УДК 519.41/47

М. М. Семко (Укр. фін.-екон. ін-т, Ірпінь)

БУДОВА ЛОКАЛЬНО СТУПІНЧАСТИХ УЩН[ )-ГРУП

A notion of CDN[ )-group is introduced: G is a CDN[ )-group if, for any pair of its subgroups A and B such that A is a proper nonmaximal subgroup of B, there exists a normal subgroup N which belongs to G and satisfies $A \leq N < B$. Fifteen types of nilpotent non-Dedekind groups and nine types of nonnilpotent locally graded groups of this sort are obtained.

Вводиться поняття УЩН[ )-групи — такої групи G, у якій для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A \leq N < B$. Одержано 15 типів нільпотентних недедекіндових та 9 типів ненільпотентних локально ступінчастих груп такого роду.

У роботі [1] описано один підклас класу УЩН[ ]-груп, повний опис якого можна знайти в [2]. Інший природний підклас названого класу груп становлять УЩН[ )-групи. УЩН[ )-групою називається така група G, у якій для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A \leq N < B$. В даній роботі одержано повний опис локально ступінчастих УЩН[ )-груп. Необхідні означення можна знайти в [2].

Теорема 1. *Нільпотентні недедекіндові УЩН[ )-групи G вичерпуються групами типів*:

1) $G = (\langle u \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, $|u| = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $|v| = p^{\gamma}$, $\gamma > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, p *і* r — *прості числа*, $[u, v] = u^{p^{\Delta-1}}$;

2) $G = C \times Q \times \langle z \rangle$, C — *локально циклічна 2-група*, $|C| > 2$, Q — *група кватерніонів порядку* 8, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*;

3) $G = ((C \times \langle u \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle) \times \langle z \rangle$, C — *локально циклічна* p-*група чи група кватерніонів порядку* 8, $[u, v] = c \in C$, $|c| = p$, $|u| \in \{p, p^2\}$, $|v| \in \{p, p^2\}$, $[C, \langle v \rangle] = 1$, $|z| \in \{1, r\}$, p *і* r — *прості числа*, $|C'| \cdot |u| \cdot |v| \neq 32$; *при* $|z| = r$ $|u| \cdot |v| \neq p^2$;

4) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = 8$, $|b| \in \{4, 8\}$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = 2$, $b^{-1} a b = a^{-1}$, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*;

5) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = 3$, $[a, x] = b$, $[b, x] = a^3 = x^6$, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*;

6) $G = A \leftthreetimes \langle x \rangle$, $A = \langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|a| = p^2$, $|b| = p^{\beta}$, $\beta > 1$, $|x| = p$ — *просте число*, $p\beta > 4$, $[a, b] = a^p$, $[a, x] = b^{p^{\beta-1}}$, $[b, x] = 1$;

7) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = |x| = 4$, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*, $[a, x] = a^2$, $[b, x] = x^2 = a^2 b^2$;

8) $G = ((\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle y \rangle)) \times \langle z \rangle$, $|a| = |b| = 4$, $a^2 = x^2 = [a, y]$, $a^2 b^2 = [a, x] = [b, y]$, $b^2 = y^2 = [b, x]$, $|z| \in \{1, r\}$, r — *просте число*;

9) $G = U \leftthreetimes X$, U — *циклічна 2-група чи група кватерніонів порядку* 8, $|U| > 2$, X — *група кватерніонів порядку* 8, $[U, X] = \Phi(U)$, $|C_X(U)| = 4$;

10) $G = (\langle a \rangle \leftthreetimes \langle b \rangle)\langle x \rangle$, $|a| = 8$, $|x| = 4$, $|b| = 2$, $[a, b] = x^2 = a^4$, $[a, x] = b$, $[b, x] = 1$;

11) $G = ((\langle u \rangle \leftthreetimes \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|u| = p^{\Delta}$, $\Delta > 1$, $|v| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = [a, b] = u^{p^{\Delta-1}}$, $[u, b] = [v, b] = 1$;

