{\alpha c},\ \frac{2c\sigma}{s^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}}\right\}.$$

Из (18) при $\overline{\alpha} \geq 1$ следует справедливость неравенства

$$\frac{d}{dt}\left[\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2 + \overline{\alpha}u^{2+\sigma}(0,t)\right] + \nu_1\left[\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2 + \overline{\alpha}\,u^{2+\sigma}(0,t)\right]^{\kappa} \leq 0, \quad (19)$$

$$\overline{\alpha} = \frac{2\alpha(1+\sigma)}{2+\sigma} \geq 1.$$

Из (18) видно, что при $\alpha = 0$ справедливо более простое неравенство

$$\frac{d}{dt}\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2 + \nu_1 \left(\|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2\right)^{\kappa} \le 0.$$

Из (19) следует такая оценка для времени стабилизации:

$$T \le \frac{1}{\nu_1}\int\limits_0^{y(0)} \frac{dy}{y^{\kappa}} < \infty, \quad \beta < 1, \quad \kappa < 1,$$

где

$$y(t) = \|(u^{1+\sigma})_x\|_0^2 + \overline{\alpha} u^{2+\sigma}(0,t), \qquad \overline{\alpha} = \frac{2\alpha(1+\sigma)^2}{2+\sigma}.$$

Как и выше, взяв за начальное распределение $u_0(x)$ решение (2) при $f(u) = u^{\beta}$, можно получить оценку для времени стабилизации через известные величины.

2. Случай цилиндрической симметрии. В этом случае задача (1) принимает вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - f(u), \quad x_0 < x < s(t), \quad t > 0,\\
u(x,0) = u_0(x), \quad x_0 < x < s(0),\\
u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=x_0} = 0, \quad x = x_0,\\
u = 0, \quad u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = s(t), \quad t > 0.
\end{gathered} \tag{20}$$

Умножим дифференциальное уравнение задачи (20) скалярно на $x(u^{1+\sigma})_t$:

$$\begin{gathered}
\left(\frac{\partial u}{\partial t}, x(u^{1+\sigma})_t\right) - ((x u^{\sigma} u_x)_x, (u^{1+\sigma})_t) + (f(u), x(u^{1+\sigma})_t) = 0,\\
(u,v) = \int\limits_0^{s(t)} uv\, dx.
\end{gathered} \tag{21}$$

Преобразуем с учетом граничных условий задачи (20) входящие в (21) интегралы таким образом:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, x(u^{1+\sigma})_t\right) = (1+\sigma)\|\sqrt{x}\, u_t u^{\sigma/2}\|_0^2,$$

$$((x u^{\sigma} u_x)_x, x(u^{1+\sigma})_t) = x u^{\sigma} u_x u^{1+\sigma}\Big|_{x_0}^{s(t)} - \int\limits_{x_0}^{s(t)} x u^{\sigma} u_x (u^{1+\sigma})_{xt}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\|\sqrt{x}\,(u^{1+\sigma/2})_x\|_0^2.$$

Подставляя полученные соотношения в тождество (21), находим

$$(1+\sigma)\|\sqrt{x}\,u_t u^{\sigma/2}\|_0^2 + (f(u), (u^{1+\sigma})_t) + \\ + \frac{1}{2(1+\sigma)}\frac{d}{dt}\|\sqrt{x}\,(u^{1+\sigma})_x\|_0^2 = 0. \tag{22}$$

Сумму первых двух слагаемых тождества (22) преобразуем, используя уравнение (10):

$$(1+\sigma)\|u_t u^{\sigma/2}\|_0^2 + (f(u), (u^{1+\sigma})_t) = \\ = (1+\sigma)\int_{x_0}^{s(t)} \frac{1}{x}(xu^\sigma u_x)_x^2 u^\sigma\,dx - (1+\sigma)\int_{x_0}^{s(t)} (xu^\sigma u_x)_x f(u) u^\sigma\,dx. \tag{23}$$

Интегрируя по частям последний интеграл в (23), получаем

$$-(1+\sigma)\int_{x_0}^{s(t)} (xu^\sigma u_x)_x^2 f(u) u^\sigma\,dx = \\ = \frac{1}{1+\sigma}\int_{x_0}^{s(t)} x(u^{1+\sigma})_x^2 g(u)\,dx + \frac{\sigma}{1+\sigma}\int_{x_0}^{s(t)} x(u^{1+\sigma})_x^2 \frac{f(u)}{u}\,dx, \tag{24}$$

где $g(u) = f'_u$ — монотонно убывающая неотрицательная функция.

