УДК 517.9

А. Л. Лапшин (Киев. эконом. ун-т)

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ МАТРИЦА СЛУЧАЙНЫХ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ С МАРКОВСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

For dynamical systems which are described by systems of differential or difference equations dependent of a finite-valued Markov process, we suggest a new form of equations for moments of their random solving. We derive equations for a correlation matrix of random solutions.

Для динамічних систем, які описуються системами диференціальних або різницевих рівнянь, що залежать від скінченнозначного марковського процесу, запропоновано нову форму рівнянь для моментів випадкового їх розв'язку. Виведено рівняння для кореляційної матриці випадкових розв'язків.

В настоящей статье рассматриваются динамические системы с коэффициентами, зависящими от марковского конечнозначного процесса. В случае дискретного времени рассмотрена система линейных неоднородных разностных уравнений с коэффициентами, зависящими от однородной марковской цепи. Кроме того, рассмотрена система линейных неоднородных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от конечнозначного марковского процесса. Решена задача нахождения корреляционной матрицы случайных решений описанных систем.

1. Описание марковской цепи. Пусть ζ_n — конечнозначная марковская цепь, принимающая значения θ_k, $k = 1, \ldots, q$, с вероятностями

$$p_k(n) = P\{\zeta_n = \theta_k\}, \quad k = 1, \ldots, q; \ n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Предполагаем, что вероятности $p_k(n)$, $k = 1, \ldots, q$, удовлетворяют системе разностных моментных уравнений с постоянными коэффициентами

$$p_k(n+1) = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} p_s(n), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{1}$$

Неотрицательные коэффициенты π_{ks}, $k, s = 1, \ldots, q$, удовлетворяют известным условиям [1]

$$\pi_{ks} \geq 0, \quad \sum_{k=1}^{q} \pi_{ks} = 1, \quad k, s = 1, \ldots, q.$$

Систему уравнений (1) можно записать в векторной форме:

$$P(n+1) = \Pi P(n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2}$$

где

$$P(n) = \begin{pmatrix} p_1(n) \\ p_1(n) \\ \ldots \\ p_q(n) \end{pmatrix}, \quad \Pi = \begin{pmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \cdots & \pi_{1q} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \cdots & \pi_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{q1} & \pi_{q2} & \cdots & \pi_{qq} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (2) имеет вид

$$P(n) = \Pi^n P(0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Элементы матрицы Π^n обозначены $\pi_{ks}(n)$: $\Pi^n = \| \pi_{ks}(n) \|_{k,s=1}^{q}$.

Отметим, что справедливы равенства

$$\pi_{ks}(0)=\delta_{ks}, \quad \delta_{ks}=1,\ k=s; \quad \delta_{ks}=0,\ k\neq s; \quad \pi_{ks}\equiv\pi_{ks}(1), \quad k,s=1,\ldots,q;$$

$$\pi_{ks}(n+1) = \sum_{j=1}^{q}\pi_{kj}\pi_{js}(n) = \sum_{j=1}^{q}\pi_{kj}(n)\,\pi_{js}.$$

2. Частные плотности случайного решения системы линейных разностных уравнений. Рассматривается система линейных разностных уравнений с коэффициентами, зависящими от марковской цепи ζ_n:

$$X_{n+1} = A(\zeta_n)X_n + B(\zeta_n), \qquad n=0,1,2,\ldots. \tag{3}$$

Введем в рассмотрение частные плотности $f_{ks}(n,X)$ случайного решения X_n, определив их по формулам

$$P\{X\in\Delta,\ \zeta_n=\theta_k,\ \zeta_0=\theta_s\} = \int_{\Delta} f_{ks}(n,X)\,dX.$$

Здесь $\Delta\in E_m$, где E_m — m-мерное пространство переменных $(x_1,\ldots,x_q)=X^*$, $dX=dx_1\ldots dx_q$.

