УДК 531.36

С. П. Сосницький (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО НЕСТІЙКІСТЬ РІВНОВАГИ НЕГОЛОНОМНИХ СИСТЕМ

We establish a criterion of equilibrium instability of nonholonomic systems in which gyroscopic forces may dominate over potential forces. We show that, similarly to the case of holonomic systems, the evident domination of gyroscopic forces over potential ones is not sufficient to ensure the equilibrium stability of nonholonomic systems.

Встановлено критерій нестійкості рівноваги неголономних систем, в яких гіроскопічні сили можуть домінувати над потенційними. Показано, що аналогічно до випадку голономних систем явне домінування гіроскопічних сил над потенційними не є достатнім, щоб забезпечити стійкість рівноваги неголономних систем.

Питанням стійкості рівноваги неголономних систем присвячено ряд робіт, з якими, зокрема, можна ознайомитись у відомому огляді А. В. Карапетяна і В. В. Румянцева [1] (див. також роботи [2 – 5]). Обмежимось лише тим класом неголономних систем, для яких положення рівноваги, що розглядається, є критичною точкою відповідного лагранжіана (системи Уіттекера). Для таких систем Уіттекер в рамках теорії малих коливань звів задачу про стійкість до аналогічної задачі для голономних систем з меншою розмірністю фазового простору [6].

При всій специфічності систем Уіттекера вони цікаві тим, що при деяких додаткових обмеженнях до них можна застосувати методи, які використовуються при дослідженні стійкості голономних систем. Для систем Уіттекера неголономність в деякому сенсі можна інтерпретувати як мале збурення голономної системи. Виходячи з цих міркувань, будемо використовувати підхід, який вже застосовувався автором при дослідженні голономних систем [7]. У відповідності з ним розглядаються неголономні системи, для яких має місце переважання гіроскопічних сил над потенційними, що і становить елемент новизни порівняно із згаданими вище роботами.

1. Розглянемо неголономну систему, яку запишемо у вигляді

$$B(q)\frac{dq}{dt} = \mathbf{0}, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q} - \frac{\partial L}{\partial q} = B^T(q)\boldsymbol{\lambda}, \qquad \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_l)^T, \tag{2}$$

де $B(q) = (b_{ij}(q))$ — матриця розмірності $l\times n$, $i=1,\ldots,l$, $j=1,\ldots,n$, $l<n$, $\boldsymbol{\lambda}$ — множники в'язей, $L(q,\dot q)$, $B(q)\in C^1(D_q\times R^n_{\dot q})$, а лагранжіан L визначається виразом

$$L(q,\dot q) = L_2(q,\dot q) + L_1(q,\dot q) + L_0(q) = \\ = \frac{1}{2}\dot q^T A(q)\dot q + f(q)^T\dot q + L_0(q). \tag{3}$$

Вважатимемо, що квадратична форма $L_2(\mathbf{0},\dot q)$ додатно визначена, $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $L_0(\mathbf{0}) = 0$; $\frac{\partial L_0}{\partial q}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ і точка $q = \dot q = \mathbf{0}$ тим самим є станом рівноваги системи (1) – (3).

Неінтегровні співвідношення (1), які обмежують узагальнені швидкості системи $(\operatorname{rank} B(q) = l)$, є неголономними в'язями.

Позначимо обмеження функції $L_1(q,\dot q) = f(q)^T\dot q$ на множину в'язей (1) через $\tilde{L}_1 = f^*(q)^T \dot{q}$. Кососиметричну матрицю, що характеризує відповідну структуру гіроскопічних сил, позначимо через

$$G^*(q) = (f_{ij}^*(q)) = \left(\frac{\partial f_i^*}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j^*}{\partial q_i}\right), \quad i, j = \overline{1, n-l}.$$

Систему (1)–(3) перетворимо до вигляду, більш зручного для дослідження стійкості. Разом з тим твердження, що формулюються нижче, віднесемо до вихідних рівнянь (1)–(3).