С помощью (23) и (24) из (22) находим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\sqrt{x}(u^{1+\sigma})_x\|_0^2 + \int_{x_0}^{s(t)} x(u^{1+\sigma})_x^2 g(u)\,dx + \sigma\int_{x_0}^{s(t)} x(u^{1+\sigma})_x^2 \frac{f(u)}{u}\,dx \le 0. \tag{25}$$

Рассмотрим частные случаи задачи (20).

2.1. $\boldsymbol{\sigma > 0}$. В этом случае из неравенства (25) получаем

$$\frac{d}{dt}\|\sqrt{x}\,u_x\|_0^2 + 2\int_{x_0}^{s(t)} xu_x^2 g(u)\,dx \le 0. \tag{26}$$

Так как $u(x,t) \le \sqrt{\dfrac{s}{x_0}}\|\sqrt{x}\,u_x\|_0$, $s = s(0)$, то $g(u) \ge g\left(\sqrt{\dfrac{s}{x_0}}\|\sqrt{x}\,u_x\|_0\right)$.

Отсюда следует

$$\int_{x_0}^{s(t)} xu_x^2 g(u)\,dx \ge \\ \ge \int_{x_0}^{s(t)} xu_x^2 g\left(\sqrt{\frac{s}{x_0}}\|\sqrt{x}\,u_x\|_0\right)dx = g\left(\sqrt{\frac{s}{x_0}}\|\sqrt{x}\,u_x\|_0\right)\|\sqrt{x}\,u_x\|_0^2. \tag{27}$$

Подставляя (27) в (26), имеем

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2g\left(\sqrt{\frac{s}{x_0}y}\right)y \le 0, \qquad y(t) = \|\sqrt{x}\,u_x\|_0^2.$$

Для времени стабилизации T получаем оценку

$$T \le \frac{1}{2}\int_0^{y(0)} \frac{dy}{g(\sqrt{(s/x_0)y})\,y} < \infty.$$

Таким образом, существование последнего интеграла является необходимым условием стабилизации решения рассматриваемой задачи.

В частности, когда $f(u) = u^{\beta}$, $g(u) = \beta u^{\beta-1}$, оценка для времени стабилизации будет такой:

$$T \le \nu \int_0^{y(0)} \frac{dy}{y^{(1+\beta)/2}} < \infty, \qquad \nu = \frac{(x_0/s)^{(1-\beta)/2}}{2\beta}, \quad 0<\beta<1.$$

2.2. $\boldsymbol{\sigma > 0,\ f(u) = cu^{\beta}}$. Равенство (23) в этом случае принимает вид

$$(1+\sigma)\|\sqrt{x}\,u_t\,u^{\sigma/2}\|_0^2 + c(u^{\beta}, xu^{1+\sigma})_t =$$

$$= (1+\sigma)\int_{x_0}^{s(t)} \frac{1}{x}u^{\sigma}(xu^{\sigma}u_z)_x^2\,dx - (1+\sigma)c\int_{x_0}^{s(t)}(xu^{\sigma}u_z)_x^2 u^{\beta+\sigma}\,dx =$$

$$= (1+\sigma)\int_{x_0}^{s(t)} \frac{1}{x}(xu^{\sigma}u_z)_x^2\,dx + \frac{\beta+\sigma}{1+\sigma}c\int_{x_0}^{s(t)} x(u^{1+\sigma})_x^2\,\frac{1}{u^{1-\beta}}\,dx. \tag{28}$$