Плотность вероятности $f(n,X)$ случайного решения X_n может быть найдена по формуле

$$f(n,X) = \sum_{k,s=1}^{q} f_{ks}(n,X).$$

Аналогично вводим частные плотности $f_k(n,X)$, определенные по формулам

$$P\{X\in\Delta,\ \zeta_n=\theta_k\} = \int_{\Delta} f_k(n,X)\,dX, \quad k=1,\ldots,q.$$

Используем обозначения

$$A_k=A(\theta_k), \quad B_k=B(\theta_k), \quad k=1,\ldots,q.$$

Поскольку при $\zeta_n=\theta_j$ система уравнений (3) принимает вид

$$X_{n+1} = A_jX_n+B_j,$$

то частные плотности $f_{ks}(n,X)$ удовлетворяют системе функциональных уравнений

$$f_{ks}(n+1,X) = \sum_{j=1}^{q}\pi_{kj}\,f_{js}(n,A_j^{-1}(X-B_j))\left|\det A_j^{-1}\right|, \quad k,s=1,\ldots,q. \tag{4}$$

Аналогично, частные плотности

$$f_k(n,X) = \sum_{s=1}^{n} f_{ks}(n,X), \quad k,s=1,\ldots,q.$$

удовлетворяют системе линейных функциональных уравнений

$$f_k(n+1,X) = \sum_{j=1}^{q}\pi_{kj}\,f_j(n,A_j^{-1}(X-B_j))\left|\det A_j^{-1}\right|. \tag{5}$$

Систему уравнений (5) можно получить из системы уравнений (4), которая более детально описывает случайные решения системы (3), суммированием по индексу s.

Введем в рассмотрение частные моменты

$$M_{ks}(n) = \int_{E_n} X f_{ks}(n, X)\, dX, \quad M_k(n) = \int_{E_n} X f_k(n, X)\, dX, \quad k, s = 1, \ldots, q.$$

Умножим систему уравнений (4) на вектор X и проинтегрируем по всему пространству E_m. При этом получим систему векторных уравнений

$$M_{ks}(n+1) = \sum_{j=1}^{q} \pi_{kj}(A_j M_{js}(n) + B_j \pi_{js}(n) p_s(0)), \quad k, s = 1, \ldots, q, \tag{6}$$

так как справедливо равенство

$$\int_{E_m} f_{js}(n, X)\, dX = P\{\zeta_n = \theta_j, \zeta_0 = \theta_s\} = P\{\zeta_n = \theta_j \mid \zeta_0 = \theta_s\} \cdot P\{\zeta_0 = \theta_s\} =$$

$$= \pi_{js}(n)\, p_s(0), \quad j, s = 1, \ldots, q.$$

Если просуммируем систему уравнений (6) по индексу s, $s = 1, \ldots, q$, то получим известную ранее систему разностных уравнений [2]

$$M_k(n+1) = \sum_{j=1}^{q} \pi_{kj}(A_j M_j(n) + B_j p_j(n)), \tag{7}$$

поскольку справедливо равенство

$$\sum_{s=1}^{q} \pi_{js}(n)\, p_s(0) = p_j(n), \quad j = 1, \ldots, q; \; n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Решение системы уравнений (6) удовлетворяет начальным условиям

$$M_{ks} = 0, \quad k \neq s; \quad M_{kk}(0) = M_k(0) = \langle X_0, \xi_0 = \theta_k \rangle, \quad k, s = 1, \ldots, q.$$

Введем вторые частные моменты

$$D_{ks}(n) = \int_{E_m} XX^* f_{ks}(n, X)\, dX, \qquad D_k(n) = \int_{E_m} XX^* f_k(n, X)\, dX.$$

Умножим систему уравнений (4) на матрицу XX^* и проинтегрируем по всему пространству E_m. В результате получим систему разностных уравнений

$$D_{ks}(n+1) = \sum_{j=1}^{q} \pi_{kj}(A_j D_{js}(n) A_j^* + A_j M_{js}(n) B_j^* + B_j M_{js}^*(n) A_j^* + B_j B_j^* \pi_{js}(n)\, p_s(0)),$$

$$k, s = 1, \ldots, q. \tag{8}$$

Суммируя систему матричных уравнений (8) по индексу s, приходим к известной ранее системе линейных разностных уравнений [2]

$$D_k(n+1) = \sum_{j=1}^{q} \pi_{kj}(A_j D_j(n) A_j^* + A_j M_j(n) B_j^* + B_j M_j(n) A_j^* + B_j B_j^* p_j(n)), \tag{9}$$

$$k = 1, \ldots, q.$$

Начальные значения для системы уравнений (8) имеют вид

$$D_{ks}(0)=0, \quad k\neq s; \quad D_{kk}(0)=D_k(0)=\left\langle XX^*,\ \xi_0=\theta_k\right\rangle, \quad k,s=1,\ldots,q.$$

