УДК 517. 43

М. Н. Феллер (Укр НИИМОД, Киев)

ЗАДАЧА РИКЬЕРА ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ, НЕ РАЗРЕШЕННОГО ОТНОСИТЕЛЬНО ИТЕРИРОВАННОГО ЛАПЛАСИАНА ЛЕВИ

For a nonlinear equation $f(U(x), \Delta_L^2 U(x)) = \Delta_L U(x)$ (Δ_L is an infinite-dimensional Laplacian) unresolved with respect to iterated infinite-dimensional Laplacian and for the Riquier problem for this equation, we give a method of solving.

Наведено метод розв'язання нелінійного рівняння $f(U(x), \Delta_L^2 U(x)) = \Delta_L U(x)$ (Δ_L — нескінченновимірний лапласіан), яке розв'язне відносно ітерованого нескінченновимірного лапласіана, та задачі Рік'єра для такого рівняння.

В книге П. Леви [1], в которой положено начало теории уравнений математической физики для функций на бесконечномерных пространствах, встречаются бесконечномерные нелинейные дифференциальные уравнения : в ней приведено общее решение нелинейного уравнения, разрешенного относительно лапласиана Леви

$$\Delta_L U(x) = f(U(x)),$$

где $U(x)$ — искомая функция на гильбертовом пространстве, $f(\xi)$ — заданная функция одной переменной, а решение задачи Дирихле для такого уравнения сведено к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа – Леви.

Для решения нелинейного уравнения П. Леви использует полученное в [1] интересное свойство бесконечномерного лапласиана (см. ниже формулу (2)), из которого, в частности, следует, что лапласиан Леви в определенных функциональных классах является „дифференцированием":

$$\Delta_L [U(x)V(x)] = \Delta_L U(x)V(x) + U(x)\Delta_L V(x).$$

Это свойство позволяет расширить арсенал исследуемых нелинейных уравнений. Так, в [2] предлагается метод решения нелинейного уравнения, не разрешенного относительно лапласиана Леви,

$$f(U(x), \Delta_L U(x)) = F(x),$$

где $U(x)$ — искомая, $F(x)$ – заданная функция на гильбертовом пространстве, $f(\xi, \eta)$ — заданная функция двух переменных, и решения задачи Дирихле для такого уравнения.

В [3] получено решение нелинейного уравнения, разрешенного относительно итерированного лапласиана Леви

$$\Delta_L^2 U(x) = f(U(x)),$$

где $U(x)$ — искомая функция на гильбертовом пространстве, $f(\xi)$ — заданная функция одной переменной, а решение задачи Рикьера для этого уравнения сводится к решению двух задач Дирихле для уравнения Лапласа – Леви

Настоящая статья посвящена решению нелинейного уравнения, не разрешенного относительно итерированного лапласиана Леви, но разрешенного относительно лапласиана Леви

$$f(U(x), \Delta_L^2 U(x)) = \Delta_L U(x),$$

где $U(x)$ — искомая функция на гильбертовом пространстве, $f(\xi, \eta)$ — заданная функция двух переменных, и решению задачи Рикьера для такого уравнения.

Отметим, что утверждения, приведенные в указанных выше работах и в данной статье, показывают сколь разительно отличаются теории бесконечномерных и n-мерных нелинейных дифференциальных уравнений.

1. Пусть H — счетномерное вещественное гильбертово пространство. Рассмотрим скалярные функции $F(x)$ на H, $x \in H$.

Лапласиан для функций на гильбертовом пространстве определен П. Леви [1]. Если функция $F(x)$ дважды сильно дифференцируема в точке x_0, то лапласиан Леви определяется (если он существует) формулой

$$\Delta_L F(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{n=1}^{\pi} \big(F''(x_0) f_k, f_k\big)_H, \tag{1}$$

где $F''(x)$ — гессиан функции $F(x)$, $\{f_k\}_1^\infty$ — выбранный ортонормированный базис в H (см., например, [4]).

