УДК 517.5

Б. Р. Михальчук (Нац. ун-т ім. Т. Шевченка, Київ)

ІНТЕРПОЛЯЦІЯ НЕЛІНІЙНИХ ФУНКЦІОНАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ІНТЕГРАЛЬНИХ ЛАНЦЮГОВИХ ДРОБІВ

We constructively prove a theorem on the existence of interpolation integral chain fraction for nonlinear functional $F\colon Q[0,1]\to\mathbf{R}^1$.

Конструктивно доведено теорему про існування інтерполяційного інтегрального ланцюгового дробу для нелінійного функціоналу $F\colon Q[0,1]\to\mathbf{R}^1$.

1. Вступ. Задача узагальнення класичної теорії інтерполяції привертала і привертає увагу багатьох математиків [1, 2]. Найбільш загальною є задача інтерполяції нелінійних операторів та функціоналів. В роботах П. І. Соболевського, Л. О. Яновича [3, 4] отримано найбільш завершені результати розв'язання задачі поліноміального інтерполювання нелінійних функціоналів в абстрактних просторах, коли кількість вузлів m пов'язана із степенем полінома n співвідношенням $m=n+1$. В основу цих результатів покладені властивості функціональних розділених різниць різних порядків. Такий підхід надав можливість отримати явний вигляд залишкового члена інтерполяційної формули. В. Л. Макаров та В. В. Хлобистов в [5] незалежно від згаданих авторів іншим шляхом отримали інтерполяційну формулу типу Ньютона та довели єдиність операторного многочлена типу Ньютона на „континуальних вузлах". В роботах [6, 7] побудовано основи теорії поліноміального інтерполювання нелінійних операторів у векторних просторах (без обмеження на n та m), де конструктивно доведено теорему про необхідні та достатні умови розв'язності задачі поліноміального інтерполювання. В роботі Х. Й. Кучмінської [8] побудовані інтерполяційні формули для наближеного зображення функцій з n аргументами. Результатів з інтерполяції інтегральними ланцюговими дробами (континуальний аналог ланцюгових дробів [9]), наскільки відомо нам, не існує. Метою даної роботи є конструктивне доведення існування інтерполяційного інтегрального ланцюгового дробу для нелінійних функціоналів.

2. Постановка задачі. Розглянемо клас інтегральних ланцюгових дробів (і. л. д.) вигляду

$$Q_m(x(\cdot)) = a_0 + \int_0^1 \cfrac{P_{m_1}(z_1;x(\cdot))\,dz_1}{1+\displaystyle\int_0^1 \cfrac{P_{m_2}(z_1,z_2;x(\cdot))\,dz_2}{1+\ddots+\displaystyle\int_0^1 \cfrac{P_{m_k}(z_1,z_2,\ldots,z_k;x(\cdot))\,dz_k}{1+\ddots+}}}\,, \tag{1}$$

який позначимо через Q_m. Тут $m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots$ — невід'ємні цілі числа; $m=\{m_1, m_2, \ldots, m_k, \ldots\}$ — мультиіндекс; $P_{m_k}(z_1,\ldots,z_k;x(\cdot))$ — функціональний поліном m_k-го степеня, що діє з $Q[0,1]$ у $Q[0,1]^k$ — простір кусково-неперервних функцій, визначених на гіперкубі $[0,1]\times[0,1]\times\ldots\times[0,1]$.

Через Q_i позначимо i-й підхідний дріб для (1):

$$Q_i(x(\cdot)) = a_0 + \int_0^1 \cfrac{P_{m_1}(z_1; x(\cdot))\,dz_1}{1+\int_0^1 \cfrac{P_{m_2}(z_1, z_2; x(\cdot))\,dz_2}{1+ \ddots + \int_0^1 P_{m_i}(z_1, z_2, \dots, z_i; x(\cdot))\,dz_i}} \qquad (2)$$

Дріб (2) отримується з (1), коли $m = \{m_1, \dots, m_i, 0, \dots\}$. Зауважимо, що при $m_2 = m_3 = \dots = m_i = 0$ скінченний і. л. д. (2) збігається з функціональним поліном m_1-го степеня.

Через Q_n позначимо клас і. л. д. вигляду (2), коли $m_1 = 1$, $m_2 = 1, \dots, m_n = 1$, тобто $m = n = \{1, 1, \dots, 1\}$. Задача функціонального інтерполювання полягає в тому, щоб у класі Q_n знайти такий і. л. д., що задовольняє умови

$$Q_n(x_i(\cdot)) = F(x_i(\cdot)), \qquad i = \overline{1, n}, \qquad (3)$$

де $F(x_i(\cdot))$, $i = \overline{1, n}$, — відомі значення деякого функціоналу в інтерполяційних вузлах-функціях.

3. Основні результати. Нехай

$$\bar{x}_0(z, \bar{\xi}^0) = 0, \qquad \bar{x}_1(z, \bar{\xi}^1) = H(z-\xi_1)x_1(z),$$

$$\bar{x}_2(z, \bar{\xi}^2) = H(z-\xi_1)x_1(z) + H(z-\xi_2)(x_2(z)-x_1(z)), \dots,$$

$$\bar{x}_i(z, \bar{\xi}^i) = \sum_{p=1}^{i} H(z-\xi_p)(x_p(z)-x_{p-1}(z)), \qquad i = \overline{1, n},$$

$$0 \le \xi_1 \le \dots \le \xi_n \le 1, \qquad \bar{\xi}^i = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i), \qquad \bar{\xi}^0 = 0,$$

де $H(z)$ — функція Хевісайда.