3. Нахождение корреляционной матрицы случайных решений системы разностных уравнений. Ищем решение системы уравнений (6) с начальными условиями

$$M_{kk}(0)=X_0p_k(0), \quad M_{ks}(0)=0, \quad s\neq k; \quad k,s=1,\ldots,q,$$

что соответствует начальному условию $X_0=X$ для системы разностных уравнений (3). Если введем обозначения

$$M_{ks}(n)=N_{ks}(n)p_s(0), \quad k,s=1,\ldots,q,$$

то для матриц $N_{ks}(n)$ будем иметь систему линейных матричных разностных уравнений

$$N_{ks}(n+1)=\sum_{j=1}^{q}\pi_{kj}\left(A_jN_{js}(n)+B_j\pi_{js}(n)\right), \quad k,s=1,\ldots,q;\ n=0,1,\ldots, \tag{10}$$

с начальными условиями

$$N_{ks}(0)=X_0, \quad s=k, \qquad N_{ks}(0)=0, \quad s\neq k.$$

Пусть найдено решение системы разностных уравнений (10). Это решение можно представить в виде

$$N_{ks}(n)=R_{ks}(n)X_0+S_{ks}(n), \qquad k,s=1,\ldots,q; \quad n=0,1,\ldots,$$

где матрицы $R_{ks}(n)$, $S_{ks}(n)$ не зависят от X_0 и удовлетворяют системам матричных разностных уравнений

$$R_{ks}(n+1)=\sum_{j=1}^{q}\pi_{kj}A_jR_{js}(n), \qquad S_{ks}(n+1)=\sum_{j=1}^{q}\pi_{kj}\left(A_jS_{kj}(n)+B_j\pi_{js}(n)\right),$$

$$k,s=1,\ldots,q; \quad n=0,1,\ldots,$$

с начальными условиями

$$R_{kk}(0)=E; \qquad R_{ks}(0)=0, \quad k\neq s; \qquad S_{ks}(0)=0, \quad k,s=1,\ldots,q.$$

Зная матрицы $R_{ks}(n)$, $S_{ks}(n)$, $k,s=1,\ldots,q$; $n=0,1,\ldots$, можно найти моменты случайного решения системы (3) с произвольным случайным начальным условием. Пусть заданы частные плотности $f_s(0,X)$, $s=1,\ldots,q$. Тогда

$$M_k(n)\equiv\langle X_n,\ \xi_n=\theta_k\rangle=\sum_{s=1}^{q}\int_{E_m}N_{ks}(n)f_s(0,X)\,dX=$$

$$=\sum_{s=1}^{q}\left(R_{ks}(n)M_s(0)+S_{ks}(n)p_s(0)\right), \qquad k=1,\ldots,q,$$

$$M(n)\equiv\langle X_n\rangle=\sum_{k=1}^{q}M_k(n)=\sum_{k,s=1}^{q}\left(R_{ks}(n)M_{ks}(0)+S_{ks}(n)p_s(0)\right).$$

Аналогично можно найти корреляционную матрицу

$$K(n, 0) \equiv \left\langle X_n X_0^* \right\rangle = \sum_{k,s=1}^{q} K_{k,s}(n, 0),$$

где

$$K_{ks}(n, 0) \equiv \left\langle X_n X_0^*, \zeta_n = \theta_k, \zeta_0 = \theta_s \right\rangle = \int_{E_m} N_{ks}(n) X^* f_s(0, X)\, dX =$$

$$= R_{ks}(n) D_s(0) + S_{ks}(n) M_s^*(0), \qquad k, s = 1, \ldots, q.$$

Таким образом, при произвольных начальных условиях можно найти корреляционную матрицу $K(n, 0) \equiv \left\langle X_n X_0^* \right\rangle$, что можно использовать для нахождения корреляционной матрицы стационарного решения неоднородной системы (3).