Подставляя (28) в тождество (22), получаем

$$\frac{d}{dt}\|\sqrt{x}u_t\,u^{1+\sigma}\|_0^2 + 2(\beta+\sigma)c\int_{x_0}^{s(t)} x(u^{1+\sigma})_x^2\,\frac{dx}{u^{1-\beta}} \le 0. \tag{29}$$

Так как $(u^{1+\sigma})^2 \le \dfrac{s}{x_0}\|\sqrt{x}(u^{1+\sigma})_x\|_0^2$, то из (29) находим

$$\frac{d}{dt}\|\sqrt{x}(u^{1+\sigma})_x\|_0^2 + \nu\Big(\|\sqrt{x}(u^{1+\sigma})_x\|_0^2\Big)^{\kappa} \le 0, \tag{30}$$

где

$$\nu = 2c(\beta+\sigma)\left(\frac{x_0}{s}\right)^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}, \qquad \kappa = \frac{1+\beta+2\sigma}{2(1+\sigma)}.$$

Из дифференциального неравенства (30) получаем оценку для времени стабилизации T:

$$T \le \frac{1}{\nu}\int_0^{y(0)} \frac{dy}{y^{\kappa}} < \infty, \quad \text{если} \quad \kappa<1 \quad (\text{или, что то же, } \beta<1).$$

3. Случай сферической симметрии. В этом случае рассмотрим задачу

$$\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x}\right) - f(u), \quad x_0 < x < s(t), \quad t>0,\\
u(x,0) = u_0(x), \quad x_0 \le x \le s(0),\\
u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = x_0, \quad t>0,\\
u = 0, \quad u^{\sigma}\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = s(t), \quad t>0.
\end{gathered} \tag{31}$$

Умножим уравнение (31) скалярно на $x^2(u^{1+\sigma})_t$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}, x^2 (u^{1+\sigma})_t\right) - ((x^2 u^\sigma u_x)_x, (u^{1+\sigma})_t) + (f(u), x^2 (u^{1+\sigma})_t) = 0. \tag{32}$$

Как и выше, для интегралов, входящих в тождество (32), получаем

$$(u_t, x^2 (u^{1+\sigma})_t) = (1+\sigma) \|u_t u^{\sigma/2} x\|_0^2,$$

$$\int\limits_{x_0}^{s(t)} (x^2 u^\sigma u_z)_x (u^{1+\sigma})_t \, dx = -\frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \|x (u^{1+\sigma})_x\|_0^2,$$

$$(1+\sigma) \int\limits_{x_0}^{s(t)} x^2 u^\sigma u_t^2 \, dx + \int\limits_{x_0}^{s(t)} x^2 f(u) (u^{1+\sigma})_t^2 \, dx =$$

$$= (1+\sigma) \int\limits_{x_0}^{s(t)} \frac{1}{x^2} u^\sigma (x^2 u^\sigma u_x)_x^2 \, dx - \int\limits_{x_0}^{s(t)} (x^2 (u^{1+\sigma})_x)_x \, dx +$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{s(t)} x^2 f(u) (u^{1+\sigma})_t \, dx =$$

$$= (1+\sigma) \int\limits_{x_0}^{s(t)} \frac{1}{x^2} u^\sigma (x^2 u^\sigma u_x)_x^2 \, dx + (1+\sigma) \int\limits_{x_0}^{s(t)} x^2 (u^{1+\sigma})_x g(x) \, dx +$$

$$+ \frac{\sigma}{1+\sigma} \int\limits_{x_0}^{s(t)} x^2 (u^{1+\sigma})_x^2 \frac{f(u)}{u} \, dx.$$

Подставляя полученные соотношения в тождество (32), получаем

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{x} (u^{1+\sigma})_x\|_0^2 + \int\limits_{x_0}^{s(t)} x^2 (u^{1+\sigma})_x^2 \, g(u) \, dx +$$

$$+ \sigma \int\limits_{x_0}^{s(t)} x^2 (u^{1+\sigma})_x^2 \frac{f(u)}{u} \, dx \le 0. \tag{33}$$

***3.1.* $\sigma = 0$.** В этом случае из (33) получаем

$$\frac{d}{dt} \|x u_x\|_0^2 + 2 \int\limits_{x_0}^{s(t)} x^2 u_x^2 \, g(u) \, dx \le 0. \tag{34}$$