Позначимо через $\mathbf{Q}\left([0,1]; \bar{\beta}\right)$ множину вектор-функцій $\bar{x}(z) = \left\{x_p(z)\right\}_{p=0}^{n}$ таку, що для будь-якої $x_p(z) \in \mathbf{Q}\left([0,1]; \bar{\beta}\right)$ виконуються рівності

$$\max_{p=\overline{0,n}} \max_{z\in[0,1]} \left|x_p(z) - x_i(z)\right| = \beta_i, \qquad i = \overline{0, n}, \qquad \bar{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n).$$

Лема 1. *Нехай для і. л. д. вигляду*

$$Q_n(x(\cdot)) = K_0 + \int_0^1 \cfrac{K_1(z_1)\,x(z_1)\,dz_1}{1+\int_{z_1}^1 \cfrac{K_1(z_1, z_2)(x(z_2)-x_1(z_2)\,dz_2}{1+ \ddots + \int_{z_{n-1}}^1 K_n(z_1, \dots, z_n)(x(z_n)-x_{n-1}(z_n)\,dz_n}} \qquad (4)$$

виконані умови

$$\left|K_p(\bar{\xi}^p)\right| \le \alpha_p, \qquad p = \overline{1, n}, \qquad \forall\, \bar{\xi}^p \in \overline{\Omega}_p = \underbrace{[0,1]\times\dots\times[0,1]}_{p},$$

$$\{x_p(z)\}_{p=0}^{n} \in \mathbf{Q}\Big([0,1];\bar{\beta}\Big),$$

причому

$$1-\cfrac{\alpha_k\beta_{k-1}}{1-\cfrac{\alpha_{k+1}\beta_k}{1-\cfrac{\ddots}{-\alpha_n\beta_{n-1}}}} > 0 \qquad \forall\, k=n, n-1, \ldots, 2. \tag{5}$$

Тоді мають місце співвідношення

$$Q_p\Big(\bar{x}_k(\cdot,\bar{\xi}^k)\Big) = Q_k\Big(\bar{x}_k(\cdot,\bar{\xi}^k)\Big) \qquad \forall\, k\le p \tag{6}$$

при кусково-неперервних в $\overline{\Omega}_i$ *ядрах* $K_i(z_1,\ldots,z_i)$, $i=\overline{1,p}$, $p=1,2,\ldots$.

Твердження цієї леми перевіряється безпосередньо.

Лема 2. *Нехай* F *— функціонал, диференційовний по Гато. Тоді для будь-яких* $f(z)$, $g(z)\in Q[0,1]$ *буде мати місце співвідношення*

$$\left[\frac{\partial F(H(\cdot-z_1(f(\cdot)+H(\cdot-z_2)g(\cdot))}{\partial z_1}\right]_{z_2=z_1} = \frac{d}{dz_1}F(H(\cdot-z_1)(f(\cdot)+g(\cdot)))\frac{f(z_1)}{f(z_1)+g(z_1)},$$

де z_1 *— будь-яка точка неперервності функцій* $f(\cdot)$, $g(\cdot)$.

Справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай* $F\colon Q[0,1]\to\mathbf{R}^1$ *такий, що задовольняє умови*

$$\frac{\partial^p}{\partial\xi_1\ldots\partial\xi_p}F\Big[\bar{x}_p(\cdot,\bar{\xi}^p)\Big] \in L_\infty(\overline{\Omega}_p), \qquad p=\overline{1,n},$$

де $\overline{\Omega}_p=[0,1]\times\ldots\times[0,1]$ *— декартів добуток,*

$$K_1^F(\xi_1) = -\frac{1}{x_1(\xi_1)}\frac{\partial}{\partial\xi_1}F[\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)],$$

$$K_{2m}^F(\bar{\xi}^{2m}) = \prod_{i=1}^{m}\frac{x_{2i-1}(\xi_{2i-1})-x_{2i-2}(\xi_{2i-1})}{x_{2i}(\xi_{2i})-x_{2i-1}(\xi_{2i})}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\xi_{2m}}\left\{K_{2m-1}(\bar{\xi}^{2m-1})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{2m-1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\Big[\bar{x}_{2m}(\cdot,\bar{\xi}^{2m})\Big]\right)^{-1}\cdots\right)^{-1}\right\},$$

$$m=1,2,\ldots, \tag{7}$$

$$K_{2m-1}^F(\bar{\xi}^{2m-1}) = -\frac{1}{x_1(\xi_1)}\prod_{i=1}^{m-1}\frac{x_{2i}(\xi_{2i})-x_{2i-1}(\xi_{2i})}{x_{2i+1}(\xi_{2i+1})-x_{2i}(\xi_{2i+1})}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\xi_{2m-1}}\left\{K_{2m-2}(\bar{\xi}^{2m-2})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{2m-2}}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\Big[\bar{x}_{2m-1}(\cdot,\bar{\xi}^{2m-1})\Big]\right)^{-1}\cdots\right)^{-1}\right\},$$

$$n=2,3,\ldots.$$

Тоді при виконанні умов (5):

