УДК 517.432

С. О. Кужіль (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ВИГЛЯД МАТРИЦІ РОЗСІЯННЯ ДЛЯ ρ-ЗБУРЕНЬ АБСТРАКТНОГО ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ

A definition of ρ-perturbations of an abstract wave equation is given. As a special case, this definition includes perturbations with a compact support of the classical wave equation. The scattering matrices are constructed for equations of this type.

Дано означення ρ-збурень абстрактного хвильового рівняння, що як частинний випадок включає збурення з компактним носієм для класичного хвильового рівняння. Для такого типу рівнянь побудовано матрицю розсіяння.

В даній роботі для широкого класу збурень абстрактного диференціально-операторного рівняння

$$u_{tt} = -Lu \tag{1}$$

в термінах канонічного простору граничних значень будується матриця розсіяння. Розвинутий тут операторний підхід до визначення вигляду матриці розсіяння дозволяє встановити прямий зв'язок між її сингулярностями та властивостями оператора L. Застосування цих результатів у випадку хвильового рівняння в просторах непарної розмірності відкриває додаткові можливості для дослідження відповідної матриці розсіяння.

1. Допоміжні твердження. В сепарабельному гільбертовому просторі $\mathfrak{H}$ розглянемо максимальний симетричний, простий* оператор B. Не обмежуючи загальності, припустимо, що в нижній півплощині дефектне число цього оператора дорівнює нулю. З урахуванням [1] легко бачити, що справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай B — простий максимальний симетричний оператор з індексом дефекту $(0, m)$, $m \leq \infty$. Тоді існує ізометрія F простору $\mathfrak{H}$ на простір $L_2(\mathbb{R}_+, N) := L_2(\mathbb{R}_+) \otimes N$ така, що*

$$FD(B) = \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+, N) := \overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+) \otimes N, \tag{2}$$

$$FBu = i\frac{d}{ds}(Fu)(s) \qquad \forall\, u \in D(B), \tag{3}$$

де $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$, N — допоміжний гільбертів простір розмірності m, $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\mathbb{R}_+)$ — простір Соболева, $\otimes$ — тензорний добуток.

У просторі $\mathfrak{H}$ розглянемо оператор B^2. Беручи до уваги рівності (2), (3), неважко довести, що вірним є таке твердження.

Лема 1. *Оператор B^2 є замкненим, щільно визначеним симетричним оператором. При цьому*:

a) $(B^2)^* = B^* B^*$;

b) $\ker((B^2)^* - z^2 I) = \ker(B^* - zI)$, $\operatorname{Im} z \leq 0$;

c) *лінеал $BD(B^2)$ є щільним у просторі $\mathfrak{H}$.*

2. Властивості ρ-збурених операторів. Через $V(t) = e^{iBt}$ позначимо півгрупу ізометричних операторів з генератором iB. Для довільного $\rho \geq 0$ покладемо $\mathfrak{H}_\rho = V(\rho)\mathfrak{H}$. Зрозуміло, що оператор $B_\rho = B$, $D(B_\rho) = V(\rho)D(B)$ є

*Оператор є простим, якщо його звуження на довільний нетривіальний інваріантний підпростір не є самоспряженим оператором.

простим максимальним симетричним оператором в гільбертовому просторі $\mathfrak{H}_\rho$.

Означення 1. *Нехай* $\tilde{\mathfrak{H}}$ *— підпростір простору* $\mathfrak{H}$ *такий, що* $\tilde{\mathfrak{H}} \supseteq \mathfrak{H}_\rho$ *при деякому* $\rho \geq 0$. *Самоспряжений в* $\tilde{\mathfrak{H}}$, *додатний оператор* L *будемо називати* ρ*-збуреним, якщо* $L \supset B_\rho^2$.

