УДК 517.977

Т. А. Мельник (Одес. ун-т)

ДЕКОМПОЗИЦИЯ СИСТЕМ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЫСТРЫМИ И МЕДЛЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

We obtain decomposition of systems of quasidifferential equations with rapid and slow variables.

Одержано декомпозицію систем квазідиференціальних рівнянь з швидкими і повільними змінними.

Построение аппарата квазидифференциальных уравнений [1] позволило получить многие результаты [2, 3] дифференциального и интегрального исчисления многозначного анализа без использования понятия производной и требования линейности метрического пространства.

В настоящей работе рассматривается декомпозиция систем квазидифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными, из которой, как частные случаи, получены соответствующие результаты для систем дифференциальных уравнений с одно- и многозначными правыми частями.

1. Квазидифференциальные уравнения. Квазидифференциальным уравнением [1] метрического пространства X называется уравнение

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}d(x(t+\Delta),\ g(\Delta,t,x))=0, \tag{1}$$

где $d(\cdot,\cdot)$ — расстояние в пространстве X, $g:[0,\sigma]\times[t_0,t_0+T]\times X\to X$.

Под решением уравнения (1) на промежутке $[t_0, t_0+T]$ понимается абсолютно непрерывное отображение $x(t)$, удовлетворяющее уравнению (1) при почти всех $t\in[t_0, t_0+T]$. Задача Коши состоит в нахождении решения $x(t)$, удовлетворяющего условию $x(t_0)=x_0$.

Отображения $g(\Delta, t, x)$ в квазидифференциальном уравнении (1) будем выбирать из класса квазидвижений. Говорят, что отображение g задает квазидвижение [3], если выполнено условие Д:

Д$_1$) аксиома начальных условий: $g(0, t_0, x_0)=x_0$;

Д$_2$) аксиома непрерывности: $g(\Delta, t, x)$ — непрерывно;

Д$_3$) аксиома квазиприпасовывания: для любого $\Delta\in[0,\sigma]$ выполняются соотношения

$$d(g(\Delta,t,x),G_n)=o(\Delta),\quad \Delta=\sum_{j=1}^{n}\Delta_j,\quad \Delta_j\ge 0,$$

$$G_k=g\left(\Delta_k, t+\sum_{j=1}^{k-1}\Delta_j, G_{k-1}\right),\qquad k=2,3,\ldots,n;\qquad G_1=g(\Delta_1,\ t,\ x).$$

Произвольная динамическая система [4] удовлетворяет условию Д.

2. Постановка задачи. Рассмотрим систему квазидифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &d_1(x_1(t+\Delta,\varepsilon),q_1(\Delta,\ t,\varepsilon t, x_1(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon),\varepsilon))=o(\Delta),\\ &d_2(x_2(t+\Delta,\varepsilon),q_2(\Delta,\ t,\varepsilon t, x_2(t,\varepsilon),x_2(t,\varepsilon),\varepsilon))=\varepsilon\, o(\Delta), \end{aligned}\tag{2}$$

где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_1]$ — малый параметр; $d_i(\cdot,\cdot)$ — метрики в пространствах X_i, $i=1,2$.

В качестве метрических пространств X_i будем рассматривать либо локально компактные, либо полные метрические пространства. Введем метрическое пространство $X = \{x = (x_1, x_2) | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2\}$, расстояние в котором можно задать следующим образом: $d(u, v) = d_1(u_1, v_1) + d_2(u_2, v_2)$ для любых $u, v \in X$. Отображение $q = (q_1, q_2)$ задает квазидвижение в метрическом пространстве X.

Предположим, что известны решения $\varphi(t, \tau, x_0, t_0)$ квазидифференциального уравнения

$$d_1(\varphi(t + \Delta, \tau, x_0, t_0), q_1(\Delta, t, \tau, \varphi(t, \tau, x_0, t_0), y_0, 0)) = o(\Delta),$$
$$\varphi(t_0, \tau, x_0, t_0) = z_0, \tag{3}$$

где $\tau, x_0 = (z_0, y_0)$ — параметры.