1) *в класі* Q_n *існує інтерполяційний і. л. д. з вузлами* $\bar{x}_i(z,\bar{\xi}^i)$, $i=\overline{0,n}$, *що має вигляд*

$$Q_n^I(x(\cdot)) = F[0] + \int_0^1 \cfrac{K_1(z_1)\,x(z_1)\,dz_1}{1+\int\limits_{z_1}^1 \cfrac{K_1(z_1,z_2)(x(z_2)-x_1(z_2))\,dz_2}{1+ \ddots + \int\limits_{z_{n-1}}^1 K_n(z_1,\dots,z_n)(x(z_n)-x_{n-1}(z_n))\,dz_n}}\,, \tag{8}$$

де $K_i(\bar{\xi}^i)$ *обчислюються за формулами* (7);

2) *і. л. д. вигляду* (8) *буде інтерполяційним з вузлами* $\bar{x}_i(z,\bar{\xi}^i)$, $i=\overline{0,n}$, *тоді, коли його ядра задовольняють умови* (7).

Доведення. Доведемо, що коли ядра K_i визначаються за формулами (7), то і. л. д. вигляду (8) є інтерполяційним для функціоналу F у вузлах $\bar{x}_i(z,\bar{\xi}^i)$, $i=\overline{0,n}$, при будь-яких $x_1(\cdot), x_2(\cdot), \dots x_n(\cdot) \in \mathbf{Q}\Big([0,1];\bar{\beta}\Big)$, що задовольняють (5). Доведення будемо проводити за індукцією. Зауважимо, що для будь-якого і. л. д. (4) справджуються співвідношення

$$K_1^Q(\xi_1) = -\frac{1}{x_1(\xi_1)}\frac{\partial}{\partial\xi_1}Q_n[\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)],$$

$$K_{2m}^Q(\bar{\xi}^{2m}) = \prod_{i=1}^m \frac{x_{2i-1}(\xi_{2i-1})-x_{2i-2}(\xi_{2i-1})}{x_{2i}(\xi_{2i})-x_{2i-1}(\xi_{2i})}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\xi_{2m}}\left\{K_{2m-1}(\bar{\xi}^{2m-1})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{2m-1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}Q_n\left[\bar{x}_{2m}(\cdot,\bar{\xi}^{2m})\right]\right)^{-1}\cdots\right)^{-1}\right\},$$

$$m = 1, 2, \dots, \tag{9}$$

$$K_{2m-1}^Q(\bar{\xi}^{2m-1}) = -\frac{1}{x_1(\xi_1)}\prod_{i=1}^{m-1}\frac{x_{2i}(\xi_{2i})-x_{2i-1}(\xi_{2i})}{x_{2i+1}(\xi_{2i+1})-x_{2i}(\xi_{2i+1})}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\xi_{2m-1}}\left\{K_{2m-2}(\bar{\xi}^{2m-2})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{2m-2}}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}Q_n\left[\bar{x}_{2m-1}(\cdot,\bar{\xi}^{2m-1})\right]\right)^{-1}\cdots\right)^{-1}\right\},$$

$$m = 2, 3, \dots .$$

Далі перевіримо справедливість твердження теореми. При $n=1$ маємо

$$Q_n\Big(\bar{x}_1(\cdot,\bar{\xi}^1)\Big) = Q_1\Big(\bar{x}_1(\cdot,\bar{\xi}^1)\Big) = F[0] + \int_0^1 K_1(z_1)\,\bar{x}_1(z_1,\xi_1)\,dz_1 =$$

$$= F[0] + \int_{\xi_1}^1 K_1(z_1)\,x_1(z_1)\,dz_1 = F[0] - \int_{\xi_1}^1 \frac{1}{x_1(z_1)}\frac{\partial}{\partial z_1}F[H(\cdot-z_1)\,x_1(\cdot)]\,x_1(z_1)\,dz_1 =$$

$$= F[0] - \int_{\xi_1}^1 \frac{\partial}{\partial z_1}F[H(\cdot-z_1)\,x_1(\cdot)]\,dz_1 = F[0]-F[0]+F[H(\cdot-\xi_1)\,x_1(\cdot)] =$$

$$= F\Big[\bar{x}_1(\cdot,\bar{\xi}^1)\Big].$$

Отримали рівність $Q_1(\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)) = F[\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)]$ для довільного $x_1(\cdot)$. Тепер покажемо, що при довільних $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ виконано $Q_2\left(\bar{x}_i(\cdot, \bar{\xi}^i)\right) = F\left[\bar{x}_i(\cdot, \bar{\xi}^i)\right]$, $i = 1, 2$. Маємо

$$Q_2(\bar{x}_1(\cdot, \xi_1)) = F[0] + \int_0^1 \frac{K_1(z_1)\bar{x}_1(z_1, \xi_1)\,dz_1}{1 + \int_{z_1}^1 K_2(z_1, z_2)(\bar{x}_1(z_2, \xi_1) - x_1(z_2))\,dz_2} =$$

$$= F[0] + \int_{\xi_1}^1 \frac{K_1(z_1)x_1(z_1)\,dz_1}{1 + \int_{z_2}^1 K_2(z_1, z_2)(x_1(z_2) - x_1(z_2))\,dz_2} = F[0] + \int_{\xi_1}^1 K_1(z_1)x_1(z_1)\,dz_1 =$$

