УДК 517.929.4

Д. Я. Хусаинов, Е. Е. Шевеленко (Нац. ун-т им. Т. Шевченко, Киев)

УСТОЙЧИВОСТЬ РАЗНОСТНЫХ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

For systems of difference equations with linear fractional functions on the right-hand sides represented in the unificated vector-matrix form, we obtain stability conditions and calculate a value of radius of disk for the domain of asymptotic stability on the basis of the second Lyapunov method.

Для систем різницевих рівнянь з дробово-раціональними функціями в правій частині, які записані в уніфікованому векторно-матричному вигляді, за допомогою другого методу Ляпунова отримано умови стійкості та обчислено розмір радіуса кулі області асимптотичної стійкості.

Одним из средств, широко используемых при моделировании и исследовании процессов в физике, биологии, технике, являются системы разностных уравнений [1, 2]. Цель моделирования — исследование процессов, описываемых математическими системами, получение критериев устойчивости и вычисление характеристик переходных процессов, в частности области устойчивости положения равновесия [3, 4]. Классическим аппаратом исследования устойчивости является второй (прямой) метод Ляпунова [3, 5 – 9].

Данная работа посвящена исследованию устойчивости нулевого положения равновесия системы разностных уравнений с дробно-рациональной правой частью. В работе система записывается в унифицированном векторно-матричном виде [10]. Исследование устойчивости проводится с использованием квадратичной функции Ляпунова. Получена оценка радиуса шара, вписанного в область асимптотической устойчивости.

Рассмотрим систему разностных уравнений с правой частью, представленной в виде дробно-рациональной функции

$$x(k+1) = \left[E - X(k)D\right]^{-1}\left[A + X(k)B\right]x(k), \qquad k = 0, 1, \ldots . \tag{1}$$

Здесь $x^T(k) = (x_1(k), x_2(k), \ldots, x_n(k))$; E — единичная матрица; B и D — матрицы блочной структуры размерности $n^2 \times n$; $(\cdot)^T$ — знак транспонирования,

$$X(k) = \{X_1(k), X_2(k), \ldots, X_n(k)\},$$

$$B^T = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}, \qquad D^T = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}.$$

Матрица $X_i(k)$ в i-й строке содержит вектор-строку $x^T(k)$, остальные ее элементы нулевые; B_i, D_i, $i = \overline{1, n}$, — постоянные симметричные матрицы; A — постоянная матрица размерности n. Обозначим через $\lambda_{\min}(\cdot)$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ экстремальные собственные числа соответствующих матриц. В качестве векторной и матричной норм будем использовать

$$|x(k)| = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)\right\}^{1/2}, \qquad |A| = \left\{\lambda_{\max}(A^T A)\right\}^{1/2}.$$

Заметим, что при таком выборе норм $|X(k)| = |x(k)|$.

В качестве функции Ляпунова используем квадратичную форму $v(x) = x^T H x$, симметричная положительно определенная матрица H которой выбирается таким образом, чтобы матрица $C = H - A^T H A$ была также положительно определенной [7, 8]. Как следует из теоремы об устойчивости по линейному приближению, для асимптотической устойчивости решения $x(t)$ системы (1) достаточно, чтобы матрица A была асимптотически устойчивой, т. е. чтобы ее собственные числа $\lambda_i(A)$, $i = \overline{1, n}$, лежали внутри единичного радиуса с центром в начале координат.

Вычислим радиус R шара U_R, лежащего в области асимптотической устойчивости. Предварительно докажем ряд утверждений.

Лемма 1. *Для произвольной квадратной матрицы P, для которой существует матрица, обратная к $E + P$, выполняется соотношение*

$$(E+P)^{-1} = E - P(E+P)^{-1}. \tag{2}$$

Доказательство. Раскрыв скобки первого сомножителя в тождественном выражении

$$(E+P)(E+P)^{-1} = E$$

и перенеся второе слагаемое вправо, получим соотношение (2).

Лемма 2. *Для произвольной квадратной матрицы P такой, что $|P| < 1$, выполняется неравенство*

$$|(E+P)^{-1}| < (1-|P|)^{-1}. \tag{3}$$

Доказательство. Использовав соотношение (2) и свойства матричных норм, получим

$$|(E+P)^{-1}| \leq 1 + |P||(E+P)^{-1}|.$$

Приводя подобные, приходим к выражению (3).

Введем следующие обозначения:

$$\varphi(H) = \frac{\lambda_{\max}(H)}{\lambda_{\min}(H)}, \qquad \psi(H) = \frac{\lambda_{\min}(C)}{\lambda_{\max}(H)}. \tag{4}$$

Теорема. *Пусть A — асимптотически устойчивая матрица. Тогда тривиальное решение системы* (1) *асимптотически устойчиво. Область устойчивости содержит шар U_R радиуса*

$$R = \frac{\sqrt{\psi(H) + |A|^2} - |A|}{\left[|D|\sqrt{\psi(H)+|A|^2} + |B|\right]\sqrt{\varphi(H)}}. \tag{5}$$

Доказательство. Первая разность $\Delta v(x(k))$ функции Ляпунова $v(x) = x^T H x$, взятая в силу системы (1), имеет вид

$$\Delta v(x(k)) = x^T(k)\Big\{[A + X(k)B]^T\left([E + X(k)D]^{-1}\right)^T \times$$

$$\times\ H[E + X(k)D]^{-1}[A + X(x)B] - H\Big\}x(k).$$

Рассмотрим шар радиуса $R_1 = |D|^{-1}$. Как следует из равенства (2), в этом шаре выполнено соотношение

$$[E + X(k)D]^{-1} = E - X(k)D[E + X(k)D]^{-1}.$$

Обозначим

$$\tilde{A}(k) = A + X(k)B, \qquad \tilde{D}(k) = X(k)D[E + X(k)D]^{-1}. \tag{6}$$