Приведем упомянутое выше свойство лапласиана Леви, которое использовалось при решении нелинейных уравнений в [1–3]. Пусть функция

$$F(x) = f(U_1(x), \dots, U_m(x)),$$

где $f(u_1, \dots, u_m)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция m переменных в области значений $\{U_1(x), \dots, U_m(x)\}$ в R^m, $U_j(x)$ — дважды сильно дифференцируемые функции, и $\Delta_L U_j(x)$ существуют $(j = 1, \dots, m)$. Тогда $\Delta_L F(x)$ существует и

$$\Delta_L F(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j}\bigg|_{u_j = U_j(x)} \Delta_L U_j(x). \tag{2}$$

2. Рассмотрим нелинейное уравнение

$$f(U(x), \Delta_L^2 U(x)) = \Delta_L U(x), \tag{3}$$

где $f(\xi, \zeta)$ — заданная функция на R^2.

Теорема. *Пусть $f(\xi, \zeta)$ — дважды дифференцируемая функция двух переменных в области значений $\{U(x), \Delta_L^2 U(x)\}$ в R^2, имеющая ограниченные частные производные. Если $\zeta = \omega(\xi, c_0)$ — решение обыкновенного дифференциального (нелинейного) уравнения*

$$f'_\zeta(\xi, \zeta) \frac{d\zeta}{d\xi} + f'_\xi(\xi, \zeta) = \frac{\zeta}{f(\xi, \zeta)}, \tag{4}$$

то решение уравнения (3) *(в неявной форме) имеет вид*

$$\Phi(U(x), \Psi_0(x), \Psi_1(x)) = \frac{1}{2}\|x\|_H^2, \tag{5}$$

где

$$\Phi(\xi, c_0, c_1) = \int \frac{d\xi}{f(\xi, \omega(\xi, c_0))} + c_1,$$

$\Psi_0(x), \Psi_1(x)$ — *произвольные гармонические функции на* H.

При этом

$$\Delta_L U(x) = f(U(x), \omega(U(x), \Psi_0(x))). \qquad (6)$$

Если, к тому же, выражения (5), (6) *разрешимы относительно* $\Psi_0(x)$ *и* $\Psi_1(x)$ *при значениях* $U(x)$ *и* $\Delta_L U(x)$ *на границе* Γ, $\Psi_0|_\Gamma = \varphi_0(U|_\Gamma, \Delta_L U|_\Gamma)$ ($\varphi_0(\xi, \eta)$ — *функция на* R^2), $\Psi_1|_\Gamma = \varphi_1(\|x\|_H^2|_\Gamma, U|_\Gamma, \Delta_L U|_\Gamma)$, ($\varphi_1(\alpha, \xi, \eta)$ — *функция на* R^3), *то решение задачи Рикьера*

$$f(U(x), \Delta_L^2 U(x)) = \Delta_L U(x) \text{ в } \Omega,$$

$$U(x) = G_0(x), \quad \Delta_L U(x) = G_1(x) \text{ на } \Gamma,$$

где $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, Ω — *ограниченная область пространства* H *с границей* Γ, *сводится к решению двух задач Дирихле для уравнений Лапласа — Леви*

$$\Delta_L \Psi_0(x) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Psi_0|_\Gamma = \varphi_0(G_0(x), G_1(x)),$$

$$\Delta_L \Psi_1(x) = 0 \text{ в } \Omega, \quad \Psi_1|_\Gamma = \varphi_1(\|x\|_H^2|_\Gamma, G_0(x), G_1(x)).$$

Доказательство. Из (5), воспользовавшись формулой (2) при $m = 3$, имеем

$$\Delta_L \Phi(U, \Psi_0, \Psi_1) = \Phi'_\xi(U, \Psi_0, \Psi_1)\Delta_L U + \Phi'_{c_0}(U, \Psi_0, \Psi_1)\Delta_L \Psi_0 +$$

$$+ \Phi'_{c_1}(U, \Psi_0, \Psi_1)\Delta_L \Psi_1 = \frac{1}{2}\Delta_L \|x\|_H^2.$$