$$= Q_1(\bar{x}_1(\cdot, \xi_1)) = F[\bar{x}_1(\cdot, \xi_1)], \qquad i = 1,$$

$$Q_2\left(\bar{x}_2(\cdot, \bar{\xi}^2)\right) = F[0] + \int_0^1 \frac{K_1(z_1)\bar{x}_2(z_1, \bar{\xi}^2)\,dz_1}{1 + \int_{z_1}^1 K_2(z_1, z_2)(\bar{x}_2(z_2, \bar{\xi}^2) - x_1(z_2))\,dz_2} =$$

$$= F[0] + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{K_1(z_1)x_1(z_1)\,dz_1}{1 + \int_{\xi_2}^1 K_2(z_1, z_2)(x_2(z_2) - x_1(z_2))\,dz_2} +$$

$$+ \int_{\xi_2}^1 \frac{K_1(z_1)x_2(z_1)\,dz_1}{1 + \int_{z_2}^1 K_2(z_1, z_2)(x_2(z_2) - x_1(z_2))\,dz_2}, \qquad i = 2.$$

Оскільки

$$K_1(z_1) = -\frac{1}{x_1(z_1)}\frac{\partial}{\partial z_1}F[\bar{x}_1(\cdot, z_1)],$$

$$K_2(z_1, z_2) = \frac{x_1(z_1)}{x_2(z_2) - x_1(z_2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\left\{K_1(z_1)\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F\left[\bar{x}_2(\cdot, \bar{z}^2)\right]\right)^{-1}\right\},$$

то

$$Q_2\left(\bar{x}_2(\cdot, \bar{\xi}^2)\right) =$$

$$= F[0] + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{K_1(z_1)x_1(z_1)\,dz_1}{1 + \int_{\xi_2}^1 \frac{K_1(z_1)x_1(z_1)}{x_2(z_2) - x_1(z_2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F\left[\bar{x}_2(\cdot, \bar{z}^2)\right]\right)^{-1}(x_2(z_2) - x_1(z_2))\,dz_2} +$$

$$+ \int_{\xi_2}^1 \frac{K_1(z_1)x_2(z_1)\,dz_1}{1 + \int_{z_1}^1 \frac{K_1(z_1)x_1(z_1)}{x_2(z_2) - x_1(z_2)}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F\left[\bar{x}_2(\cdot, \bar{z}^2)\right]\right)^{-1}(x_2(z_2) - x_1(z_2))\,dz_2} =$$

$$= F[0] + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{K_1(z_1)x_1(z_1)\,dz_1}{1 + K_1(z_1)x_1(z_1)\int_{\xi_2}^1 \frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F\left[\bar{x}_2(\cdot, \bar{z}^2)\right]\right)^{-1}dz_2} +$$

$$+\int_{\xi_2}^{1}\frac{K_1(z_1)x_2(z_1)\,dz_1}{1+K_1(z_1)x_1(z_1)\int_{z_1}^{1}\frac{\partial}{\partial z_2}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F\left[\bar{x}_2(\cdot,\bar{z}^2)\right]\right)^{-1}dz_2}.$$

Використавши лему 2, отримаємо

$$F[0]\,+$$

$$+\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{K_1(z_1)x_1(z_1)\,dz_1}{1+K_1(z_1)x_1(z_1)\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F[H(\cdot-z_1)x_1(\cdot)]\right)^{-1}-K_1(z_1)x_1(z_1)\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F[\bar{x}_2(\cdot,z_1,\xi_2)]\right)^{-1}}\,+$$

$$+\int_{\xi_2}^{1}\frac{K_1(z_1)x_2(z_1)\,dz_1}{1+K_1(z_1)x_1(z_1)\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F[H(\cdot-z_1)x_1(\cdot)]\right)^{-1}-K_1(z_1)x_1(z_1)\frac{x_2(z_1)}{x_1(z_1)}\left(\frac{\partial}{\partial z_1}F[H(\cdot-z_1)x_2(\cdot)]\right)^{-1}}=$$

$$=\;F[0]-\int_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{\partial}{\partial z_1}F[H(\cdot-z_1)x_1(\cdot)+H(\cdot-\xi_2)(x_2(\cdot)-x_1(\cdot))]\,dz_1\;-$$

$$-\int_{\xi_2}^{1}\frac{\partial}{\partial z_1}F[H(\cdot-z_1)x_2(\cdot)]\,dz_1\;=\;F[0]-F[H(\cdot-\xi_2)x_2(\cdot)]+F[\bar{x}_2(\cdot,\xi_1,\xi_2)]\;-$$

$$-\;F[0]+F[H(\cdot-\xi_2)x_2(\cdot)]\;=\;F[\bar{x}_2(\cdot,\xi_1,\xi_2)]\;=\;F\left[\bar{x}_2(\cdot,\bar{\xi}^2)\right],$$

тобто доведено, що для довільних $x_1(\cdot), x_2(\cdot)$ і. л. д. $Q_2\left(\bar{x}_2(\cdot,\bar{\xi}^2)\right)$ є інтерполяційним.

Припустимо, що і. л. д. (8) з ядрами (7) буде інтерполяційним при $n=p$, тобто

$$Q_p\left(\bar{x}_i(\cdot,\bar{\xi}^i)\right)\;=\;F\left[\bar{x}_i(\cdot,\bar{\xi}^i)\right]\qquad\forall\,x_i(\cdot)\in\mathbf{Q}\left([0,1],\bar{\beta}\right),$$

і покажемо, що він буде інтерполяційним і при $n=p+1$.