Приведем преобразованную систему разностных уравнений для нахождения матрицы $K(n, 0) \equiv \left\langle X_n X_0^* \right\rangle$. Из системы уравнений (10) находим систему уравнений

$$\int_{E_m} N_{ks}(n+1) X f_s(0, X)\, dX =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} \pi_{kj} \left(\int_{E_m} A_j N_{js}(n) X f_s(0, X)\, dX + B_j \pi_{js}(n) \int_{E_m} X f_s(0, X)\, dX \right),$$

которую можно переписать в виде

$$K_{ks}(n+1, 0) = \sum_{j=1}^{q} \pi_{kj} \left(K_{js}(n, 0) + B_j \pi_{js}(n) M_s(0) \right). \tag{11}$$

Введем обозначения

$$K_k(n, 0) = \sum_{s=1}^{q} K_{ks}(n, 0), \quad K(n, 0) = \sum_{k=1}^{q} K_k(n, 0).$$

Суммируя уравнения (11) по индексу s, находим систему разностных уравнений

$$K_k(n+1, 0) = \sum_{j=1}^{q} \pi_{kj} \left(K_j(n, 0) + B_j \sum_{s=1}^{q} \pi_{js}(n) M_s(0) \right), \qquad k = 1, \ldots, q, \tag{12}$$

решение которой удовлетворяет начальным условиям

$$K_k(0, 0) = \int_{E_m} X X^* f_k(0, X)\, dX = D_k(0), \qquad k = 1, \ldots, q.$$

4. Нахождение установившейся корреляционной матрицы случайных решений системы разностных уравнений. Особый интерес представляет корреляционная матрица $K(n, 0)$ при установившихся начальных значениях матриц $D_k(0)$ и векторов $M_k(0)$, $k = 1, \ldots, q$.

Предположим, что марковская цепь ζ_n, $n = 0, 1, \ldots$, является эргодической, т. е. независимо от начальных значений $p_k(0)$, $k = 1, \ldots, q$, существуют пределы $p_k = \lim\limits_{n\to\infty} p_k(n)$, $k = 1, \ldots, q$. Эти значения можно найти из системы уравнений

$$p_k = \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks} p_s, \quad \sum_{s=1}^{q} p_s = 1, \quad k = 1, \ldots, q.$$

Аналогично, предельные значения векторов $M_k = \lim\limits_{n\to\infty} M_k(n)$, $k = 1, \ldots, q$, находим из системы уравнений (7):

$$M_k = \sum_{j=1}^{q} \pi_{kj}(A_j M_j + B_j p_j), \quad k = 1, \ldots, q.$$

Предельные значения матриц $D_k = \lim\limits_{n\to\infty} D_k(n)$ находим из системы уравнений (9):

$$D_k = \sum_{j=1}^{q} \pi_{kj}(A_j D_j A_j^* + A_j M_j B_j^* + B_j M_j^* A_j^* + B_j B_j^* p_j).$$

Затем ищем решение системы уравнений вида (12) с начальными условиями $K_k(0, 0) = D_k$, $k = 1, \ldots, q$.

Установившееся значение корреляционной матрицы находится из формулы

$$K(n, 0) = \sum_{k=1}^{q} K_k(n, 0).$$

Эти результаты могут быть применены для исследования решений системы разностных уравнений

$$X_{n+1} = A(\zeta_n) X_n + B(\zeta_n) \eta_n,$$

где η_n — марковская цепь, не зависящая от ζ_n.

Рассмотрим случай системы линейных неоднородных дифференциальных уравнений с коэффициентами, зависящими от переключающего марковского процесса. Решим задачу нахождения корреляционной матрицы случайных решений описанной системы с непрерывным временем.

5. Конечнозначный марковский процесс. Пусть случайный процесс $\zeta(t)$ принимает значения $\eta_1, \ldots, \eta_q$ с вероятностями

$$p_k(t) = P\{\zeta(t) = \theta_k\}, \quad k = 1, \ldots, q,$$

которые удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = \sum_{s=1}^{q} \lambda_{ks} p_s(t), \quad k = 1, \ldots, q. \tag{13}$$

Коэффиценты λ_{ks}, $k = 1, \ldots, q$, удовлетворяют известным условиям [1]

$$\lambda_{kk} < 0, \quad \lambda_{ks} \geq 0, \quad k \neq s, \quad \sum_{k=1}^{q} \lambda_{ks} = 0.$$