Формально подставляя в уравнение (2) вместо $x_1(t, \varepsilon)$ решение уравнения (3), получаем квазидифференциальное уравнение

$$d_2\Big(\bar{x}_2(t+\Delta, \varepsilon), q_2\Big(\Delta, t, \varepsilon t, \varphi\big(t, \varepsilon t, z_0', \bar{x}_2(t, \varepsilon), t_0\big), \bar{x}_2(t, \varepsilon), \varepsilon\Big)\Big) = \varepsilon o(\Delta) \tag{4}$$

для некоторого произвольно выбранного параметра z_0'.

Рассмотрим вспомогательное уравнение

$$d_2(\tilde{x}_2(t+\Delta, \varepsilon), \tilde{q}_2(\Delta, t, \varepsilon t, x_1(\cdot, \varepsilon), \tilde{x}_2(t, \varepsilon), \varepsilon)) = o(\varepsilon \Delta), \tag{5}$$

в котором для любой абсолютно непрерывной функции $\tilde{x}_1(s, \varepsilon) \in Q_1 \subset X_1$, $t \le$ $\le s \le t + \Delta$, оператор $\tilde{q}_2$ определен и удовлетворяет соотношению

$$d_2(\tilde{q}_2(\Delta, t, \varepsilon t, \tilde{x}_1(\cdot, \varepsilon), \tilde{x}_2(t, \varepsilon), \varepsilon), q_2(\Delta, t, \varepsilon t, \tilde{x}_1(t, \varepsilon), \tilde{x}_2(t, \varepsilon), \varepsilon)) = \varepsilon o(\Delta) + \Delta o(\varepsilon). \tag{6}$$

Близость решений $x_2(t, \varepsilon)$ системы (2) и решения $\bar{x}_2(t, \varepsilon)$ уравнения (4) устанавливает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть существуют такие константы* $\gamma > 0$ *и* $\lambda > 0$, *что выполняются условия:*

1) *отображения* $q_1(\delta, t, \tau, x_1, x_2, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, *и* $\tilde{q}_2(\delta, t, \tau, u_1(\cdot), u_2, \varepsilon)$ *непрерывны, удовлетворяют условию Липшица по* δ *с константами* $\lambda_i(\varepsilon)$ *и неравенствам*

$$|d_1(q_1(\delta, t, \tau_1, u_1, u_2, \varepsilon), q_1(\delta, t, \tau_2, v_1, v_2, 0)) - d_1(u_1, v_1)| \le$$
$$\le \alpha_1(\delta, \varepsilon)[d_1(u_1, v_1) + d_2(u_2, v_2) + \beta(\varepsilon) + |\tau_1 - \tau_2|],$$
$$\left| d_2(\delta, t, \tau, u_1, u_2, \varepsilon), q_2(\delta, t, \tau, v_1, v_2, \varepsilon)) - d_2(u_2, v_2)\right| \le$$
$$\le \alpha_2(\delta, \varepsilon)[d_1(u_1, v_1) + d_2(u_2, v_2)],$$
$$\left| d_2(\tilde{q}_2(\delta, t, \tau, u_1(\cdot), u_2, \varepsilon), \tilde{q}_2(\delta, t, \tau, v_1(\cdot), v_2, \varepsilon) - d_2(u_2, v_2)\right| \le$$
$$\le \alpha_2(\delta, \varepsilon)[\max_{t \le s \le t+\delta} d_1(u_1(s), v_1(s)) + d_2(u_2, v_2)],$$

где $\alpha_1(\delta, \varepsilon) \le \delta\gamma$; $\alpha_2(\delta, \varepsilon) \le \varepsilon\delta\gamma$; $\lambda_1(\varepsilon) \le \lambda$; $\lambda_2(\varepsilon) \le \varepsilon\lambda$; $\beta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to$ $\to 0$, $u_1, v_1 \in Q_1 \subset X_1$, $u_2, v_2 \in Q_2 \subset X_2$;

2) *решения системы* (3) *определены при* $t \ge t_0$ *и удовлетворяют условию Липшица по* y_0, *т. е.*

$$d_1(\varphi(t, \tau, z_0, y_0', t_0), \varphi(t, \tau, z_0, y_0'', t_0)) \le \lambda d_2(y_0', y_0'');$$

3) *равномерно по* $t_0 > 0$; $z', z'' \in Q_1$, $y_0 \in Q_2$, $t \in [0, L]$, *существует предел*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{\varepsilon\delta}d_2(\tilde{q}_2(\delta, t_0, \tau, \varphi(\cdot, \tau, z', y_0, t_0), y_0, \varepsilon),$$
$$\tilde{q}_2(\delta, t_0, \tau, \varphi(\cdot, \tau, z'', y_0, t_0), y_0, \varepsilon)) = 0. \tag{7}$$