12) $G = CF$, C — *локально циклічна* p-*група чи група кватерніонів порядку* 8, $[C, F] = 1$, $C \cap F = \langle c \rangle$, $F = ((((\langle c \rangle \times \langle u \rangle) \leftthreetimes \langle v \rangle) \times \langle a \rangle) \leftthreetimes \langle b \rangle$, $|u| = |v| = |c| = |a| = |b| = p$, $[u, v] = c = [a, b]$, $[u, b] = [v, b] = 1$;

13) $G = (\langle a \rangle \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle z \rangle$, $|a| = |b| = 8$, $|\langle a \rangle \cap \langle b \rangle| = |z| = 2$, $b^{-1}ab = a^{-1}$, $[b, z] = 1$, $[a, z] = \langle a^4 \rangle$;

14) $G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle)(\langle x \rangle \times \langle z \rangle)$, $|a| = |x| = 9$, $|b| = |z| = 3$, $[a, x] = b$, $[a, z] = [b, x] = a^3 = x^6$, $[b, z] = 1$;

15) $G = U \times X$, U *і* X — *групи кватерніонів порядку* 8.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Зрозуміло, що G задовольняє умову теореми 2.2.3 з [2] і може бути лише групою одного з типів $1-28$ згаданої теореми.

Якщо G — група одного з типів: $1-3$; 10, $z \in Z(G)$, $|b| < 16$; 11, $z \in Z(G)$; 15; 17; 18; 26, U — циклічна група; 27, то G — група одного з типів $1-10$ розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 4 чи 5 теореми 2.2.3 з [2]. Тоді G — група типу відповідно 11 чи 12 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів $6-9$ теореми 2.2.3 з [2] має циклічний комутант G' порядку p^2 і такий породжуючий елемент d, що G містить підгрупу $B = G' \leftthreetimes \langle d \rangle$. Зрозуміло, що $|[\langle d \rangle; B]| > 2$ і за означенням УЩН[ )-груп $[\langle d \rangle; B) \ni N \lhd G$. Звідси $[\langle d \rangle, G] \leq \Phi(G') \leftthreetimes \langle d \rangle$. В групі G кожного із розглядуваних типів $[\langle d \rangle, G] = G'$. Суперечність. Отже, розглядувані типи груп не можуть бути УЩН[ )-групами.

Якщо G — група типу 10, $z \in Z(G)$, $|b| < 16$ чи G — група типу 11, $z \in Z(G)$, то за попереднім G — група типу 4 чи 5 розглядуваної теореми.

Припустимо, що G — група типу 10, $|b| > 8$. Тоді $z = 1$ і G містить породжуючий елемент $d = ab^{2^{\beta-3}}$, G' — циклічна група порядку 4, $G' \cap \langle d \rangle = 1$. Тепер, як і для груп типу $6-9$ теореми 2.2.3 з [2], одержимо суперечність. Таким чином, $|b| < 16$.

Нехай G — група типу 10, $|b| < 16$ чи 11, $z \notin Z(G)$ теореми 2.2.3 з [2]. Тоді G — група типу відповідно 13 та 14 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 12 теореми 2.2.3 з [2]. Зрозуміло, що G — неметациклічна група. Нехай всі власні підгрупи з G метациклічні. Тоді G задовольняє умову теореми 1.3.3 з [2] і може бути лише групою типу 2 згаданої теореми. Звідси G — група типу 14 розглядуваної теореми. Припустимо, що G містить власну мінімальну неметациклічну підгрупу M. Завдяки теоремі 1.3.3 з [2] $|M| = p^3$, $\exp(M) = p$, $M = G' \leftthreetimes \langle y \rangle$, $|y| = p$, $y \in G \backslash \Phi(G)$. Зрозуміло, що $|[\langle y \rangle; M]| > 2$ і за означенням УЩН[ )-груп $[\langle y \rangle; M) \ni N \lhd G$. Оскільки G — 2-породжена група, то $y \notin Z(G)$. Звідси $|N| > p$ і, значить,

$|N| = p^2$. Зрозуміло, що G/N — абелева група і тому $G' \le N$, що неможливо. Отже, група G типу 12 теореми 2.2.3 з [2] є групою типу 14 розглядуваної теореми.