Оскільки $\operatorname{rank} B(q) = l$, то рівняння в'язей (1) завжди можна розв'язати відносно будь-яких l компонент вектора узагальнених швидкостей. Без обмеження загальності міркувань вважатимемо, що такими є $\dot{q}_{n-l+1}, \ldots, \dot{q}_n$. Зображаючи матрицю $B(q)$ у вигляді

$$B(q) = B_0 + B_1,$$

де $B_0 = B(\mathbf{0})$, $B_1 = O(\|q\|)$, в системі (1)–(3) зробимо заміну

$$B_0 q = z, \quad z = (z_1, \ldots, z_l)^T. \tag{4}$$

Переписуючи рівняння в'язей (1) у вигляді

$$B_0 \dot{q} = -B_1 \dot{q} \tag{5}$$

і розв'язуючи співвідношення (4) відносно координат $q_{n-l+1}, \ldots, q_n$, замість (5) отримуємо

$$\dot{z} = B^* \dot{q}^*, \quad B^* = (b_{i\alpha}^*), \quad i = \overline{1, l}, \quad \alpha = \overline{1, n-l}. \tag{6}$$

де $B^*(q^*, z)$ — матриця розмірності $l \times (n-l)$, $B^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$, $q = (q_1, \ldots \ldots, q_{n-l})^T$.

Позначивши $(q^*, z) = w = (w_1, \ldots, w_n)^T$, вихідному лагранжіану $L(q, \dot{q})$ надамо вигляду

$$L^*(w, \dot{w}) = \frac{1}{2} \dot{w}^T A^*(w) \dot{w} + g(w)^T \dot{w} + L_0^*(w),$$

а рівняння в'язей запишемо у вигляді

$$\dot{w}_{n-l+i} = \sum_{\alpha=1}^{n-1} b_{i\alpha}^*(w) \dot{w}_\alpha, \quad b_{i\alpha}^*(\mathbf{0}) = 0, \quad i = \overline{1, l}. \tag{7}$$

Виключаючи в (2) з урахуванням (1), (4)–(7) множники в'язей за схемою Воронця [8, 9], з точністю до позначень одержуємо [10]

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Theta_2}{\partial \dot{w}_\alpha} = \frac{\partial(\Theta_2 + L_0^*)}{\partial w_\alpha} + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial(\Theta_2 + L_0^*)}{\partial w_{n-l+i}} b_{i\alpha}^* +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{\kappa=1}^{n-l} \Theta_1 \beta_{i\alpha\kappa} \dot{w}_\kappa + \sum_{\kappa=1}^{n-l} g_{\alpha k} \dot{w}_\kappa, \quad \alpha = \overline{1, n-l}, \tag{8}$$

де

$$\beta_{i\alpha\kappa} = \frac{\partial b_{i\alpha}^*}{\partial w_\kappa} - \frac{\partial b_{i\kappa}^*}{\partial w_\alpha} + \sum_{\mu=1}^{l} \left(\frac{\partial b_{i\alpha}^*}{\partial w_{n-l+\mu}} b_{\mu\kappa}^* - \frac{\partial b_{i\kappa}^*}{\partial w_{n-l+\mu}} b_{\mu\alpha}^*\right), \quad \beta_{i\alpha\kappa} = -\beta_{i\kappa\alpha},$$

$$g_{\alpha\kappa} = \frac{\partial g_\kappa}{\partial w_\alpha} - \frac{\partial g_\alpha}{\partial w_\kappa} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \left[\left(\frac{\partial g_{n-l+i}}{\partial w_\alpha} b_{i\kappa}^* - \frac{\partial g_{n-l+i}}{\partial w_\kappa} b_{i\alpha}^* \right) + \left(\frac{\partial g_\kappa}{\partial w_{n-l+i}} b_{i\alpha}^* - \frac{\partial g_\alpha}{\partial w_{n-l+i}} b_{i\kappa}^* \right) \right] +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \sum_{\mu=1}^{l} \frac{\partial g_{n-l+\mu}}{\partial w_{n-l+i}} (b_{\mu\kappa}^* b_{i\alpha}^* - b_{\mu\alpha}^* b_{i\kappa}^*), \qquad g_{\alpha\kappa} = -g_{\kappa\alpha}.$$

Величини Θ_2 і Θ_1, які входять до рівняння (8), одержуємо відповідно з $L_2^* = \frac{\dot w^T A^* \dot w}{2}$ і $\frac{\partial L_2^*}{\partial \dot w_{n-l+i}}$ за допомогою вилучення $\dot w_{n-l+i}$ із співвідношень (7).

Розглянемо в R^n гіперплощину π, що визначається векторним рівнянням

$$B(\mathbf{0})\, q = \mathbf{0},$$

і позначимо обмеження довільної функції $\Psi(q)$ на π через $\hat\Psi(q)$.