Беручи до уваги (7) і (9), маємо

$$K_{p+1}^{Q}(\bar{z}^{p+1})\;=\;K_{p+1}^{F}(\bar{z}^{p+1}),\qquad p=1,2,\ldots,$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_{p+1}}\left(K_p^F(\bar{\xi}^p)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}K_{p-1}^F(\bar{\xi}^{p-1})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{p-1}}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1^F(\xi_1)\;\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\cdots\right)^{-1}\right)^{-1}\right)=$$

$$=\;\frac{\partial}{\partial\xi_{p+1}}\left(K_p^Q(\bar{\xi}^p)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}K_{p-1}^Q(\bar{\xi}^{p-1})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{p-1}}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1^Q(\xi_1)\;\times\right.\right.\right.\right.$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}Q_{p+1}\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right]\right)^{-1}\Bigg)^{-1}\ldots\Bigg)^{-1}\Bigg)^{-1}\Bigg),$$

де $K_i^F(\bar{\xi}^i)$ — ядра, обчислені за формулами (7), а $K_i^Q(\bar{\xi}^i)$ — за формулами (9).

Проінтегруємо обидві частини останньої рівності по ξ_{p+1} від ξ_{p+1} до 1:

$$K_p^F(\bar{\xi}^p)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}K_{p-1}^F(\bar{\xi}^{p-1})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{p-1}}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1^F(\xi_1)\right.\right.\right.\times$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}F\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right)^{-1}\Bigg|_{\xi_{p+1}}^{1}=$$

$$=K_p^Q(\bar{\xi}^p)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}K_{p-1}^Q(\bar{\xi}^{p-1})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{p-1}}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1^Q(\xi_1)\right.\right.\right.\times$$

$$\left.\left.\left.\times\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}Q_{p+1}\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right)^{-1}\Bigg|_{\xi_{p+1}}^{1}.$$

При підстановці $\xi_{p+1}=1$ у вираз

$$\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1}) = \sum_{i=1}^{p}H(\cdot-\xi_1)(x_i(\cdot)-x_{i-1}(\cdot))+H(\cdot-\xi_{p+1})\big(x_{p+1}(\cdot)-x_p(\cdot)\big)$$

останній доданок $(i=p+1)$ перетворюється в 0. Тому

$$K_p^F(\bar{\xi}^p)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1^F(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\left[\bar{x}_p(\cdot,\bar{\xi}^p)\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\ldots\right)-$$

$$-K_p^F(\bar{\xi}^p)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1^F(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\ldots\right)=$$

$$=K_p^Q(\bar{\xi}^p)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1^Q(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}Q_{p+1}\left[\bar{x}_p(\cdot,\bar{\xi}^p)\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\ldots\right)-$$

$$-K_p^Q(\bar{\xi}^p)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_p}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1^Q(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}Q_{p+1}\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\ldots\right).$$

Виходячи з припущення індукції і рівності (6), маємо

$$\frac{\partial}{\partial\xi_p}\left\{K_{p-1}^F(\bar{\xi}^{p-1})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{p-1}}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1^F(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\ldots\right)^{-1}\right\}=$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_p}\left\{K_{p-1}^{Q}(\bar{\xi}^{p-1})\left(\frac{\partial}{\partial \xi_{p-1}}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}K_1^{Q}(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}Q_{p+1}\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\cdots\right)^{-1}\right\}.$$

Обидві частини отриманої рівності інтегруємо по ξ_p від ξ_p до 1 і, враховуючи довільність вибору $x_i(\cdot)$, $i = \overline{1, p+1}$, а також припущення індукції і рівність (6), одержуємо рівність

$$\frac{\partial}{\partial \xi_{p-1}}\left\{K_{p-2}^{F}(\bar{\xi}^{p-2})\left(\frac{\partial}{\partial \xi_{p-2}}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}K_1^{F}(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}F\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\cdots\right)^{-1}\right\} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_{p-1}}\left\{K_{p-2}^{Q}(\bar{\xi}^{p-2})\left(\frac{\partial}{\partial \xi_{p-2}}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2}K_1^{Q}(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}Q_{p+1}\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\cdots\right)^{-1}\right\}.$$

Далі проводимо послідовне інтегрування по ξ_{p-1} від ξ_{p-1} до 1, по ξ_{p-2} від ξ_{p-2} до 1 і т. д. В результаті отримуємо

$$F\left[\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right] = Q_{p+1}\left(\bar{x}_{p+1}(\cdot,\bar{\xi}^{p+1})\right) \qquad \forall\, x_i(\cdot),\ i = \overline{1, p+1}.$$

Таким чином, доведено, що коли ядра $K_i(\bar{\xi}^i)$ визначаються формулами (7), то і. л. д. (8) є інтерполяційним для нелінійного функціоналу F у вузлах $\bar{x}_i(z,\bar{\xi}^i)$, $i = \overline{0, n}$, при будь-яких $x_i(\cdot) \in \mathbf{Q}\left([0,1],\bar{\beta}\right)$, $i = \overline{1, n}$, що задовольняють умови (5).

Тепер доведемо обернене твердження, тобто покажемо, що якщо і. л. д. (8) є інтерполяційним для $F[x(\cdot)]$, то ядра $K_i(\bar{\xi}^i)$ визначаються за формулами (7).