Нехай оператор L є ρ-збуреним. Тоді при всіх $\tilde{f} \in D(L)$ і $v \in D(B_\rho^2)$ справджується рівність $(P_\rho L\tilde{f}, v) = (\tilde{f}, B_\rho^2 v) = (P_\rho \tilde{f}, B_\rho^2 v)$, де P_ρ — ортопроектор в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_\rho$. Отже,

$$P_\rho D(L) \subset D(B_\rho^* B_\rho^*), \quad P_\rho L\tilde{f} = (B_\rho^*)^2 P_\rho \tilde{f} \quad \forall\, \tilde{f} \in D(L). \tag{4}$$

Для довільного z $(\operatorname{Im} z < 0)$ покладемо

$$L_z = B_\rho^* B_\rho^*, \quad D(L_z) = \left\{ P_\rho \tilde{f} \;\middle|\; \tilde{f} \in D(L), (L - z^2 I)\tilde{f} \in \mathfrak{H}_\rho \right\}. \tag{5}$$

З урахуванням (4) переконуємось, що таке означення оператора L_z є коректним. Оператори L_z $(\operatorname{Im} z < 0)$ будемо називати *асоційованими* з L операторами.

Лема 2. *У просторі* $\mathfrak{H}_\rho$ *оператор* L_z *є максимальним дисипативним (акумулятивним) при* $\operatorname{Re} z > 0$ $(\operatorname{Re} z < 0)$ *і додатним самоспряженим при* $\operatorname{Re} z = 0$ *розширенням симетричного оператора* B_ρ^2.

Доведення. З означення ρ-збуреного оператора L і рівностей (4), (5) зрозуміло, що $L_z \supset B_\rho^2$ і

$$(L_z - z^2 I)P_\rho \tilde{f} = (L - z^2 I)\tilde{f} \quad \forall\, \tilde{f} \in R_L(z^2)\mathfrak{H}_\rho, \tag{6}$$

де $R_L(z^2) = (L - z^2 I)^{-1}$.

Звідси випливає

$$z^2 \in \rho(L_z), \tag{7}$$

$$L\tilde{f} = L_z f + z^2 \tau, \quad f = P_\rho \tilde{f}, \quad \tau = \tilde{f} - f. \tag{8}$$

Тому

$$(L\tilde{f}, \tilde{f}) = (L_z f, f) + z^2 \|\tau\|^2 \tag{9}$$

і, отже, $\operatorname{Im}(L_z f, f) = -2(\operatorname{Re} z)(\operatorname{Im} z)\|\tau\|^2$. Таким чином, при всіх $f \in D(L_z)$ є вірними співвідношення

$$\operatorname{Im}(L_z f, f) \geq 0, \quad \operatorname{Im}(L_z f, f) \leq 0, \quad \operatorname{Im}(L_z f, f) = 0,$$

якщо відповідно $\operatorname{Re} z > 0$ (< 0) і $\operatorname{Re} z = 0$. Це з урахуванням (7) і нерівності $(L_z f, f) \geq |z|^2 \|\tau\|^2$ (при $\operatorname{Re} z = 0$) завершує доведення леми.

***Наслідок*1.** *Спряжений до оператора* L_z *збігається з оператором* $L_{-\bar{z}}$.

Доведення. Нехай $\tilde{f} \in R_L(z^2)\mathfrak{H}_\rho$ і $\tilde{g} \in R_L(\bar{z}^2)\mathfrak{H}_\rho$. Користуючись зображенням (8) для елементів $L\tilde{f}$ і $L\tilde{g}$, з рівності $(L\tilde{f}, \tilde{g}) = (\tilde{f}, L\tilde{g})$ одержуємо рівність $(L_z f, g) = (f, L_{-\bar{z}} g)$, де $g = P_\rho \tilde{g}$. Отже, $L_z^* \supset L_{-\bar{z}}$. Нехай $\operatorname{Re} z > 0$. Згідно з лемою 2, оператори L_z^* і $L_{-\bar{z}}$ є одночасно максимальними акумулятивними. Отже, $L_z^* = L_{-\bar{z}}$. Розглядаючи аналогічно випадок $\operatorname{Re} z < 0$ і враховуючи те, що при $\operatorname{Re} z = 0$ твердження наслідку є тривіальним, завершуємо доведення.