Систему уравнений (13) можно записать в векторной форме

$$\frac{dP(t)}{dt} = \Lambda P(t), \tag{14}$$

где

$$P(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ \dots \\ P_q(t) \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11}\lambda_{12}\dots\lambda_{1q} \\ \lambda_{21}\lambda_{22}\dots\lambda_{2q} \\ \dots \\ \lambda_{q1}\lambda_{q2}\dots\lambda_{qq} \end{pmatrix}.$$

Решение системы (14) можно представить в виде

$$P(t) = \Pi(t)P(0), \quad \Pi(t) \equiv e^{\Lambda t},$$

где матрица $\Pi(t)$ удовлетворяет условиям

$$\Pi(t_1)\Pi(t_2) = \Pi(t_1 + t_2), \quad \Pi(0) = E, \quad \frac{d\Pi(t)}{dt} = \Lambda\Pi(t) = \Pi(t)\Lambda.$$

Далее полагаем $\Pi(t) = \|\pi_{ks}(t)\|_{k,s=1}^{q}$.

6. Частные плотности случайного решения системы дифференциальных уравнений. Рассматривается неоднородная система линейных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами, зависящими от случайного марковского конечнозначного процесса $\zeta(t)$:

$$\frac{dX(t)}{dt} = A(\zeta(t))X(t) + B(\zeta(t)). \tag{15}$$

В дальнейшем, для сокращения записи, полагаем

$$A_k = A(\theta k), \quad B_k = B(\theta k), \quad k = 1, \dots, q.$$

Пусть Δ — произвольная область в m-мерном пространстве E_m переменных $X = (x_1, \dots, x_m)^T$. Введем частные плотности $f_{ks}(t, X)$, определенные по формулам

$$P\{X(t) \in \Delta, \zeta(t) = \theta_k, \zeta(0) = \theta_s\} = \int\limits_{\Delta} f_{ks}(t, X)\,dX, \quad k, s = 1, \dots, q.$$

Отметим, что справедливы равенства

$$\int\limits_{E_m} f_{ks}(t, X)\,dX = P\{\zeta(t) = \theta_k, \zeta(0) = \theta_s\} =$$

$$= P\{\zeta(t) = \theta_k \mid \zeta(0) = \theta_s\} \cdot P\{\zeta(0) = \theta_s\} = \pi_{ks}(t)\,p_s(0).$$

Выведем систему дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют частные плотности $f_{ks}(t, X)$, $k, s = 1, \dots, q$. Дадим аргументу t бесконечно малое приращение $\Delta t = h > 0$. При $\zeta(t) = \theta_j$, $j = 1, \dots, q$, с вероятностями

$$\pi_{kj} = \delta_{kj} + h\lambda_{kj} + O(h^2), \quad k, j = 1, \dots, q,$$

случайный процесс $\zeta(t)$ переходит в состояние θ_k. При этом, согласно системе уравнений (15), имеем

$$X(t+h) = (E + hA_j)X(t) + hB.$$

Предполагая дифференцируемость функций $f_{ks}(t, X)$, получаем систему уравнений

$$f_{ks}(t+h, X) =$$

$$= \sum_{j=1}^{q} (\delta_{kj} + h\lambda_{kj}) f_{js}\big(t_1(E+hA_j)^{-1}(X-hB_j)\big) \det(E+hA_j)^{-1} + O(h^2), \quad k, s = 1, \ldots, q.$$

Разложим все выражения по степеням h и приравняем коэффициенты при h. При этом получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial f_{ks}(t, X)}{\partial t} = - \operatorname{div}\left(f_{ks}(t, X)(A_k X + B_k)\right) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} f_{js}(t, X), \quad k, s = 1, \ldots, q. \quad (16)$$

Аналогично можно ввести частные плотности вероятностей $f_k(t, X)$, $k = 1, \ldots, q$, определяемые формулами

$$P\{X(t) \in \Delta,\ \zeta(t) = \theta_k\} = \int_{\Delta} f_k(t, X)\, dX, \quad k = 1, \ldots, q.$$

Поскольку справедливо равенство

$$f_k(t, X) = \sum_{s=1}^{q} f_{ks}(t, X), \quad k = 1, \ldots, q,$$

то, суммируя систему уравнений (16) по индексу s, приходим к известной системе дифференциальных уравнений для частных плотностей $f_k(t, X)$ [2]:

$$\frac{\partial f_k(t, X)}{\partial t} = - \operatorname{div}\left(f_k(t, X)(A_k + B_k)\right) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} f_j(t, X), \quad k = 1, \ldots, q. \quad (17)$$

