УДК 517.983.23

Р. В. Вершинин (Харьков. ун-т)

ВЛОЖЕНИЕ ОБРАЗОВ ОПЕРАТОРОВ И РЕФЛЕКСИВНОСТЬ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

We establish a criterion of the reflexivity of separable Banach space in terms of the relations between the imbedding of images, the factorization, and the majorization of operators acting in this space.

Встановлено критерій рефлексивності сепарабельного банахового простору у термінах зв'язку між вкладенням образів, факторизацією та мажоризацією операторів, що діють у цьому просторі.

Пусть A и B — линейные непрерывные операторы, действующие в банаховом пространстве X. Нас будет интересовать связь между следующими условиями:

1) $B = AC$ для некоторого линейного непрерывного оператора $C: X \to X$;
2) $\| B^* x^* \| \leq K \| A^* x^* \|$ для некоторого $K \geq 0$ и всех $x^* \in X^*$;
3) $\operatorname{Im} B \subset \operatorname{Im} A$, где $\operatorname{Im}(A) = A(x)$.

Если X — гильбертово пространство, то условия 1 – 3 эквивалентны [1]. Кроме того, в произвольном банаховом пространстве X верны импликации $1) \Rightarrow 2)$, $1) \Rightarrow 3)$, $3) \Rightarrow 2)$, однако, как показал В. Дуглас, импликация $3) \Rightarrow 1)$ не всегда выполняется [2]. В работе [2] поставлен вопрос: всегда ли выполняется $2) \Rightarrow 3)$?, а в примечании сообщается (без доказательства), что Р. Боулдин нашел пример, когда эта импликация неверна. Мы даем характеризацию сепарабельных банаховых пространств, в которых из условия 2 следует условие 3.

Теорема. *Если X — рефлексивное банахово пространство, то* $2) \Leftrightarrow 3)$. *Если X — сепарабельное нерефлексивное банахово пространство, то существуют ядерные операторы A и B, действующие в X, для которых условие* 2 *выполняется, а условия* 1 *и* 3 *— нет.*

Прежде всего заметим, что условие 2 эквивалентно вложению $\operatorname{Im} B^{**} \subset \operatorname{Im} A^{**}$. Действительно, как показано в [2], для линейных операторов D и E, действующих в банаховом пространстве Y, условие

$$\| Ey \| \leq K \| Dy \| \quad \text{для некоторого } K \text{ и всех } y \in Y,$$

эквивалентно вложению $\operatorname{Im} E^* \subset \operatorname{Im} D^*$. Осталось положить $Y = X^*$, $D = A^*$, $E = B^*$.

Лемма. *Пусть X — сепарабельное нерефлексивное банахово пространство. Тогда существуют $w^{**} \in X^{**}$ и биортогональная последовательность $\{x_n, x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X \times X^*$ такие, что бесконечная система линейных уравнений*

$$w^{**}\left(x_n^*\right) = x_n^*(x), \quad n = 1, 2, \ldots,$$

не удовлетворяется ни при каком $x \in X$.

Доказательство. Пространство X канонически вложим в X^{**} [3, с. 199] и будем считать X подпространством в X^{**}. Поскольку $X \neq X^{**}$, согласно лемме Ф. Рисса [3, с. 73], найдется $w^{**} \in X^{**}$, $\| w^{**} \| = 1$, такой, что

$$\| w^{**} - x \| \geq 2/3 \qquad \text{для каждого } x \in X.$$

Тогда, по определению нормы функционала в X^{**}, для каждого $x \in X$ найдется $y^* \in X^*$, $\| y^* \| = 1$, такой, что

$$| w^{**}(y^*) - y^*(x) | \geq 1/2.$$

Таким образом, если $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ — всюду плотное подмножество в X, то существуют функционалы $\{y_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$, $\|y_n^*\| = 1$ такие, что

$$\left|w^{**}(y_n^*) - y_n^*(y_n)\right| \geq 1/2, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Для произвольного $x \in X$ найдется номер n такой, что $\| x - y_n\| \leq 1/2$, поэтому

$$\left|w^{**}(y_n^*) - y_n^*(x)\right| \geq 1/4.$$

Другими словами,

$$w^{**} - x \notin \left([y_n^*]_{n=1}^{\infty}\right)^{\perp} \quad \text{для каждого } x \in X \tag{1}$$

(через $[x_n]_{n=1}^{\infty}$ обозначается замыкание линейной оболочки векторов x_n, $n = 1, 2, \ldots$).