Опишемо множину $\{L_z | \operatorname{Im} z < 0\}$ асоційованих з L операторів у зручній для подальшого використання формі. Для цього скористаємось поняттям позитивного простору граничних значень (ПГЗ) [2].

Позначимо $\mathcal{H}_\rho = \ker\left(B_\rho^* B_\rho^* + I\right) = \ker\left(B_\rho^* + iI\right)$. Легко бачити, що

$$D\left(B_\rho^* B_\rho^*\right) = D\left(B_\rho^* B_\rho\right) \dotplus \mathcal{H}_\rho. \tag{10}$$

Трійка $(\mathcal{H}_\rho, \Gamma_1^\rho, \Gamma_2^\rho)$, де Γ_i^ρ — відображення многовиду $D\left(B_\rho^* B_\rho^*\right)$ в $\mathcal{H}_\rho$ такі, що

$$\Gamma_1^\rho f = P\left(B_\rho^* B_\rho^* + I\right) f, \quad \Gamma_2^\rho f = h \tag{11}$$

($f = u + h$, $u \in D(L_\mu^\rho)$, $h \in \mathcal{H}_\rho$; а P — ортопроектор в $\mathfrak{H}_\rho$ на $\mathcal{H}_\rho$), називається канонічним позитивним ПГЗ симетричного оператора B_ρ^2, що відповідає розширенню Фрідріхса $L_\mu^\rho = B_\rho^* B_\rho$.

Лема 3. *Оператор L_z є звуженням оператора $B_\rho^* B_\rho^*$ на множину*

$$D(L_z) = \left\{ f = u + h \ \left(\in D\left(B_\rho^* B_\rho^*\right)\right) \,\middle|\, C_z \Gamma_1^\rho f = \Gamma_2^\rho f \right\},$$

де оператор C_z щільно визначений у просторі $\mathcal{H}_\rho$ і при $\operatorname{Re} z > 0$ ($\operatorname{Re} z < 0$) є максимальним акумулятивним (дисипативним), а при $\operatorname{Re} z = 0$ — додатним обмеженим оператором таким, що $\| C_z \| \le 1/2$. Спряжений до оператора C_z збігається з оператором $C_{-\bar{z}}$.

Доведення. Нехай $f \in D(L_z)$ і $\operatorname{Re} z \neq 0$. Згідно з рівністю (10) $f = u + h$, де $u \in D(L_\mu^\rho)$, $h \in \mathcal{H}_\rho$. Припустимо, що у цьому розкладі елемент u дорівнює нулю. Тоді $L_z f = -f$. Виберемо елемент $\tilde{f} \in R_L(z^2)\mathfrak{H}_\rho$ такий, що $f = P_\rho \tilde{f}$. З (9) одержуємо $(L\tilde{f}, \tilde{f}) = -\| f \|^2 + z^2 \| \tau \|^2$. Оскільки оператор L є додатним, то ця рівність є вірною лише у випадку $f = h = 0$. Отже, у розкладі $f = u + h$, $f \neq 0$, елемент u є ненульовим. Тому якщо $\Gamma_1^\rho f = 0$, то $f = u \in D(B_\rho^2)$; $u \neq 0$ і, отже, $\Gamma_2^\rho f = 0$. Таким чином, оператор C_z:

$$C_z \Gamma_1^\rho f = \Gamma_2^\rho f, \quad f \in D(C_z) = \Gamma_1^\rho D(L_z), \tag{12}$$

є коректно визначеним оператором в $\mathcal{H}_\rho$.