Поскольку

$$\Phi'_\xi(\xi, c_0, c_1) = \frac{1}{f(\xi, \omega, (\xi, c_0))},$$

$$\Delta_L \Psi_0(x) = \Delta_L \Psi_1(x) = 0,$$

а согласно (1) $\Delta_L \|x\|_H^2 = 2$, то

$$\Delta_L U(x) = f(U(x), \omega(U(x), \Psi_0(x))).$$

Отсюда, воспользовавшись (дважды) формулой (2) при $m = 2$, получаем

$$\Delta_L^2 U = f'_\xi(U, \omega(U, \Psi_0))\Delta_L U + f'_\zeta(U, \omega(U, \Psi_0))\Delta_L \omega(U, \Psi_0) =$$

$$= f'_\zeta(U, \omega(U, \Psi_0))\Delta_L U +$$

$$+ f'_\zeta(U, \omega(U, \Psi_0))\left[\frac{\partial\omega(U, \Psi_0)}{\partial\xi}\Delta_L U + \frac{\partial\omega(U, \Psi_0)}{\partial c_0}\Delta_L \Psi_0\right].$$

Поскольку $\Delta_L U(x) = f(U(x), \omega(U(x), \Psi_0(x))$, а $\Delta_L \Psi_0(x) = 0$, то

$$\Delta_L^2 U = \left[f'_\xi(U, \omega(U, \Psi_0)) + f'_\xi(U, \omega(U, \Psi_0))\frac{\partial\omega(U, \Psi_0)}{\partial\xi}\right] f(U, \omega(U, \Psi_0)).$$

Но согласно условию теоремы $\omega(\xi, c_0)$ удовлетворяет уравнению (4), т. е.

$$f'_\xi(\xi, \omega(\xi, c_0)) + f'_\zeta(\xi, \omega(\xi, c_0))\frac{\partial\omega(\xi, c_0)}{\partial\xi} = \frac{\omega(\xi, c_0)}{f(\xi, \omega(\xi, c_0))},$$

поэтому

$$\Delta_L^2 U(x) = \omega\left(U(x), \Psi_0(x)\right). \tag{7}$$

Подставляя (7) в (3), с учетом (6) получаем тождество.

Заключительное утверждение теоремы очевидно.

Пример **1.** Найти решение уравнения

$$\left\{U(x)\Delta_L^2 U(x) - \frac{\left[\Delta_L^2 U(x)\right]^n}{nU^n(x)}\right\}^{\frac{1}{2}} = \Delta_L U(x). \tag{8}$$

Для уравнения (8) $f(\xi, \zeta) = \sqrt{\xi\zeta - \dfrac{\zeta^n}{n\xi^n}}$, а уравнение (4) — это

$$\left[\xi^{n+2} - \xi\zeta^{n-1}\right]\frac{d\zeta}{d\xi} - \xi^{n+1}\zeta + \zeta^n = 0$$

и его решение $\zeta = c_0\xi$. Поэтому $f(\xi, \omega(\xi, c_0)) = \sqrt{c_0\xi^2 - \dfrac{c_0^n}{n}}$ и, значит,

$$\Phi(\xi, c_0, c_1) = \frac{1}{\sqrt{c_0}}\operatorname{Arch}\frac{\sqrt{n}\,\xi}{c_0^{(n-1)/2}} + c_1.$$

Воспользовавшись формулой (5), получим решение уравнения (8)

$$U(x) = \frac{\Psi_0^{(n-1)/2}(x)}{n^{1/2}}\operatorname{ch}\sqrt{\Psi_0(x)}\left[\frac{\|x\|_H^2}{2} - \Psi_1(x)\right], \tag{9}$$

где $\Psi_0(x)$, $\Psi_1(x)$ — произвольные гармонические функции.