Тогда для любого $\mu > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что если решение* $\bar{x}_2(t, \varepsilon)$ *уравнения* (4) *при* $t \in [t_0, t_0 + L/\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, *находится в* Q_2 *вместе со своей* ρ*-окрестностью, то*

$$d_2(x_2(t, \varepsilon), \bar{x}_2(t, \varepsilon)) \le \mu \tag{8}$$

при $t \in [t_0, t_0 + L/\varepsilon]$, $x_2(t_0, \varepsilon) = \bar{x}_2(t_0, \varepsilon)$.

Замечание **1**. Соответствующий результат для быстрой переменной x_1 может быть получен при введении дополнительных условий [5].

Доказательство теоремы 1 проводится по схеме доказательства [6, 7] соответствующей теоремы для систем дифференциальных уравнений с учетом того, что пространство решений не является, вообще говоря, линейным.

3. Частные случаи. *А. Дифференциальные уравнения с однозначной правой частью.* Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с быстрыми и медленными переменными

$$\frac{dz}{dt} = F(z, y, t, \varepsilon t, \varepsilon), \quad \frac{dy}{dt} = \varepsilon f(z, y, t, \varepsilon t, \varepsilon), \quad z \in R^{n_1}, \quad y \in R^{n_2}. \tag{9}$$

Обозначим через $\bar{z}(t,\tau,x_0,t_0)$ решение задачи

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = F(\bar{z}, y_0, t, \tau, 0). \tag{10}$$

Здесь τ, $x_0 = (z_0, y_0)$ — параметры, $\bar{z}(t_0,\tau,x_0,t_0) = z_0$.

Поставим в соответствие медленной подсистеме (9) систему

$$\frac{d\bar{y}}{dt} = \varepsilon f(\bar{z}(t, \varepsilon t, z_0', \bar{y}, t_0), \bar{y}, t, \varepsilon t, 0). \tag{11}$$

Введем обозначения

$$q_1(\delta, t, \tau, x_1, x_2, \varepsilon) = x_1 + \int_t^{t+\delta} F(x_1, x_2, s, \tau, \varepsilon)\,ds,$$
$$q_2(\delta, t, \tau, x_1, x_2, \varepsilon) = x_2 + \varepsilon\int_t^{t+\delta} f(x_1, x_2, s, \tau, \varepsilon)\,ds, \tag{12}$$
$$\tilde{q}_2(\delta, t, \tau, x_1(\cdot), x_2, \varepsilon) = x_2 + \varepsilon\int_t^{t+\delta} f(x_1(s), x_2, s, \tau, 0)\,ds.$$

Очевидно, что системам (9) – (11) соответствуют уравнения (2) – (4) и $z(t, \varepsilon) \equiv x_1(t, \varepsilon)$, $y_1(t, \varepsilon) \equiv x_2(t, \varepsilon)$, $\bar{z}(t,\tau,x_0,t_0) \equiv \varphi(t,\tau,x_0,t_0)$, $\bar{y}(t, \varepsilon) \equiv \bar{x}_2(t, \varepsilon)$. Пусть выполняются следующие условия:

A_1) существуют суммируемые функции $\Lambda(t)$ и $\Gamma(t)$, бесконечно малая $\beta_1(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$ и константы $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$\| F(z_1, y_1, t, \tau_1, \varepsilon) - F(z_2, y_2, t, \tau_2, \varepsilon)\| \le$$
$$\le \Gamma(t)[\| z_1 - z_2 \| + \| y_1 - y_2 \| + |\tau_1 - \tau_2| + \beta_1(\varepsilon)],$$
$$\| F(z, y, t, \tau, \varepsilon)\| \le \Lambda(t), \quad \|f(z, y, t, \tau, \varepsilon)\| \le \Lambda(t),$$

$$\|f(z_1, y_1, t, \tau, \varepsilon)-f(z_2, y_2, t, \tau, 0)\| \le \Gamma(t)[\| z_1 - z_2\| + \| y_1 - y_2\| + \beta_1(\varepsilon)],$$