Отметим, что в системах уравнений (16), (17) используется обозначение

$$\operatorname{div}\left(f(t, X)(AX + B)\right) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_s}\left(f(t, X)\left(\sum_{j=1}^{m} a_{sj} x_j + b_s\right)\right).$$

7. Моментные уравнения. Чтобы найти математическое ожидание

$$M(t) = \langle X(t) \rangle = \int_{E_m} X f(t, X)\, dX, \quad f(t, X) = \sum_{k=1}^{q} f_k(t, X),$$

случайного решения $X(t)$ системы уравнений (15), введем частные моменты

$$M_{ks}(t) = \int_{E_m} X f_{ks}(t, X)\, dX, \quad M_k(t) = \int_{E_m} X f_k(t, X)\, dX, \quad k = 1, \ldots, q. \quad (18)$$

Если частные моменты найдены, то находим $M(t)$ по формулам

$$M(t) = \sum_{k=1}^{q} M_k(t) = \sum_{k,s=1}^{q} M_{ks}(t).$$

Умножим систему уравнений (16) на вектор X и проинтегрируем по всему пространству E_m. Используя формулу интегрирования по частям, получаем систему моментных уравнений

$$\frac{dM_{ks}(t)}{dt} = A_k M_{ks}(t) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} M_{js}(t) + \pi_{ks}(t)\, p_s(0)\, B_k, \quad k = 1, \ldots, q, \quad (19)$$

с начальными значениями

$$M_{ks}(0) = \delta_{ks} M_k(0), \quad k = 1, \dots, q.$$

Если просуммируем эту систему уравнений по индексу s, то получим известную систему моментных уравнений [2]

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = A_k M_k(t) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} M_j(t) + B_k p_k(t), \quad k = 1, \dots, q, \tag{20}$$

с начальными значениями

$$M_k(0) = \int_{E_m} X f_k(0, X)\, dX \equiv \langle X \mid \zeta(0) = \theta_k \rangle p_k(0), \quad k = 1, \dots, q.$$

Аналогично по формулам (18) введем частные моменты второго порядка, полагая

$$D_{ks}(t) = \int_{E_m} XX^* f_{ks}(t, X)\, dX, \quad D_k(t) = \int_{E_m} XX^* f_k(t, X)\, dX.$$

При этом справедливы формулы

$$D(t) \equiv \int_{E_m} XX^* f(t, x)\, dx = \sum_{k=1}^{q} D_k(t) \equiv \sum_{k,s=1}^{q} D_{ks}(t).$$

Умножим систему уравнений (16) на матрицу XX^* и проинтегрируем по всему пространству E_m. При этом получим систему матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{dD_{ks}(t)}{dt} = A_k D_{ks}(t) + D_{ks}(t) A_k^* + B_k M_{ks}^*(t) + M_{ks}(t) B_k^* + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} D_{js}(t),$$

$$k, s = 1, \dots, q, \tag{21}$$

с начальными значениями

$$D_{ks}(0) = \delta_{ks} D_k(0), \quad k, s = 1, \dots, q.$$

При суммировании системы уравнений (21) по индексу s получим известную ранее систему моментных уравнений [2]

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_k D_k(t) + D_k(t) A_k^* + B_k M_k^*(t) + M_k(t) B_k^* + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} D_j(t),$$

$$k = 1, \dots, q, \tag{22}$$

с начальными значениями

$$D_k(0) = \left\langle XX^* \mid \zeta(0) = \theta_k \right\rangle p_k(0) = \int_{E_m} XX^* f_k(0, X)\, dX, \quad k = 1, \dots, q.$$