Теорема 1. *Припустимо, що існує таке число* $\varepsilon > 0$ $(D_q \supset \bar s_\varepsilon = \{ q \in R^n, \| q \| \le \varepsilon \})$, *при якому виконуються умови:*

1) *функція* $L_0(q)$ *допускає зображення у вигляді*

$$L_0(q) = L_0^{(m)}(q) + R(q), \qquad R(q) = o(\| q \|^m) \quad \forall\, q \in s_\varepsilon,$$

де $L_0^{(m)}(q)$ *— однорідна функція степеня* $m > 2$;

2) $L_0^{(m)}(-\lambda q) = -\lambda^m L_0^{(m)}(q)$, $\mathrm{const} = \lambda > 0$;

3) $\hat L_0^{(m)}(q) \not\equiv 0$;

4) $\det G^*(\mathbf{0}) \ne 0$;

5) $\lim\limits_{\|q\| \to 0} \left\| \frac{\partial R}{\partial q} \right\| \|q\|^{-m+1-\alpha} = 0$, $\mathrm{const} = \alpha \in \,]0, 1[$.

Тоді положення рівноваги $q = \dot q = \mathbf{0}$ *системи* (1) – (3) *нестійке.*

Доведення. З допомогою лінійної неособливої заміни узагальнених координат

$$x = \Phi(\tilde w), \qquad \tilde w = (w_1, \ldots, w_{n-l})^T,$$

рівняння (7), (8) зводимо до вигляду

$$\dot x = \frac{\partial H}{\partial p},$$

$$\dot y = O(\|x \oplus y)\|) \left\| \frac{\partial H}{\partial p} \right\|, \tag{9}$$

$$\dot p = -\frac{\partial H}{\partial x} + \mathcal{G} \frac{\partial H}{\partial p} + o(\|x \oplus y\|^{m-1+\alpha}) + O(\|p\|^2).$$

Тут

$$H(x, y, p) = \frac{1}{2} [\|p\|^2 + p^T C(x, y)\, p] - \tilde L_0(x, y) = h = \mathrm{const} \tag{10}$$

вздовж розв'язків системи (9), $C(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0$, $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_{n-l})^T$, $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots$ $\ldots, y_l)^T = (w_{n-l+1}, \ldots, w_n)^T$, а $\mathcal{G}$ означаає кососиметричну матрицю таку, що $\det \mathcal{G}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) \neq 0$. У відповідності з вихідними припущеннями щодо лагранжіана L маємо $C(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = O(\|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}\|)$, $\mathcal{G}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) - \mathcal{G}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = O(\|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}\|)$.

Розглянемо множини

$$\Omega^* = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) \in s_\varepsilon^* =$$

$$= \{\boldsymbol{x} \in R^{n-l},\ \boldsymbol{y} \in R^l,\ \boldsymbol{p} \in R^{n-l},\ \|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y} \oplus \boldsymbol{p}\| < \varepsilon\}:$$

$$H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) = h \leq 0\},$$

$$\Lambda^* = \{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) \in s_\varepsilon^* : H(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p}) = h \leq 0,\ \varphi > 0\},$$

де

$$\varphi = \boldsymbol{x}^T \mathcal{G}_0\, \mathcal{G}^{-1} \boldsymbol{p} - \sigma \|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}\|^{m/2+1} e^{-\|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}\|^\alpha} - \|\boldsymbol{y}\|^{(m+1)/2},$$

$$0 < \sigma = \text{const}, \qquad \mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(\mathbf{0}, \mathbf{0}).$$

Згідно з умовою 2 теореми $\Omega^* \neq \varnothing$. При належному виборі сталої σ множина Λ^* також непорожня. Щоб довести це, достатньо скористатися схемою, запропонованою в [3], взявши до уваги той факт, що

$$\mathcal{G}_0\, \mathcal{G}^{-1} = E + C^*(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}), \qquad C^*(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0,$$

де E — одинична матриця.