Група G кожного з типів 13, 14, 16, 19 – 21, 25 теореми 2.2.3 з [2] містить підгрупу $B = U\langle x\rangle$, де $U = G'$, $[\langle x\rangle, G] = G'$ і $|[\langle x\rangle; B]| > 2$. За означенням УЩН[ )-груп $[\langle x\rangle; B) \ni N \lhd G$ і $G' \nleq N$, що неможливо. Тому G не може бути групою жодного із розглядуваних типів.

В групі G кожного з типів 22 – 24 теореми 2.2.3 з [2] покладемо $x = b$, $B = \langle a^2\rangle\langle x\rangle$ і, як і вище, прийдемо до суперечності.

Нехай G — група типу 26, U — циклічна група чи типу 27 теореми 2.2.3 з [2]. Тоді G — група типу 9 чи 10 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 26 теореми 2.2.3 з [2] і U — група кватерніонів порядку 8. Тоді, завдяки наслідку 2.1.3 з [2], G — група типу 15 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 28 теореми 2.2.3 з [2]. Покладемо $A = \langle x\rangle$, $B = \langle x\rangle\langle a^2\rangle\langle b^2\rangle = \langle x\rangle G'$. Тоді $|[A; B]| > 2$ і за означенням УЩН[ )-груп $[A; B) \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $N \not\geq G'$. З іншого боку, $[\langle x\rangle, G] = G'$, що суперечить умові $N \not\geq G'$. Отже, G не може бути групою розглядуваного типу. Всі випадки розглянули. Необхідність доведено.

Достатність перевіряється безпосередньо. Теорему доведено.

Теорема 2. *Ненільпотентні локально ступінчасті УЩН[ )-групи G вичерпуються групами типів:*

1) $G = (\langle a\rangle \leftthreetimes \langle b\rangle) \times \langle z\rangle$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $|b| = q^{\beta}$, $\beta > 0$, $|z| \in \{1, r\}$, q *і* r — *прості числа*, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a\rangle, \langle b\rangle] = \langle a\rangle$, $Z(G) = \langle b^q\rangle \times \langle z\rangle$; *при* $|z| = p$ $\beta < 3$;

2) $G = (\langle a\rangle \times \langle z\rangle)\langle x\rangle$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $\langle z, x\rangle$ — *група кватерніонів порядку* 8, $x^{-1}ax = a^{-1}$;

3) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes (\langle x\rangle \leftthreetimes \langle z\rangle)$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $|x| = q^{\Delta}$, $\Delta > 2$, $|z| = q$ — *просте число*, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[x, z] = x^{q^{\Delta-1}}$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$;

4) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes (\langle x\rangle \leftthreetimes \langle z\rangle)$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $|x| = q^2$, $|z| = q$ — *непарне просте число*, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $[x, z] = x^q$, $[a, x^q] = [a, z] = 1$;

5) $G = \langle a\rangle \leftthreetimes \langle x\rangle$, $|a| = p$ — *непарне просте число*, $|x| = qr$, q *і* r — *різні прості числа*, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, q)$, $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, r)$, $[\langle a\rangle, \langle x\rangle] = \langle a\rangle$, $Z(G) = 1$;

6) $G = P \leftthreetimes \langle x\rangle$ — *ненільпотентна група Міллера – Морено*, P — *група типу* (p, p), $|x| \in \{q, q^2\}$, $Z(G) = \langle x^q\rangle$, $p \neq 3$, $q > 2$;

7) $G = P \leftthreetimes \langle x\rangle$, P — *група типу* (p, p), $|x| = qr$, $P \leftthreetimes \langle x^q\rangle$ *та* $P \leftthreetimes \langle x^r\rangle$ — *ненільпотентні групи Міллера – Морено*;

8) $G = P \leftthreetimes \langle x\rangle$, P — *група типу* (p, p), $|x| \in \{q^2, q^3\}$, $P \leftthreetimes \langle x^q\rangle$ — *ненільпотентна група Міллера – Морено*;

9) $G = P \leftthreetimes \langle x \rangle) \times \langle z \rangle$, P — *група типу* (p, p), $P \leftthreetimes \langle x \rangle$ — *ненільпотентна група Міллера – Морено,* $|x| = q$, $|z| = r$, $p \neq r$.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група. Тоді за лемою 1.2.2 з [2] G задовольняє умову теореми 2.3.1 з [2] і може бути лише групою одного з типів 1 – 17 згаданої теореми.