где $z, z_1, z_2 \in Q_1 \subset R^{n_1}$; $y, y_1, y_2 \in Q_2 \subset R^{n_2}$, $\tau \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, $t \ge 0$, $t_2 \ge$ $\ge t_1 \ge 0$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \Gamma(t)dt \le \gamma(t_2 - t_1), \qquad \int_{t_1}^{t_2} \Lambda(t)dt \le \lambda(t_2 - t_1);$$

A_2) решение $\bar{z}(t,\tau,z_0,y_0,t_0)$ системы (10) определено при $t \ge t_0$, $\tau \in [0, L]$, $z_0 \in Q_1$, $y_0 \in Q_2$ и удовлетворяет условию Липшица по y_0 с константой λ;

A_3) равномерно по $t_0 \ge 0$, $\tau \in [0, L]$; $z_1, z_2 \in Q_1$; $y \in Q_2$ существует предел

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}[f(\bar{z}(s,\tau,z_1,y,t_0),y,s,\tau,0) - f(\bar{z}(s,\tau,z_2,y,t_0),y,s,\tau,0)]ds = 0.$$

Следовательно, выполняются условия 1 – 3, сформулированные в терминах квазидифференциальных уравнений. Таким образом, из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть функции* $F(z, y, t, \tau, \varepsilon)$ *и* $f(z, y, t, \tau, \varepsilon)$ *непрерывны по* τ *и* ε, *измеримы по* t *и удовлетворяют услвиям* $A_1 - A_3$. *Тогда для любого* $\mu > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что если решение* $\bar{y}(t, \varepsilon)$ *при* $t \in [t_0, t_0 + L/\varepsilon]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *находится в области* Q_2 *вместе со своей* ρ*-окрестностью, то выполняется неравенство*

$$\| y(t, \varepsilon) - \bar{y}(t, \varepsilon)\| \le \mu$$

при $t \in [t_0, t_0 + L/\varepsilon]$, $y(t_0, \varepsilon) = \bar{y}(t_0, \varepsilon)$.

***Замечание* 2.** Теорема 2 аналогична теореме из [6], полученной для непрерывных функций $f(z, y, t)$, $F(z, y, t)$ и $z_0' = z(0, \varepsilon)$.

***Замечание* 3.** Аналогичный результат имеет место и для банаховых пространств, т. е. теорема 2 справедлива, если Q_1 и Q_2 — некоторые шары банаховых пространств B_1 и B_2 соответственно.

B. Дифференциальные уравнения с многозначной правой частью [8 – 10]. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с производной Хукухары

$$DZ = F(Z, Y, t, \varepsilon t, \varepsilon), \qquad DY = \varepsilon f(Z, Y, t, \varepsilon t, \varepsilon), \tag{13}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр; $F : Q \to \operatorname{conv}(R^{n_1})$, $f : Q \to \operatorname{conv}(R^{n_2})$, $z \in$ $\in Q_1 \in \operatorname{conv}(R^{n_1})$, $y \in Q_2 \in \operatorname{conv}(R^{n_2})$, $t \in [t_0, t_0 + L/\varepsilon]$, F и f — непрерывные многозначные отображения.

Обозначим через $\bar{Z}(t, \tau, X_0, t_0)$ решение задачи

$$\frac{d\bar{Z}}{dt} = F(\bar{Z}, Y_0, t, \tau, 0), \qquad \bar{Z}(t_0, \tau, X_0, t_0) = Z_0, \tag{14}$$

где τ, $X_0 = \{(z, y) | z \in Z_0, y \in Y_0\}$ — параметры.

В этом случае медленной подсистеме ставится в соответствие система

$$\frac{d\bar{Y}}{dt} = \varepsilon f(\bar{Z}(t, \varepsilon t, Z_0', \bar{Y}, t_0), \bar{Y}, t, \varepsilon t, 0).$$

Используем обозначения (12). Тогда $Z(t, \varepsilon) \equiv x_1(t, \varepsilon)$, $Y(t, \varepsilon) \equiv x_2(t, \varepsilon)$, $\bar{Z}(t, \tau, X_0, t_0) \equiv \varphi(t, \tau, X_0, t_0)$, $\bar{Y}(t, \varepsilon) \equiv \bar{x}_2(t, \varepsilon)$. Пусть выполняются следующие условия:

B_1) существуют константы $\lambda > 0$ и $\gamma > 0$ такие, что

$$h(F(Z_1, Y_1, t, \tau_1, \varepsilon), F(Z_2, Y_2, t, \tau_2, 0)) \le$$
$$\le \gamma[h(Z_1, Z_2) + h(Y_1, Y_2) + \beta_2(\varepsilon) + |\tau_1 - \tau_2|],$$
$$h(f(Z_1, Y_1, t, \tau, \varepsilon), f(Z_2, Y_2, t, \tau, 0)) \le \gamma[h(Z_1, Z_2) + h(Y_1, Y_2) + \beta_2(\varepsilon)],$$
$$h(f(Z, Y, t, \tau, \varepsilon), \{0\}) \le \lambda, \quad h(f(Z_1, Y_1, t, \varepsilon), \{0\}) \le \lambda,$$

где $\beta_2(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$; $Z, Z_1, Z_2 \in Q_1$; $Y, Y_1, Y_2 \in Q_2$;

B_2) решение $\overline{Z}(t, \tau, Z_0, Y_0, t_0)$ задачи (14) удовлетворяет условию Липшица по Y_0, т. е.

$$h(\overline{Z}(t, \tau, Z_0, Y_0', t_0), \overline{Z}(t, \tau, Z_0, Y_0'', t_0)) \le \lambda h(Y_0', Y_0'');$$

B_3) равномерно по $t_0 \ge 0$, $\tau \in [0, L]$, $Z_1, Z_2 \in Q_1$; $Y \in Q_2$ существует предел

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} [f(\overline{Z}(s, \tau, Z_1, Y, t_0), Y, s, \tau, 0) -$$
$$- f(\overline{Z}(s, \tau, Z_2, Y, t_0), Y, s, \tau, 0)]ds = 0.$$

Здесь предел понимается в метрике Хаусдорфа, а интеграл — в смысле обобщенного интеграла Римана. Из теоремы 1 получаем следующую теорему.

Теорема 3. *Пусть для непрерывных многозначных отображений* $F(Z, Y, t, \tau, \varepsilon)$ *и* $f(Z, Y, t, \tau, \varepsilon)$ *выполняются условия* $B_1 - B_3$. *Тогда для любого* $\mu > 0$ *существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что если решение* $\overline{Y}(t, \varepsilon)$ *при* $t \in [t_0, t_0 + L/\varepsilon]$ *и* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *находится в области* Q_2 *вместе со своей* ρ*-окрестностью, то* $h(Y(t, \varepsilon), \overline{Y}(t, \varepsilon)) \le \mu$ *при* $t \in [t_0, t_0 + L/\varepsilon]$.

1. *Панасюк А. И.* О квазидифференциальных уравнениях в метрических пространствах // Дифференц. уравнения. –1985. – **21**, № 8. – С. 1344 – 1353.
2. *Панасюк А. И.* Квазидифференциальные уравнения в полном метрическом пространстве в условиях типа Каратеодори. I, II // Там же. – 1995. – **31**, № 6, 8. – С . 962 – 972; С. 1361 – 1369.
3. *Плотников В. А., Плотникова Л. И.* Частичное усреднение квазидифференциальных уравнений в метрических пространствах // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1444 – 1449.
4. *Зубов В. И.* Устойчивость движения. – М.: Высш. шк., 1973. – 232 с.
5. *Мельник Т. А., Плотников В. А.* Обобщение теоремы А. Н. Тихонова для квазидифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1997. – **33**. – С. 1030 – 1034.
6. *Плотников В. А., Ларбани Муса.* Обоснование одной схемы частичного усреднения для систем с медленными и быстрыми переменными // Там же. – 1992. – № 3. – С. 428 – 432.
7. *Хапаев М. М.* Усреднение в теории устойчивости. – М.: Наука, 1986. – 192с.
8. *De Blassi F. S., Brando Lores, Pito A. J., Iervolino F.* Uniqueness and existence theorems for differential equations with compact convex valued solutions // J. Different. Equat. – 1970. – **4**, № 1. – P. 42 – 54.
9. *Толстоногов А. А.* Дифференциальные включения в банаховом пространстве. – Новосибирск: Наука, 1986. – 295 с.
10. *Плотников А. В.* Усреднение дифференциальных включений с производной Хукухары // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 1. – С. 121 – 125.

Получено 24.01.97,
после доработки — 24.10.97