Отже, з умови інтерполяції (3) необхідно отримати вигляд ядер $K_i(\bar{\xi}^i)$. Маємо $Q_n(\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)) = F[\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)]$. Враховуючи (6), $Q_n(\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)) = Q_1[\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)]$, приходимо до співвідношення $Q_n(\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)) = F[\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)]$ або

$$F[0] + \int_0^1 K_1(z_1)\bar{x}(z_1,\xi_1)\,dz_1 = F[\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)].$$

Використовуючи означення функції Хевісайда, маємо

$$F[0] + \int_0^1 K_1(z_1)x_1(z_1)\,dz_1 = F[\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)].$$

Диференціюємо цю рівність по ξ_1 і після елементарних перетворень отримуємо

$$K_1(\xi) = -\frac{1}{x_1(\xi_1)}\frac{\partial}{\partial \xi_1}F[\bar{x}_1(\cdot,\xi_1)].$$

Якщо $n = 2$, то $Q_n\left(\bar{x}_2(\cdot,\bar{\xi}^2)\right) = Q_2\left(\bar{x}_2(\cdot,\bar{\xi}^2)\right) = F\left[\bar{x}_2(\cdot,\bar{\xi}^2)\right]$ або

$$F[0] + \int_0^1 \frac{K_1(z_1)\,\bar{x}_2(z_1,\bar{\xi}^2)\,dz_1}{1 + \int_{z_1}^1 K_2(z_1,z_2)\left(\bar{x}_2(z_2,\bar{\xi}^2) - x_1(z_2)\right)dz_2} = F\left[\bar{x}_2(\cdot,\bar{\xi}^2)\right],$$

$$F[0] + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{K_1(z_1)\,x_1(z_1)\,dz_1}{1+\int_{\xi_2}^{1} K_2(z_1, z_2)(x_2(z_2)-x_1(z_2))dz_2} +$$

$$+ \int_{\xi_2}^{1} \frac{K_1(z_1)\,x_2(z_1)\,dz_1}{1+\int_{z_1}^{1} K_2(z_1, z_2)(x_2(z_2)-x_1(z_2))dz_2} = F\left[\bar{x}_2(\cdot, \bar{\xi}^2)\right].$$

Диференціюємо останню рівність по ξ_1 і перетворюємо результат так, щоб зліва лишився вираз, що містить $K_2(z_1, z_2)$:

$$1+\int_{\xi_2}^{1} K_2(\xi_1, z_2)(x_1(z_2)-x_1(z_2))dz_2 = K_1(\xi_1)x_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} F\left[\bar{x}_2(\cdot, \bar{\xi}^2)\right]\right)^{-1}.$$

Після диференціювання по ξ_2 і очевидних перетворень маємо

$$K_2(\xi_1, \xi_2) = \frac{x_1(\xi_1)}{x_2(\xi_2)-x_1(\xi_2)}\frac{\partial}{\partial\xi_2}\left\{K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} F\left[\bar{x}_2(\cdot, \bar{\xi}^2)\right]\right)^{-1}\right\}.$$

Якщо $n=3$, то $Q_3\left(\bar{x}_3(\cdot, \bar{\xi}^3)\right) = F\left[\bar{x}_3(\cdot, \bar{\xi}^3)\right]$ або

$$F[0] + \int_{0}^{1} \frac{K_1(z_1)\,\bar{x}_3(z_1, \bar{\xi}^3)\,dz_1}{1+\int_{z_1}^{1} \frac{K_2(z_1, z_2)(\bar{x}_3(z_2, \bar{\xi}^3)-x_1(z_2)\,dz_2}{1+\int_{z_2}^{1} K_3(z_1, z_2, z_3)(\bar{x}_3(z_3, \bar{\xi}^3)-x_2(z_3))\,dz_3}} = F\left[\bar{x}_3(\cdot, \bar{\xi}^3)\right],$$

$$F[0]+\int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{K_1(z_1)\,x_1(z_1)\,dz_1}{1+\ldots}+\int_{\xi_2}^{1} \frac{K_1(z_1)\,\bar{x}_3(z_1, \bar{\xi}^3)\,dz_1}{1+\ldots} = F\left[\bar{x}_3(\cdot, \bar{\xi}^3)\right].$$

Внаслідок диференціювання обох частин останньої рівності по ξ_1 другий доданок перетвориться в 0, оскільки він не містить в собі залежності від ξ_1, тому отримуємо

$$1+\int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{K_2(\xi_1, z_2)(x_2(z_2)-x_1(z_2))\,dz_2}{1+\ldots}+\int_{\xi_3}^{1} \frac{K_2(\xi_1, z_2)(x_3(z_2)-x_1(z_2))\,dz_2}{1+\ldots} =$$

$$= -\,x_1(\xi_1)\,K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} F\left[\bar{x}_3(\cdot, \bar{\xi}^3)\right]\right)^{-1}.$$

Далі диференціюємо по ξ_2:

$$1+\int_{\xi_3}^{1} K_3(\xi_1, \xi_2, z_3)(x_2(z_3)-x_2(z_3))dz_3 =$$

$$= \frac{x_2(\xi_2)-x_1(\xi_2)}{x_1(\xi_1)} K_2(\xi_1, \xi_2)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_2} K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1} F\left[\bar{x}_3(\cdot, \bar{\xi}^3)\right]\right)^{-1}\right)^{-1}.$$