Тогда первая разность примет вид

$$\Delta v(x(k)) = x^T(k)\left\{\tilde{A}^T(k)[E-\tilde{D}(k)]^T H[E-\tilde{D}(k)]\tilde{A}(k)-H\right\}x(k).$$

Раскрывая скобки, получаем выражение

$$\Delta v(x(k)) = x^T(k)\Big\{\left[\tilde{A}^T(k)H\tilde{A}(k)-H\right] +$$

$$+ \tilde{A}^T(k)\left[\tilde{D}^T(k)H\tilde{D}(k)-H\tilde{D}(k)-\tilde{D}^T(k)H\right]\tilde{A}(k)\Big\}x(k).$$

Подставляя в первое слагаемое вместо $\tilde{A}(k)$ его значение из (6), имеем

$$\Delta v(x(k)) = -x^T(k)Cx(k)+x^T(k)\Big\{A^T HX(k)B+B^T X^T(k)HA +$$

$$+ B^T X^T(k)HX(k)B+\tilde{A}^T(k)\left[\tilde{D}^T(k)H\tilde{D}(k)-H\tilde{D}(k)-\tilde{D}^T(k)H\right]\tilde{A}(k)\Big\}x(k).$$

Отсюда вытекает справедливость неравенства

$$\Delta v(x(k)) \le -\Big\{\lambda_{\min}(C)-2|HA||B||x(k)|-|B|^2|H||x(k)|^2 -$$

$$-\left|\tilde{A}(k)\right|\left|\tilde{D}(k)\right|\left[2\left|H\tilde{A}(k)\right|+|H|\left|\tilde{A}(k)\right|\left|\tilde{D}(k)\right|\right]\Big\}|x(k)|^2.$$

Как следует из вида матриц $\tilde{A}(k)$, $\tilde{D}(k)$, выбранной спектральной матричной нормы и неравенства (3), в шаре радиуса R_1 выполняются следующие соотношения:

$$\left|\tilde{A}(k)\right| \le |A|+|B|\,|x(k)|,$$

$$\left|H\tilde{A}(k)\right| \le |H||A|+|H||B||x(k)|,$$

$$\left|\tilde{D}(k)\right| \le |D||x(k)|(1-|D||x(k)|)^{-1}.$$

Поэтому, прибавляя и вычитая из выражения в фигурных скобках $|H||A|^2$, получаем

$$\Delta v(x(k)) \le -\Big\{\lambda_{\min}(C)-\left[2|H||A||B||x(k)|+|B|^2|H||x(k)|^2+|H|\left|A^2\right|\right]+$$

$$+|H||A^2|-(|A|+|B||x(k)|)|D|\,|x(k)|\left(1-|D||x(k)|^{-1}\right)\times$$

$$\times\left[2|H|(|A|+|B||x(k)|)+|H|(|A|+|B||x(k)|)|D|\,|x(k)|\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-|D|\,|x(k)|\right)^{-1}\right]\Big\}|x(k)|^2.$$

Отсюда после эквивалентных преобразований имеем

$$\Delta v(x(k)) \le -\Big\{\lambda_{\min}(C)+|H||A|^2-|H|(|A|+|B||x(k)|)^2 -$$

$$-|H|(|A|+|B||x(k)|)^2\frac{|D||x(k)|}{1-|D||x(k)|}\left[2+\frac{|D||x(k)|}{1-|D||x(k)|}\right]\Big\}|x(k)|^2.$$

Приводя подобные, находим

$$\Delta v(x(k)) \le -\left\{\lambda_{\min}(C)+|H||A|^2-|H|\big(|A|+|B||x(k)|\big)^2\times\right.$$

$$\left.\times\left[1+2\frac{|D||x(k)|}{1-|D||x(k)|}+\left(\frac{|D||x(k)|}{1-|D||x(k)|}\right)^2\right]\right\}|x(k)|^2.$$

Следовательно, первая разность функции Ляпунова будет отрицательно определенной и решение $x(t)\equiv 0$ системы (1) асимптотически устойчивым, если в шаре радиуса R_1 выполнено соотношение

$$\lambda_{\min}(C)+|H||A|^2-\left(\frac{|A|+|B||x(k)|}{1-|D||x(k)|}\right)^2|H| > 0.$$

Преобразовывая последнее неравенство, убеждаемся, что если справедливо выражение

$$|A|+|B||x(k)| < \big(1+|D||x(k)|\big)\sqrt{\lambda_{\min}(C)|H|^{-1}+|A|^2},$$

то выполняются условия теоремы об асимптотической устойчивости. Используя неравенства квадратичных форм, обозначения (4) и решая последнее неравенство, получаем, что радиус шара, лежащего в области асимптотической устойчивости, определен зависимостью (5). Теорема доказана.

1. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.
2. *Цыпкин Я. З., Попков Ю. С.* Теория нелинейных импульсных систем. – М.: Наука, 1973. – 414 с.
3. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. *Цыпкин Я. З., Попков Ю. С.* Теория нелинейных импульсных систем. – М.: Наука, 1973. – 414 с.
4. *Бромберг П. В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования. – М.: Наука, 1967. – 323 с.
5. *Валеев К. Г., Финин Г. С.* Построение функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1981. – 412 с.
6. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.
7. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
8. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. – М.: Мир, 1971. – 309 с.
9. *Zhang S.* Razumikhin techniques in delay difference systems // Panamerican Math. J. – 1933. – **3**, № 2. – P. 1 – 16.
10. *Хусаинов Д. Я., Шевеленко Е. Е.* Исследование устойчивости дифференциальных систем с дробно-рациональной правой частью // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1295 – 1299.

Получено 23.01.97