З урахуванням умови 5 теореми на множині Ω^* рівняння (9) набирають вигляду

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}},$$

$$\dot{\boldsymbol{y}} = O(\|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y})\|) \left\| \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} \right\|, \tag{11}$$

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial \tilde{L}_0^{(m)}}{\partial \boldsymbol{x}} + \mathcal{G} \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} + o(\|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}\|^{m-1+\alpha}).$$

Обчислимо похідну по t функції $V = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{p})$ вздовж векторного поля, що визначається рівнянням (9). Обмежуючи розгляд похідної множиною Ω^*, на підставі (11) одержуємо

$$\frac{dV}{dt} = \left\{ \|\boldsymbol{p}\|^2 + \boldsymbol{x} \frac{\partial \tilde{L}_0^{(m)}}{\partial \boldsymbol{x}} - \right.$$

$$- \sigma e^{-\|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}\|^\alpha} \|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}\|^{m/2-1} \left[\left(\frac{m}{2} + 1 \right) - \alpha \|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}\|^\alpha \right] (\boldsymbol{x}\dot{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{y}\dot{\boldsymbol{y}}) -$$

$$\left. - \frac{m+1}{2} \|\boldsymbol{y}\|^{(m+1)/2-2} \boldsymbol{y}\dot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{x}^T \mathcal{G}_0 \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}} + o(\|\boldsymbol{x} \oplus \boldsymbol{y}\|^{m+\alpha}) \right\}. \tag{12}$$

Розв'язуючи (10) відносно $\tilde{L}_0^{(m)}$ і підставляючи отриманий вираз у рівність (12), останню переписуємо у вигляді

$$\frac{dV}{dt} = \left\{\left(\frac{m}{2}+1\right)\left[\|p\|^2 - \sigma e^{-\|x\oplus y\|^\alpha}\|x\oplus y\|^{m/2-1} x p\right] + \right.$$

$$+ \alpha\sigma x p\,\|x\oplus y\|^{m/2-1+\alpha} - mh - \frac{m+1}{2}\|y\|^{(m+1)/2-2} y\dot{y} -$$

$$\left. - y\frac{\partial \tilde{L}_0^{(m)}}{\partial y} + x^T \mathcal{G}_0 \frac{\partial H}{\partial p} + o(\|x\oplus y\|^{m+\alpha})\right\}. \qquad (13)$$

Оскільки, згідно з визначенням множини Λ^*,

$$x^T \mathcal{G}_0\, \mathcal{G}^{-1} p - \sigma\|x\oplus y\|^{m/2+1} e^{-\|x\oplus y\|^\alpha} - \|y\|^{(m+1)/2} > 0, \qquad (14)$$

$$\|y\|^{(m+1)/2} < \sigma_1\|x\oplus y\|^{m/2+1}, \quad 0 < \sigma_1 = \mathrm{const},$$

то як наслідок з (14) маємо

$$x^T(E + C^*(x,y))p - \sigma\|x\oplus y\|^{m/2+1} e^{-\|x\oplus y\|^\alpha} > 0,$$

а отже,

$$\|p\| > \sigma\|x\oplus y\|^{m/2} e^{-\|x\oplus y\|^\alpha} + O(\|x\oplus y\|^{m/2+1}) \qquad \forall (x,y,p)\in\Lambda^*. \qquad (15)$$

Зобразимо рівність (13) у вигляді

$$\frac{dV}{dt} = \left\{\left(\frac{m}{2}+1\right)\|p\|\left[\|p\| - \sigma\|x\oplus y\|^{m/2} e^{-\|x\oplus y\|^\alpha}\frac{\|x\|}{\|x\oplus y\|}\cos(\widehat{x,p})\right] + \right.$$

$$+ \alpha\sigma\|x\oplus y\|^{m/2-1+\alpha} x p - mh - \frac{m+1}{2}\|y\|^{(m+1)/2-2} y\dot{y} -$$

$$\left. - y\frac{\partial \tilde{L}_0^{(m)}}{\partial y} + x^T \mathcal{G}_0 \frac{\partial H}{\partial p} + o(\|x\oplus y\|^{m+\alpha})\right\}. \qquad (16)$$

Згідно з (15) вираз у квадратних дужках у правій частині рівності (16) задовольняє нерівність

$$\left[\|p\| - \sigma\|x\oplus y\|^{m/2} e^{-\|x\oplus y\|^\alpha}\frac{\|x\|}{\|x\oplus y\|}\cos(\widehat{x,p})\right] >$$

$$> \sigma\|x\oplus y\|^{m/2} e^{-\|x\oplus y\|^\alpha}\left(1 - \frac{\|x\|}{\|x\oplus y\|}\cos(\widehat{x,p})\right) + O(\|x\oplus y\|^{m/2+1}).$$