Останню рівність диференціюємо по ξ_3. Тоді після певних перетворень одержуємо

$$K_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{x_2(\xi_2) - x_1(\xi_2)}{x_1(\xi_1)(x_3(\xi_3) - x_2(\xi_3))} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \xi_3}\left\{K_2(\xi_1, \xi_2)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_2} K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} F\left[\bar{x}_3(\cdot, \bar{\xi}^3)\right]\right)^{-1}\right)^{-1}\right\}.$$

Припустимо, що формули (7) справедливі для $n = 2m-2$, і покажемо, що вони справедливі для $n = 2m-1$, $n = 2m$. Отже, якщо $n = 2m-1$, то з умови інтерполяції

$$Q_{2m-1}\left(\bar{x}_{2m-1}(\cdot, \bar{\xi}^{2m-1})\right) = F\left[\bar{x}_{2m-1}(\cdot, \bar{\xi}^{2m-1})\right], \quad m = 2, 3, \ldots .$$

Пропускаючи проміжні викладки, маємо

$$F[0] + \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{K_2(z_1)\, x_1(z_1)\, dz_1}{1+\ldots} + \int_{\xi_2}^{1} \frac{K_1(z_1)\, \bar{x}_{2m-1}(z_1, \bar{\xi}^{2m-1})\, dz_1}{1+\ldots} = F\left[\bar{x}_{2m-1}(\cdot, \bar{\xi}^{2m-1})\right].$$

Диференціюємо по ξ_1 і, виконуючи елементарні перетворення, отримуємо

$$1 + \int_{\xi_2}^{\xi_3} \frac{K_2(\xi_1, z_2)(x_2(z_2) - x_1(z_2))\, dz_2}{1+\ldots} + \int_{\xi_3}^{1} \frac{K_2(\xi_1, z_2)(\bar{x}_{2m-1}(z_1, \bar{\xi}^{2m-1}) - x_1(z_2))\, dz_2}{1+\ldots} =$$

$$= -x_1(\xi_1)\, K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} F\left[\bar{x}_{2m-1}(\cdot, \bar{\xi}^{2m-1})\right]\right)^{-1}.$$

Продовжуючи послідовне диференціювання по $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{2m-2}$, одержуємо

$$1 + \int_{\xi_{2m-1}}^{1} K_{2m-1}\left(\bar{\xi}^{2m-2}, z_{2m-1}\right)\left(x_{2m-1}(z_{2m-1}) - x_{2m-2}(z_{2m-1})\right) dz_{2m-1} =$$

$$= \prod_{i=1}^{m-1} \frac{x_{2i}(\xi_{2i}) - x_{2i-1}(\xi_{2i})}{x_{2i-1}(\xi_{2i-1}) - x_{2i-2}(\xi_{2i-1})} \times$$

$$\times K_{2m-2}(\bar{\xi}^{2m-2})\left(\frac{\partial}{\partial \xi_{2m-2}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_2} K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} F\left[\bar{x}_{2m-1}(\cdot, \bar{\xi}^{2m-1})\right]\right)^{-1} \cdots\right)^{-1}.$$

Останнє диференціювання проводимо по ξ_{2m-1}:

$$K_{2m-1}(\bar{\xi}^{2m-1}) = -\frac{1}{x_1(\xi_1)} \prod_{i=1}^{m-1} \frac{x_{2i}(\xi_{2i}) - x_{2i-1}(\xi_{2i})}{x_{2i+1}(\xi_{2i+1}) - x_{2i}(\xi_{2i+1})} \times$$

$$\times \frac{\partial}{\partial \xi_{2m-1}}\left\{K_{2m-2}(\bar{\xi}^{2m-2})\left(\frac{\partial}{\partial \xi_{2m-2}} \cdots \frac{\partial}{\partial \xi_2} K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} F\left[\bar{x}_{2m-1}(\cdot, \bar{\xi}^{2m-1})\right]\right)^{-1} \cdots\right)^{-1}\right\}.$$

А це і є формула (7) для ядер з непарними індексами.

Тепер виведемо формулу (7) для ядер з парними індексами, знаючи щойно отриману формулу, тобто для $n = 2m$. Тоді

$$Q_m\left(\bar{x}_{2m}(\cdot, \bar{\xi}^{2m})\right) = F\left[\bar{x}_{2m}(\cdot, \bar{\xi}^{2m})\right], \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Як і в попередньому випадку, пропускаючи проміжні викладки, маємо

$$F[0]+\int\limits_{\xi_1}^{\xi_2}\frac{K_2(z_1)x_1(z_1)\,dz_1}{1+\ldots}+\int\limits_{\xi_2}^{1}\frac{K_1(z_1)\bar{x}_{2m}(z_1,\bar{\xi}^{2m})\,dz_1}{1+\ldots} = F\Big[\bar{x}_{2m}(\cdot,\bar{\xi}^{2m})\Big].$$

Диференціюємо по ξ_1 і, виконуючи елементарні перетворення, отримуємо

$$1+\int\limits_{\xi_2}^{\xi_3}\frac{K_2(\xi_1,z_2)(x_2(z_2)-x_1(z_2))\,dz_2}{1+\ldots}+\int\limits_{\xi_3}^{1}\frac{K_2(\xi_1,z_2)(\bar{x}_{2m}(z_2,\bar{\xi}^{2m})-x_1(z_2))\,dz_2}{1+\ldots} =$$

$$= -x_1(\xi_1)K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\Big[\bar{x}_{2m}(\cdot,\bar{\xi}^{2m})\Big]\right)^{-1}.$$