Теперь ортогонализуем $\{ x_n \}$ методом А. Маркушевича [4, с. 43]: $Y = [y_n^*]_{n=1}^{\infty}$ — сепарабельное подпространство в X^*, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^{**}$ — тотальное множество над X^*, поэтому существует биортогональная система $\{x_n^*, x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^* \times X^{**}$ такая, что

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [y_n]_{n=1}^{\infty} = X$$

и

$$[x_n^*]_{n=1}^{\infty} = Y.$$

В силу (1)

$$w^{**} - x \notin \left([x_n^*]_{n=1}^{\infty}\right)^{\perp} \text{ для каждого } x \in X.$$

Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Если X рефлексивно, то $A = A^{**}$, $B = B^{**}$, поэтому условие 3 эквивалентно вложению $\operatorname{Im} B^{**} \subset \operatorname{Im} A^{**}$, которое, в силу сделанного выше замечания, эквивалентно условию 2.

Пусть теперь X нерефлексивно и сепарабельно. Поскольку из условия 1 всегда следует условие 3, достаточно найти операторы A и B, для которых

$$\operatorname{Im} B^{**} \subset \operatorname{Im} A^{**}, \ \operatorname{Im} B \not\subset \operatorname{Im} A.$$

Применим лемму, и пусть $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ – ω-линейно независимая последовательность в X (т. е. равенство $\sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n = 0$ влечет $a_n = 0$ для всех n) такая, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} \| y_n \| \| x_n^* \|$ сходятся. Тогда определены ядерные операторы

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n, \quad B = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes u_n,$$

где

$$u_n = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} w^{**}(x_i^*) y_i & \text{при } n = 1; \\ y_n & \text{при } n = 2, 3, \ldots . \end{cases}$$

Покажем, что $\operatorname{Im} B \not\subset \operatorname{Im} A$. Действительно, $B x_1 = u_1 \notin \operatorname{Im} A$: если бы для некоторого $u \in X$: $Au = u_1$, т. е. $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(u) y_n = u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} w^{**}(x_n) y_n$, то, в силу ω-линейной независимости $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$, мы имели бы $x_n^*(u) = w^{**}(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, что противоречило бы лемме.

Покажем, что $\operatorname{Im} B^{**} \subset \operatorname{Im} A^{**}$. Имеем

$$A^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n$$

(мы интерпретируем здесь функционалы x_n^* как элементы X^{***}),

$$B^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes u_n = D_1 + D_2,$$

где

$$D_1 = x_n^* \otimes \left(\sum_{n=1}^{\infty} w^{**}(x_n^*) y_n \right), D_2 = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^* \otimes y_n.$$

Зафиксируем произвольный $x^{**} \in X^{**}$. Тогда для вектора $u_1^{**} = x^{**}(x_1^*) w^{**}$ имеем $A u_1^{**} = D_1 x^{**}$, поэтому $\operatorname{Im} D_1 \subset \operatorname{Im} A$. Далее, пусть P — проектор в $[x_n^*]_{n=1}^{\infty}$ на $[x_n^*]_{n=2}^{\infty}$ параллельно x_1^*. Рассмотрим вектор $\hat{u}_2^{**} = P^* \hat{x}^{**}$, где $\hat{x}^{**}$ — ограничение функционала x^{**} на подпространство $[x_n^*]_{n=1}^{\infty}$. Тогда если $u_2^{**} \in X^{**}$ — любое расширение функционала $\hat{u}_2^{**}$, то

$$A^{**} u_2^{**} = \sum_{n=1}^{\infty} u_2^{**}(x_n^*) y_n = \sum_{n=1}^{\infty} P^* \hat{x}^{**}(x_n^*) y_n = \sum_{n=2}^{\infty} \hat{x}^{**}(x_n^*) y_n = D_2 x^{**},$$

поэтому $\operatorname{Im} D_2 \subset \operatorname{Im} A^{**}$.

Следовательно, $\operatorname{Im} B^{**} \subset \operatorname{Im} A^{**}$ и теорема доказана.

1. *Douglas R.G.* On majorization, factorization and range inclusion of operators in Hilbert space // Proc. Amer. Math. Soc. – 1966. – **17**, № 2. – P. 413 – 415.
2. *Embry M.R.* Factorization on operators in Banach space // Ibid. – 1973. – **38**, № 3. – P. 587 – 590.
3. *Люстерник Л.А., Соболев В.И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 520 с.
4. *Lindenstrauss I., Tzafriri L.* Classical Banach spaces I. – Berlin etc.: Springer, 1977. – 188 p.

Получено 04.11.96,
после доработки — 09.06.97