Якщо G — група одного з типів 1, 10, 11, 14 теореми з [2], то G — група одного з типів 1 – 4 розглядуваної теореми відповідно.

Група G кожного з типів 2 чи 4 теореми 2.3.1 з [2] є групою типу відповідно 5 чи 6 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 5 теореми 2.3.1 з [2] і $|P| = p^3$. Тоді $|[A; P]| > 2$, де $|A| = p$ і за означенням УЩН[ )-груп $[A; P) \ni N \lhd G$, що суперечить мінімальності нормальності P в G. З цього випливає, що P — група типу (p, p) і G — група типу 7 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 6 теореми 2.3.1 з [2]. Як і вище, маємо, що P — група типу (p, p) і G — група типу 8 розглядуваної теореми.

Нехай G — група типу 7 теореми 2.3.1 з [2]. Тоді, як і в групі G типу 5 теореми 2.3.1 з [2], $[A; P) \ni N \lhd G$, $|A| = p$, $A \ntriangleleft G$. Але тоді $|N| = p^2$ і P — нормальна силовська p-підгрупа експоненти p групи Шмідта G. За будовою груп Шмідта (див., наприклад, теорему 2.1.1 з [3]) P не містить нормальних G підгруп порядку p^2. Отже, G не може бути групою типу 7 теорми 2.3.1 з [2].

Нехай G — група типу 8 теореми 2.3.1 з [2]. Припустимо, що $|z| = p$. Нехай $B = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \times \langle z \rangle$. При цьому B — група типу (p, p, p). Нехай $A = \langle az \rangle$. Зрозуміло, що $|[A; B]| > 2$ і за означенням УЩН[ )-груп $[A; B) \ni N \lhd G$. Зрозуміло, що $|N| \in \{p, p^2\}$. З будови груп Міллера – Морено $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle x \rangle$ (див., наприклад, твердження 1.1.1 з [4]) випливає, що 2 — показник p за модулем q, $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — мінімальна нормальна підгрупа з G. Легко встановити, що $N \nless \langle a \rangle \times \langle b \rangle$. Тоді $\left|(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \cap N\right| \leq p$. Оскільки $\langle a \rangle \times \langle b \rangle$ — мінімальна нормальна підгрупа з G, то $(\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \cap N = 1$ і тому $|N| = p$. Отже, $N = A = \langle az \rangle$. Далі легко встановити, що $[A, \langle x \rangle] \leq \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ і $[A, \langle x \rangle] \neq 1$. З іншого боку, $[A, \langle x \rangle] \leq G' \cap A = 1$, що неможливо. Це означає, що $|z| = r \neq p$ і, значить, G — група типу 9 розглядуваної теореми.

Нехай G — група одного з типів 9, 12, 13, 15 – 17 теореми 2.3.1 з [2]. Тоді $G = G' \leftthreetimes \langle x \rangle$, $\langle x \rangle$ містить ненормальну в G силовську q-підгрупу A, $[G', A] = G'$. Покладемо $B = G' \leftthreetimes A$. Тоді $|[A; B]| > 2$ і за означенням УЩН[ )-груп $[A; B) \ni N \lhd G$. З цього випливає, що $[N, G']$ містить $[A, G']$ і строго належить G', що неможливо. Отже, G не може бути групою жодного із згаданих типів.

Нехай, нарешті, G — група типу 3 теореми 2.3.1 з [2]. Тоді $|[\langle x \rangle; G]| > 2$ і за означенням УЩН[ )-груп $[\langle x \rangle; G) \ni N \lhd G$, що в групі Шмідта G неможливо (див., наприклад, теорему 2.1.1 з [3]). Отже, G не може бути групою типу 3 теореми 2.3.1 з [2]. Всі випадки розглянуто. Необхідність доведено.

Достатність перевіряється безпосередньо. Теорему доведено.

Зауваження. Із теорем 1 і 2 легко одержати опис УЩН( )-груп, тобто груп G, у яких для будь-якої пари підгруп A та B таких, що A — власна немаксимальна підгрупа з B, існує нормальна підгрупа N із G і $A < N < B$.