Пример **2.** Решить задачу Рикьера в единичном шаре для уравнения (8) при $n = 3$:

$$\left\{U(x)\Delta_L^2 U(x) - \frac{\left[\Delta_L^2 U(x)\right]^3}{3U^3(x)}\right\}^{\frac{1}{2}} = \Delta_L U(x), \tag{10}$$

$$U\Big|_{\|x\|_H^2=1} = (T(x - x_0), x - x_0)_H, \quad \Delta_L U\Big|_{\|x\|_H^2=1} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\,(T(x - x_0), x - x_0)_H^{3/2}, \tag{11}$$

где T — положительный вполне непрерывный оператор в H, $x_0 \in H$, $\|x_0\|_H > 1$.

Согласно формуле (9) решение уравнения (10) имеет вид

$$U(x) = \frac{\Psi_0(x)}{\sqrt{3}}\operatorname{ch}\sqrt{\Psi_0(x)}\left[\frac{\|x\|_H^2}{2} - \Psi_1(x)\right], \tag{12}$$

при этом согласно (6)

$$\Delta_L U(x) = \sqrt{\Psi_0(x)U^2(x) - \frac{1}{3}\Psi_0^3(x)}. \tag{13}$$

Из (12), (13) получаем

$$\Psi_0\Big|_{\|x\|_H^2=1} = (T(x - x_0), x - x_0)_H,$$

$$\Psi_0\Big|_{\|x\|_H^2=1} = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{Arch}\sqrt{3}}{(T(x-x_0), x-x_0)_H^{1/2}}.$$

Поскольку согласно (1)

$$\Delta_L(T(x-c_0), x-x_0)_H = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(Tf_k, f_k\right)_H,$$

а T — вполне непрерывный оператор, то

$$\Delta_L(T(x-x_0), x-x_0)_H = 0.$$

По формуле (2) при $m=1$ имеем $\Delta_L\varphi(T(x-x_0), x-x_0)_H = 0$, $\varphi(u)$ — функция на R^1. Поэтому решения задач Дирихле в единичном шаре для уравнений Лапласа – Леви имеют вид:

для задачи $\Delta_L\Psi_0(x) = 0$, $\Psi_0\Big|_{\|x\|_H^2=1} = (T(x-x_0), x-x_0)_H$:

$$\Psi_0(x) = (T(x-x_0), x-x_0)_H, \tag{14}$$

для задачи $\Delta_L\Psi_1(x) = 0$, $\Psi_1\Big|_{\|x\|_H^2=1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\operatorname{Arch}\sqrt{3}}{(T(x-x_0), x-x_0)_H^{1/2}}$:

$$\Psi_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{\operatorname{Arch}\sqrt{3}}{(T(x-x_0), x-x_0)_H^{1/2}}. \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в (12), получаем решение задачи (10), (11):

$$U(x) = (T(x-x_0), x-x_0)_H\left\{\operatorname{ch}\frac{1}{2}(T(x-x_0), x-x_0)_H^{1/2}\left[\|x\|_H^2-1\right] + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{sh}\frac{1}{2}(T(x-x_0), x-x_0)_H^{1/2}\left[\|x\|_H^2-1\right]\right\}.$$

1. *Леви П.* Конкретные проблемы функционального анализа. – М.: Наука, 1967. – 512 с.
2. *Феллер М. Н.* Об одном нелинейном уравнении, не разрешенном относительно лапласиана Леви // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 5. – С. 719 – 721.
3. *Феллер М. Н.* Задача Рикьера для нелинейного уравнения, разрешенного относительно итерированного лапласиана Леви // Там же. – 1998. – **50**, № 11. – С. 1574 – 1577.
4. *Феллер М. Н.* Бесконечномерные эллиптические уравнения и операторы типа П. Леви // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 4. – С. 97 – 140.

Получено 17.01.97