8. Уравнения для корреляционной матрицы случайного решения системы дифференциальных уравнений. Рассмотрим систему уравнений (15) с начальным значением $X(0) = X$. Для нахождения частных моментов $M_{ks}(t)$ из системы уравнений (19) начальные условия имеют вид

$$M_{ks}(0) = X(0)\,\delta_{ks}p_s(0), \quad k = 1, \ldots, q.$$

Если ведем векторы $N_{ks}(t)$ такие, что

$$M_{ks}(t) = N_{ks}(t)\,p_s(0), \quad k, s = 1, \ldots, q,$$

то получим систему векторных уравнений

$$\frac{dN_{ks}(t)}{dt} = A_k N_{ks}(t) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} N_{js}(t) + \pi_{ks}(t) B_k, \quad k, s = 1, \ldots, q, \tag{23}$$

с начальными условиями

$$N_{ks}(0) = \delta_{ks} X(0), \quad k, s = 1, \ldots, q.$$

Если заданы начальные частные плотности $f_k(0, X)$, $k = 1, \ldots, q$, то можно найти корреляционную матрицу

$$K(t, 0) \equiv \left\langle X(t) X^*(0) \right\rangle = \sum_{k,s=1}^{q} K_{ks}(t, 0),$$

где

$$K_{ks}(t, 0) \equiv \int_{E_m} N_{ks}(t) X^* f_s(0, X)\, dX, \quad k = 1, \ldots, q,$$

Умножим уравнения системы (23) на $X^* f_s(0, X)$ и проинтегрируем по всему пространству E_m. В результате получим систему матричных дифференциальных уравнений

$$\frac{dK_{ks}(t, 0)}{dt} = A_k K_{ks}(t, 0) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} K_{js}(t, 0) + \pi_{ks}(t) B_k M_s^*(0), \quad k, s = 1, \ldots, q. \tag{24}$$

Введем обозначения

$$K_k(t, 0) = \sum_{s=1}^{q} K_{ks}(t, 0), \quad k = 1, \ldots, q.$$

Суммируя систему уравнений (24) по индексу s, получаем систему матричных уравнений

$$\frac{dK_k(t, 0)}{dt} = A_k K_k(t, 0) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} K_j(t, 0) + B_k \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks}(t) M_s^*(0), \quad k = 1, \ldots, q, \tag{25}$$

$$K_k(0, 0) = D_k(0), \quad k = 1, \ldots, q.$$

Если найдены матрицы $K_k(t, 0)$, то находим корреляционную матрицу

$$K(t, 0) = \sum_{k=1}^{q} K_k(t, 0).$$

Уравнения (25) позволяют найти корреляционную матрицу $K(t, 0) = \langle X(t) X^*(0) \rangle$ при произвольных начальных значениях с известным вероятностным распределением.

9. Установившаяся корреляционная матрица. Рассмотрим случай, когда случайный процесс $\zeta(t)$ является эргодическим, т. е. независимо от начальных значений $p_s(0)$, $s = 1, \ldots, q$, существуют пределы

$$p_k = \lim_{t \to +\infty} p_k(t), \qquad k = 1, \ldots, q.$$

Из системы уравнений (20) находим установившиеся значения первых частных моментов

$$M_k = \lim_{t \to +\infty} M_k(t), \qquad k = 1, \ldots, q,$$

определяемые системой линейных алгебраических уравнений

$$A_k M_k + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} M_j + B_k p_k = 0, \qquad k = 1, \ldots, q.$$

Из системы уравнений (22) находим предельные значения вторых частных моментов

$$D_k = \lim_{t \to +\infty} D_k(t), \qquad k = 1, \ldots, q,$$

которые удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений

$$A_k D_k + D_k A_k^* + B_k M_k^* + M_k B_k^* + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} D_j = 0, \qquad k = 1, \ldots, q.$$

Из системы уравнений (25) находим уравнение для определения установившейся корреляционной матрицы

$$\frac{dK_k(t,0)}{dt} = A_k K_k(t,0) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_{kj} K_j(t,0) + B_k \sum_{s=1}^{q} \pi_{ks}(t) M_s^*, \qquad k = 1, \ldots, q,$$

с начальными условиями

$$K_k(0,0) = D_k, \qquad k = 1, \ldots, q.$$

Установившаяся корреляционная матрица может быть использована для применения теории стационарных случайных процессов.

1. *Тихонов В. И., Миронов М. А.* Марковские процессы. – М.: Сов. радио, 1977. – 488 с.
2. *Валеев К. Г., Стрижак О. Л.* Метод моментных уравнений. – Киев, 1986. – 56 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т электродинамики; 467).

Получено 23.03.98