УДК 517 5

М. В. Костич (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО НАБЛИЖЕННЯ В МЕТРИЦІ L_q ФУНКЦІЙ З КЛАСІВ ВЕЙЛЯ – НАДЯ СУМАМИ ЗИГМУНДА

In the integral metric, estimates exact in order are found for deviations of the Zygmund linear means from functions belonging to theWeyl – Nagy classes.

Знайдено точні за порядком оцінки відхилень лінійних середніх Зигмунда від функцій з класів Вейля – Надя в інтегральній метриці.

Нехай L_q — множина 2π-періодичних функцій φ із скінченною нормою $\|\varphi\|_q$, де $\|\varphi\|_q = \left(\int_0^{2\pi}|\varphi(t)|^q\,dt\right)^{1/q}$ при $q \in [1,\infty)$; $W^r_{\beta,p}$ — клас 2π-періодичних функцій f, які зображуються у вигляді згорток

$$f(x) = c_0 + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} B^1_{r,\beta}(x-t)\varphi(t)\,dt := c_0 + \left(B^1_{r,\beta} * \varphi\right)(x),$$

де $c_0 \in \mathbb{R}$, $\|\varphi\|_p \le 1$, $\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\,dt = 0$, а $B^n_{r,\beta}(t) = \sum_{k=n}^{\infty}\frac{\cos(kt+\beta\pi/2)}{k^r}$, $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$; $Z^s_n(f;t)$ — суми Зигмунда сумовної 2π-періодичної функції f, які означаються таким чином:

$$Z^s_n = Z^s_n(f;t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(1 - (k/n)^s\right)\left(a_k(f)\cos kt + b_k(f)\sin kt\right),$$

де $s > 0$, $a_k(f)$ і $b_k(f)$ — коефіцієнти Фур'є функції f.

В роботі встановлено порядкові оцінки величин

$$E\left(W^r_{\beta,1}; Z^s_n\right) = \sup_{f \in W^r_{\beta,1}}\left\| f(\cdot) - Z^s_n(f;\cdot)\right\|_q, \tag{1}$$

де $q \in (1,\infty)$.

Далі під записом $A(n) = O(B(n))$ розуміємо, що існує така стала $c > 0$, що виконується нерівність $A(n) \le c(B(n))$, де $n \in \mathbb{N}$. Позначення $A(n) \asymp B(n)$ рівносильне тому, що $A(n) = O(B(n))$ і одночасно $B(n) = O(A(n))$.

Надалі для параметрів r і q будемо вимагати виконання нерівності $r > 1 - 1/q$, яка забезпечує вкладення $W^r_{\beta,1} \subset L_q$.

Теорема. *Нехай* $r > 0$, $\beta \in \mathbb{R}$, $s > 0$ *і* $q \in (1,\infty)$. *Тоді*

$$E\left(W^r_{\beta,1}; Z^s_n\right)_q \asymp \begin{cases} n^{-(r-1+1/q)}, & 1-\dfrac{1}{q} < r < s+1-\dfrac{1}{q}; \\ n^{-s}\ln^{1/q} n, & r = s+1-q^{-1}; \\ n^{-s}, & r > s+1-q^{-1}. \end{cases}$$

Доведення. Якщо $f \in W^r_{\beta,1}$, то

$$f(x) - Z^s_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(k(x-\tau)+\beta\pi/2)}{k^{r-s}} + B^n_{r,\beta}(\tau)\right)\varphi(\tau)\,d\tau,$$

де $\|\varphi\|_1 \le 1$, $\varphi \perp 1$ (див., наприклад, [1, с. 51], гл. 2.3).

Тому, використовуючи нерівність (4.1.1) із роботи [2, с. 71] маємо

$$E\left(W^r_{\beta,1}; Z^s_n\right)_q \le \frac{1}{\pi}\left\| \frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(k(\cdot)+\beta\pi/2)}{k^{r-s}} + B^n_{r,\beta}(\cdot)\right\|_q. \tag{2}$$

Нам будуть потрібні такі оцінки:

$$\| D_{k,\beta}(\cdot)\|_q = \left\|\frac{1}{2}\cos\beta\frac{\pi}{2} + \sum_{j=1}^{k}\cos(jt+\beta\pi/2)\right\|_q = O(k^{1-1/q}), \tag{3}$$

$$\left\|B^n_{r,\beta}(\cdot)\right\|_q = O(n^{-(r-1+1/q)}) \tag{4}$$

(див., наприклад, [3, с. 198–199], або [4, с.4]). Нехай $r \ne s+1-1/q$. Застосовуючи перетворення Абеля до першого доданку виразу, що знаходиться під знаком норми в правій частині співвідношення (2), і беручи до уваги (3) і (4), можна показати, що

$$\left\|\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(k(\cdot)+\beta\pi/2)}{k^{r-s}} + B^n_{r,\beta}(\cdot)\right\|_q = \begin{cases} O(n^{-s}), & r > s+1-1/q; \\ O\left(n^{-(r-1+1/q)}\right), & 1-1/q < r < s+1-1/q. \end{cases} \tag{5}$$