Беручи до уваги останню, а також друге векторне рівняння системи (11), з урахуванням визначення множини Λ^* та наслідків, які з нього випливають, на підставі (16) одержуємо оцінку

$$\frac{dV}{dt} > \left[\alpha\sigma^2\|x\oplus y\|^{m+\alpha} + O(\|x\oplus y\|^{m+1/(m+1)}) + \right.$$

$$\left. + o(\|x\oplus y\|^{m+\alpha}) + x^T\mathcal{G}_0\frac{\partial H}{\partial p}\right].$$

Вибираючи $\alpha \in\,]0, \delta[$, де $\delta = \min\left(\frac{m}{2}-1, \frac{1}{m+1}\right)$, отриману оцінку подаємо у вигляді

$$\frac{dV}{dt} > \left[\alpha^* \|x \oplus y\|^{m+\alpha} + x^T \mathcal{G}_0 \frac{\partial H}{\partial p}\right], \quad 0 < \alpha^* = \text{const}. \tag{17}$$

Перший доданок у квадратних дужках правої частини нерівності (17) додатний. Що стосується другого доданка, то він, звичайно, може набувати як додатних, так і від'ємних значень.

Перетворимо третє векторне рівняння системи (11). Спочатку помножимо його ліву і праву частини на матрицю $\mathcal{G}^{-1}$, а потім на матрицю $\mathcal{G}_0$. В результаті отримаємо

$$\mathcal{G}_0 \mathcal{G}^{-1} \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial \tilde{L}_0^{(m)}}{\partial x} + \mathcal{G}_0 \frac{\partial H}{\partial p} + o(\|x \oplus y\|^{m-1+\alpha}). \tag{18}$$

Зауважуючи, що $\dfrac{\partial H}{\partial p} = \dot{x}$, зробимо в системі (18) заміну $\mathcal{G}_0 \mathcal{G}^{-1} p - \mathcal{G}_0 x = \mathcal{G}_0 z$. З урахуванням умови 2 теореми, а також оцінки $\dfrac{d(\mathcal{G}_0 \mathcal{G}^{-1})}{dt} = O(\|p\|)$ з (18) одержуємо

$$\mathcal{G}_0 \dot{z} = \frac{\partial \tilde{L}_0^{(m)}}{\partial z} + o(\|z\|^{m-1+\alpha}) \qquad \forall (x, p) \in \Omega^*. \tag{19}$$

Помножимо обидві частини рівності (19) на z^T. В результаті одержимо

$$z^T \mathcal{G}_0 \dot{z} = m \tilde{L}_0^{(m)}(z) + o(\|z\|^{m+\alpha}). \tag{20}$$

З цієї рівності випливає, що фазові траєкторії системи (19) мають ту властивість, що як тільки відповідна зображаюча точка траєкторії знаходиться в межах області

$$\omega = \{z \in s_\varepsilon : \tilde{L}_0^{(m)}(z) - \mu_1 \|z\|^m > 0\},$$

де μ_1 — достатньо мала додатна стала, то вираз $z^T \mathcal{G}_0 \dot{z}$ додатний.

З іншого боку, структура множини Λ^*, з урахуванням нерівностей (14), (15), така, що звуження Λ^* на R_x^n якраз і містить значення x, які належать області типу ω. Зауважимо, зокрема, що система (19) — результат перетворення системи (11), причому $\|z\| = \|x\| + O(\|x\|)$ $\forall x \in \Lambda^*$. Таким чином, при належному виборі початкових умов область Λ^* перетинається множиною траєкторій Γ системи (11), які задовольняють нерівність

$$x^T \mathcal{G}_0 \dot{x} > 0 \qquad \forall \gamma \subset \Gamma \cap \Lambda^*, \quad \Gamma \cap \Lambda^* \neq \varnothing. \tag{21}$$

На підставі (17), (21) маємо

$$\frac{dV}{dt} > 0 \qquad \forall \gamma \subset \Gamma \cap \Lambda^*. \tag{22}$$

Таким чином, на траєкторії $\gamma \subset \Gamma \cap \Lambda^*$ функція V не може дорівнювати нулю, а отже, на γ виконується нерівність (14). Останню, аналогічно роботі [3], запишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}\|x\|^2 > \mu_2 (\|x\|^2)^{(m+2)/4}, \quad 0 < \mu_2 = \text{const}, \tag{23}$$

звідки робимо висновок про нестійкість рівноваги $q = \dot{q} = 0$ системи (1)–(3).