Так как $u(x, t) \le \dfrac{\sqrt{s}}{x_0} \|x u_x\|_0$, то $g(u) \ge g\left(\dfrac{\sqrt{s}}{x_0} \|x u_x\|_0\right)$. Отсюда следует

$$\int\limits_{x_0}^{s(t)} x^2 u_x^2 \, g(u) \, dx \ge g\left(\frac{\sqrt{s}}{x_0} \|x u_x\|_0\right) \|x u_x\|_0^2. \tag{35}$$

Подставляя (35) в (34), находим

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2 g\left(\frac{\sqrt{sy}}{x_0}\right) y \le 0, \qquad y(t) = \|x u_x\|_0^2.$$

Отсюда получаем оценку для времени стабилизации:

$$T \leq \frac{1}{2} \int_0^{y(0)} \frac{dy}{g(\sqrt{sy}/x_0)\,y} < \infty, \tag{36}$$

т. е. для того, чтобы время стабилизации было конечным, необходимо, чтобы интеграл (36) был конечным.

3.2. $\boldsymbol{\sigma > 0,\ f(u) \geq c u^{\beta},\ 0 < \beta < 1.}$ В этом случае неравенство (33) принимает вид

$$\frac{1}{2(1+\sigma)} \frac{d}{dt} \| x (u^{1+\sigma})_x \|_0^2 + c \int_{x_0}^{s(t)} x^2 (u^{1+\sigma})_x^2 \, (u^{\beta+\sigma})_x \, dx \leq 0 .$$

Так как

$$\int_{x_0}^{s(t)} x^2 (u^{1+\sigma})_x^2 (u^{\beta+\sigma})_x \, dx = \frac{\beta+\sigma}{1+\sigma} \int_{x_0}^{s(t)} x^2 (u^{1+\sigma})_x^2 \frac{dx}{[(u^{1+\sigma})^2]^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}} \geq$$

$$\geq \frac{\beta+\sigma}{1+\sigma} \left(\frac{x_0^2}{s} \right)^{(1-\beta)/2(1+\sigma)} \left(\| x (u^{1+\sigma})_x \|_0^2 \right)^{\kappa}, \quad \kappa = \frac{1+\beta+2\sigma}{2(1+\sigma)},$$

то

$$\frac{d}{dt} \| x (u^{1+\sigma})_x \|_0^2 + \nu \| x (u^{1+\sigma})_x \|_0^2 \leq 0, \tag{37}$$

где $\nu = 2c(\beta+\sigma) \left(\dfrac{x_0^2}{s} \right)^{(1-\beta)/2(1+\sigma)}$.

Из неравенства (37) следует справедливость оценки для времени стабилизации

$$T \leq \frac{1}{\nu} \int_0^{y(0)} \frac{dy}{y^{\kappa}}, \quad \text{где} \quad \kappa = \frac{1+\beta+2\sigma}{2(1+\sigma)} < 1 \quad (\text{или, что то же, } \beta < 1).$$

1. *Митропольский Ю. А., Березовский А. А., Шхануков М. Х.* Пространственно-временная локализация в задачах со свободными границами для нелинейного уравнения второго порядка // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 202–211.
2. *Березовский А. А.* Классические и специальные постановки задач Стефана // Нестационарные задачи Стефана. – Киев, 1988. – С. 3–20. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 88.49).
3. *Мартинсон Л. К.* О конечной скорости распространения тепловых возмущений в средах с постоянными коэффициентами теплопроводности // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1976. – **16**, № 5. – С. 1233–1241.
4. *Калашников А. С.* О характере распространения возмущений в задачах с поглощением // Там же. – 1974. – **14**, № 4. – С. 891–905.
5. *Березовский А. А.* Пространственная локализация криовоздействия на биологические ткани // Пространственная локализация в задачах Стефана. – Киев, 1987. – С. 3–12. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.60).
6. *Фридман А.* Вариационные принципы в задачах со свободными границами. – М.: Наука, 1990. – 536 с.

Получено 27.04.98