Розглянемо тепер випадок, коли $r = s+1-1/q$. Враховуючи, що

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin k(\cdot)}{k^{1-1/q}}\right\|_q = O(\ln^{1/q} n) \tag{6}$$

і

$$\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos k(\cdot)}{k^{1-1/q}}\right\|_q = O(\ln^{1/q} n) \tag{7}$$

(див., наприклад, [3, с.201]), а також (4), одержуємо

$$\left\|\frac{1}{n^s}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos(k\tau+\beta\pi/2)}{k^{1-1/q}} + B^n_{s+1-1/q,\beta}\right\|_q \le \frac{|\cos\beta\pi/2|}{n^s}\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos k\tau}{k^{1-1/q}}\right\|_q +$$

$$+ \frac{|\sin\beta\pi/2|}{n^s}\left\|\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\sin k\tau}{k^{1-1/q}}\right\|_q + \left\|B^n_{s+1-1/q,\beta}(\cdot)\right\|_q = |\cos\beta\pi/2|\, O\left(\frac{\ln^{1/q} n}{n^s}\right) +$$

$$+ |\sin\beta\pi/2|\, O\left(\frac{\ln^{1/q} n}{n^s}\right) + O\left(\frac{1}{n^s}\right). \tag{8}$$

Із співвідношень (5) – (8) випливають потрібні оцінки зверху величини $E\left(W^r_{\beta,1}; Z^s_n\right)_q$. Покажемо, що отримані оцінки є точними по порядку.

Насамперед відзначимо, що, як добре відомо, величини $E\left(W^r_{\beta,1}; Z^s_n\right)_q$ не можуть прямувати до нуля швидше, ніж $1/n^s$. Звідси випливає непокращуваність оцінки зверху величини (1) у випадку $r > s+1-1/q$, $\beta \in \mathbb{R}$.

При $1 - 1/q < r < s + 1 - 1/q$, $\beta \in \mathbb{R}$ розглянемо функцію $f_2 = B^1_{r,\beta} * \varphi_2 / \|\varphi_2\|_1$, де $\varphi_2(\tau) = \frac{1}{n^{1/q}} \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k\tau - \beta\pi/2)$. Оскільки $\|\varphi_2\|_1 \le 1$, то $f_2 \in W^r_{\beta,1}$. Можна довести, що $\left\| f_2(\cdot) - Z^s_n(f_2;\cdot)\right\|_q \ge c' n^{-(r-1+1/q)}$. Звідси випливає непокращуваність оцінки зверху величин $E\left(W^r_{\beta,1}; Z^s_n\right)_q$, при $1 - 1/q < r < s + 1 - 1/q$, $\beta \in \mathbb{R}$.

Аналогічні міркування дають змогу довести потрібну оцінку знизу величини $E\left(W^r_{\beta,1}; Z^s_n\right)_q$ і у випадку $r = s + 1 - 1/q$, $\beta \in \mathbb{R}$, якщо замість f_2 розглянути функцію $f_3 = B^1_{r,\beta} * \varphi_3 / \|\varphi_3\|_1$, де

$$\varphi_3(\tau) := (\ln n)^{-1-1/q} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\cos(k\tau - \beta\pi/2)}{k^{1/q}}.$$

Отже теорему доведено.

Зазначимо, що дана теорема частково узагальнює результати роботи [5]. В даній роботі в порівнянні з роботою [5] доводиться долати більшу кількість технічних труднощів, хоча методи доведення подібні.

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 262 с.
2. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
3. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 307 с.
4. *Костич М. В.* Наближення функцій з класів Вейля – Надя сумами Зигмунда і Рогозинського в рівномірній метриці. – Київ, 1997. – 34 с. – (Препринт / НАН України. Ін-т математики; 97.5).
5. *Камзолов А. И.* О приближении классов функций $\tilde{W}^{\alpha}_p(L)$ методом Фейера в пространствах $L_s[-\pi;\pi]$ //Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 3. – С. 343 – 349.

Одержано 25. 05. 98