Наслідок 1. *Якщо неголономна система* (1)–(3) *є системою Чаплигіна, то умовою* 3 *теореми* 1 *нехтуємо.*

Наслідок 2. *Якщо неголономна система* (1)–(3) *вироджується в голономну:* $B(q) = 0$, *то умовою* 3 *теореми* 1 *нехтуємо, а в умові* 4 *матрицю* G^* *замінюємо на матрицю*

$$G = (f_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j} - \frac{\partial f_j}{\partial q_i}\right), \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Наслідок 3. *При виконанні умов теореми* 1 *многовид положень рівноваги системи* (1)–(3), *що визначається рівняннями*

$$\frac{\partial L_0}{\partial q} + B^T(q)\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}, \qquad \dot{q} = \mathbf{0}, \tag{24}$$

нестійкий.

Справедливість наслідку випливає із співвідношень (15) і (23).

Наслідок 4. *В умовах теореми* 1 *існують розв'язки, що при* $t > 0$ *залишають окіл положення рівноваги, задовольняючи при цьому оцінку*

$$\|q(t)\| > \mu_1^* \left[\|q(0)\|^{-(m-2)/2} - \mu_2^* \frac{m-2}{4} t\right]^{-2/(m-2)},$$

$$0 < \mu_i^* = \text{const}, \quad i = 1, 2.$$

Справедливість наслідку випливає з (23).

Зауваження. Нехай функція $L_0(q)$ аналітична в околі точки $q = \mathbf{0}$, тобто

$$L_0(q) = L_0^{(m)}(q) + L_0^{(m+1)}(q) + \ldots, \quad m \geq 3,$$

і форма найменшого виміру $L_0^{(m)}(q)$ є непарною. Тоді умови 1, 2, 5 теореми 1 виконуються автоматично.

2. Нехай на систему (1)–(3) додатково діють дисипативні сили. Тоді векторне рівняння (2) набирає вигляду

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} + B^T(q)\boldsymbol{\lambda}, \tag{25}$$

де $F = \dot{q}^T K(q)\dot{q}$ — дисипативна функція Релея, $K(q) \in C(D_q)$.

Як переконаємось нижче, при наявності дисипативних сил нестійкість рівноваги може мати місце при більш слабких обмеженнях на лагранжіан $L(q, \dot{q})$.

Визначаємо множини

$$\omega = \{q \in s_\varepsilon = \{q \in R^n, \|q\| < \varepsilon\} : L_0(q) > 0\},$$

$$\Omega^- = \{(q, \dot{q}) \in s_\varepsilon^* =$$

$$= \{(q, \dot{q}) \in D_q \times R^n, \|q \oplus \dot{q}\| < \varepsilon\} : L_2 - L_0 = h < 0\}.$$

Теорема 2. *Припустимо, що існує таке число* $\varepsilon > 0$ $(D_q \supset \bar{s}_\varepsilon)$, *при якому виконуються умови:*

1) $\omega \neq \varnothing$, $0 \in \partial\omega$;

2) $\dfrac{\partial L_0}{\partial q} + B^T(q)\boldsymbol{\lambda} \neq \mathbf{0} \quad \forall\, q \in \omega$;

3) $F(q, \dot{q}) > 0 \quad \forall\, q \in s_\varepsilon \setminus \{0\}, \quad \|\dot{q}\| \neq 0$.

Тоді положення рівноваги $q = \dot{q} = \mathbf{0}$ *системи* (1), (3), (25) *нестійке.*

Доведення. Розглянемо функцію $V = (L_2 - L_0)$. Для її похідної вздовж векторного поля системи (25) маємо

$$\frac{dV}{dt} = -2F.$$

На множині Ω^- функція V від'ємна, а її похідна $\dfrac{dV}{dt}$ недодатна. З іншого боку, множина нулів $\dfrac{dV}{dt}$, згідно з умовою 2 теореми 2, не містить на Ω^- цілих траєкторій системи (1), (3), (25). Таким чином, у відповідності з принципом інваріантності Ла-Салля [11, 12] будь-який розв'язок даної системи залишає Ω^-, а тому і окіл s_ε^*, незалежно від того, наскільки малим є вибране збурення рівноваги в початковий момент часу. Отже, маємо всі підстави стверджувати, що стан рівноваги $q = \dot{q} = \mathbf{0}$ системи (1), (3), (25) нестійкий.