Продовжуючи послідовне диференціювання по $\xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_{2m-2}$, одержуємо

$$1+\int\limits_{\xi_{2m-1}}^{1}K_{2m}\Big(\bar{\xi}^{2m-1},z_{2m}\Big)(x_{2m}(z_{2m})-x_{2m-1}(z_{2m}))\,dz_{2m} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{m}(x_{2i-1}(\xi_{2i-1})-x_{2i-2}(\xi_{2i-1}))}{\prod\limits_{i=1}^{m-1}(x_{2i}(\xi_{2i})-x_{2i-1}(\xi_{2i}))}\times$$

$$\times K_{2m-1}(\bar{\xi}^{2m-1})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{2m-1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\Big[x(\cdot,\bar{\xi}^{2m})\Big]\right)^{-1}\cdots\right)^{-1}.$$

Останнє диференціювання проводимо по ξ_{2m-1}:

$$K_{2m}(\bar{\xi}^{2m}) = \prod_{i=1}^{m}\frac{x_{2i-1}(\xi_{2i-1})-x_{2i-2}(\xi_{2i-1})}{x_{2i}(\xi_{2i})-x_{2i-1}(\xi_{2i})}\times$$

$$\times\frac{\partial}{\partial\xi_{2m}}\left\{K_{2m-1}(\bar{\xi}^{2m-1})\left(\frac{\partial}{\partial\xi_{2m-1}}\cdots\frac{\partial}{\partial\xi_2}K_1(\xi_1)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1}F\Big[\bar{x}_{2m}(\cdot,\bar{\xi}^{2m})\Big]\right)^{-1}\cdots\right)^{-1}\right\},$$

$$m = 1, 2, \ldots .$$

Отримали формулу (7) для обчислення ядер з парними індексами.

Однозначність визначення ядер інтерполяційного і. л. д. очевидна. Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Однозначність визначення ядер інтерполяційного і. л. д. досягається як і для інтерполяційних функціональних поліномів, за рахунок „континуальності" вузлів інтерполяції [10].

Позначимо через $\mathbf{Q}_n^+$ клас функціоналів, що утворюються за допомогою лінійних комбінацій і. л. д. вигляду (4). Опишемо весь клас інтерполяційних функціоналів з класу $\mathbf{Q}_n^+$. Справедлива така теорема.

Теорема 2. *Нехай виконані умови теореми* 1. *Тоді формула*

$$R_n(x(\cdot);F) = T_n(x(\cdot))+Q_n^I(x(\cdot);F-T_n)$$

описує весь клас інтерполяційних функціоналів з $\mathbf{Q}_n^+$, *коли* $T_n(x(\cdot))$ *перебігає весь клас* Q_n.

Доведення. Інтерполяційність очевидна

$$R_n(x_k(\cdot); F) = T_n(x(\cdot)) + Q_n^I(x(\cdot); F - T_n) =$$

$$= T_n(x_k(\cdot)) + F(x_k(\cdot)) - T_n(x_k(\cdot)) = F(x_k(\cdot)), \quad k = \overline{0, n}.$$

Покажемо, що для кожного $\tilde{Q}_n(x(\cdot)) \in \mathbf{Q}_n^+$ такого, що $\tilde{Q}_n(x_k(\cdot)) = F(x_k(\cdot))$, $k = \overline{0, n}$, можна так підібрати $T_n(x(\cdot))$, що $R_n(x(\cdot); F) \equiv \tilde{Q}_n(x(\cdot))$. Дійсно, виберемо $T_n(x(\cdot)) = \tilde{Q}_n(x(\cdot))$. Тоді $R_n(x(\cdot); F) = \tilde{Q}_n(x(\cdot)) + Q_n\left(x(\cdot); F - \tilde{Q}_n\right)$ для кожного $x(\cdot)$.

1. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermit interpolation in Banach spaces // J. Approxim. Theory. – 1971. – **4**, № 4. – P. 419 – 432.
2. *Porter W. A.* Synthesis of polinomic systems // SIAM Math. Anal. – 1980. – **11**, № 2. – P. 308 – 315.
3. *Соболевский П. И.* Интерполяция функционалов и некоторые приближенные формулы для интегралов по гауссовой мере // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. –1975. – № 2. – С. 5.
4. *Янович Л. А.* Приближенные вычисления континуальных интегралов по гауссовым мерам. – Минск: Наука и техника, 1976. – 384 с.
5. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Полиномиальное интерполирование операторов в гильбертовых пространствах // Докл. АН России. – 1992. – **324**, № 4. – С. 742 – 745.
6. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Эрмитова интерполяция операторов в гильбертовых пространствах // Там же. – **327**, № 2. – С. 183 – 186.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Полиномиальное интерполирование операторов в векторных пространствах // Там же. – 1993. – **329**, № 2. – С. 135 – 139.
8. *Кучминская Х. Й.* Приближенное вычисление функций двух переменных ветвящимися цепными дробями с полиномиальными компонентами // Мат. сб. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 31 – 34.
9. *Михальчук Р. И.* Континуальный аналог цепных дробей: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Донецк, 1986. – 16 с.
10. *Makarov V. L., Khlobystov V. V.* On the identification of nonlinear operators and it's application // Boundary Elements IX. Math. and Comput. Aspects. – Berlin: Springer-Verlag, 1987. – **1**. – P. 43 – 58.

Одержано 20.05.97,
після доопрацювання – 20.10.98