Зауваження. Якщо в системі (1), (3), (25) здійснити заміну (4) і звести її до системи Воронця, аналогічної (7), (8), то умова 2 теореми 2 набирає вигляду

$$\frac{\partial L_0^*}{\partial w_\alpha} + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial L_0^*}{\partial w_{n-l+i}} b_{i\alpha}^* \neq 0 \qquad \forall\, w \in \omega^*, \quad \alpha = \overline{1, n-l},$$

де ω^* — образ множини ω у w-просторі.

На відміну від теореми 1, в умовах теореми 2 накладаються обмеження на структуру многовиду положень рівноваги (24). Останній повинен бути таким, що його перетин з Ω^- є порожньою множиною. Крім цього, у розглядуваному випадку з нестійкості положення рівноваги $q = \dot{q} = \mathbf{0}$ ще не випливає нестійкість всього многовиду положень рівноваги (24). Це, зокрема, зумовлюється тією обставиною, що в даній ситуації відсутні співвідношення типу (15), (23). В цьому плані становить певний інтерес таке твердження.

Твердження. *Нехай положення рівноваги* $q = \dot{q} = \mathbf{0}$ *неголономної системи* (1)–(3), *що є критичною точкою лагранжіана* $L(q, \dot{q})$, *нестійке, причому нестійкість має місце і відносно* $\dot{q}$. *Тоді многовид положень рівноваги* (24) *нестійкий.*

Доведення. Оскільки досліджуване положення рівноваги $q = \dot{q} = \mathbf{0}$ нестійке, причому це супроводжується нестійкістю щодо узагальнених швидкостей $\dot{q}$, то величина $\|\dot{q}\|^2$ досягає максимуму η^2 в кулі $\|q \oplus \dot{q}\| \leq \xi^2$, де число ξ — достатньо мале. При цьому у відповідності з визначенням нестійкості і умовами твердження, число η^2 не залежить від мализни початкового відхилення δ системи від положення рівноваги $q = \dot{q} = 0$.

Оскільки, з одного боку, точка $q = \dot{q} = \mathbf{0}$ належить многовиду положень рівноваги, а з іншого — $\dot{q} = \mathbf{0}$ на ньому, то покладаючи $\xi^2 = \eta^2$, робимо висновок, що многовид положень рівноваги нестійкий.

Теореми 1, 2 можна розглядати як аналог теорем Кельвіна [13] для неголономних систем.

1. *Карапетян А. В., Румянцев В. В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем // Итоги науки и техники. Общая механика. – М.: ВИНИТИ, 1983. – Т. 6. – 132 с.
2. *Козлов В. В.* Об устойчивости равновесий неголономных систем // Докл. АН СССР. – 1986. – **288**, № 2. – С. 289–291.
3. *Сосницкий С. П*: Об устойчивости равновесий неголономных систем в одном частном случае // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 4. – С. 144–166.
4. *Сосницкий С. П.* Об устойчивости равновесия неголономных систем // Устойчивость и управление в механических системах. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 70–97.
5. *Bulatovic R.* On the converse of the Lahrange–Dirichlet theorem for nonholonomic nonanalitic systems // C. R. Acad. sci. Paris. Ser. 1. – 1995. – **320**, № 11. – P. 1407–1412.
6. *Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 500 с.
7. *Сосницький С. П.* Про нестійкість консервативних систем з гіроскопічними силами // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 10. – С. 1422–1428.
8. *Воронец П. В.* Об уравнениях движения для неголономных систем // Мат. сб. – 1902. – **22**, № 4. – С. 559–686.
9. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.
10. *Карапетян А. В.* Некоторые задачи устойчивости движения неголономных систем // Теория устойчивости и ее приложения. – Новосибирск, 1979. – С. 184–190.
11. *La Salle J. B.* Stability theory for ordinary differential equations // J. Different. Equat. – 1968. – **4**, № 1. – P. 57–65.
12. *Руш Н., Абетс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
13. *Thomson W., Tait P.* Treatise on natural phylosophy. – Oxford: Clarendon Press, 1867. – Vol. 1. – 727 p.

Одержано 19.11.97,
після доопрацювання — 06.04.98