Оскільки $(L_z + I) f = (L_\mu^\rho + I) u$ при всіх $f \in D(L_z)$, то $-1 \notin \sigma_p(L_z)$. Враховуючи довільність вибору z ($\operatorname{Im} z < 0$) та наслідок 1, одержуємо

$$-1 \in \rho(L_z) \cup \sigma_c(L_z). \tag{13}$$

З (11) зрозуміло, що рівність

$$\left((B_\rho^* B_\rho^* + I) f, g\right) = \left((L_\mu^\rho + I) u, v\right) + \left(\Gamma_1^\rho f, \Gamma_2^\rho g\right) \tag{14}$$

справджується при всіх f, $g = v + \tilde{h}$ з множини $D(B_\rho^* B_\rho^*)$. Покладаючи в цій рівності $f \in D(L_z)$, $g = \tilde{h}$ і враховуючи (12), (13), переконуємось, що оператор C_z є щільно визначеним у просторі $\mathcal{H}_\rho$.

В свою чергу, якщо $f = g \in D(L_z)$, то $\operatorname{Im}(L_z f, f) = \operatorname{Im}\left(C_z \Gamma_1^\rho f, \Gamma_1^\rho f\right)$. З (14) також випливає, що при $f \in D(L_z)$ рівності $(L_z f, g) = (f, B_\rho^* B_\rho^* g)$ і $\left(C_z \Gamma_1^\rho f, \Gamma_1^\rho g\right) = \left(\Gamma_1^\rho f, \Gamma_2^\rho g\right)$ є еквівалентними. Це з урахуванням наслідку 1 означає, що $C_z^* = C_{-\bar{z}}$. Звідси на підставі леми 2 дістаємо, що оператор C_z *є* максимальним акумулятивним (дисипативним) при $\operatorname{Re} z > 0$ ($\operatorname{Re} z < 0$). У випадку $\operatorname{Re} z = 0$ справедливість твердження леми випливає з теореми 3.5 гл. 3 [3] та [4].

3. ρ-Збурене абстрактне хвильове рівняння. Диференціально-операторне рівняння (1) з ρ-збуреним оператором L у правій частині будемо називати ρ-збуреним абстрактним хвильовим рівнянням.

Нехай оператор L є ρ-збуреним. Поповнення лінеалів $D(L)$ та $D(B_\rho^2)$ за нормою $\| u \|_L := \sqrt{(Lu, u)}$ позначимо відповідно через $\mathfrak{H}_L$ та $\mathfrak{H}_L^0$. Зрозуміло, що $\mathfrak{H}_L^0 \subset \mathfrak{H}_L$. Опишемо елементи підпростору $\mathfrak{H}_L^0$ у зручній для подальшого використання формі. З означення норми $\| \cdot \|_L$ випливає, що послідовність $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $u_n \in D(B_\rho^2)$, фундаментальна в $\mathfrak{H}_L$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $\left\{B_\rho u_n\right\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна у просторі $\mathfrak{H}_\rho$.

Будемо говорити, що послідовність $\{u_n\}_{n=1}^\infty$, $u_n \in D(B_\rho^2)$, збігається в $\mathfrak{H}_L$ до елемента x_g, якщо послідовність $\left\{B_\rho u_n\right\}_{n=1}^\infty$ збігається у просторі $\mathfrak{H}_\rho$ до елемента g. З урахуванням (4) зрозуміло, що для довільного $f \in D(L)$ справджується рівність

$$(f, x_g)_L = \lim_{n \to \infty} (f, u_n)_L = \lim_{n \to \infty} (P_\rho f, B_\rho^2 u_n) = (B_\rho^* P_\rho f, g). \tag{15}$$

З твердження c) леми 1 випливає, що простір $\mathfrak{H}_L^0$ *можна розглядати як* гільбертів простір $\{ x_g | \forall g \in \mathfrak{H}_\rho\}$, де $x_{\alpha g + \beta \tilde{g}} = \alpha x_g + \beta x_{\tilde{g}}$, $\{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{C}$, $\{g, \tilde{g}\} \subset \mathfrak{H}$ і

$$(x_g, x_{\tilde{g}})_L = \{g, \tilde{g}\} \tag{16}$$

($(\cdot, \cdot)_L$ і $(\cdot, \cdot)$ — скалярні добутки у просторах відповідно $\mathfrak{H}_L$ і $\mathfrak{H}$). З урахуванням (15) неважко бачити, що при цьому ототожненні елементу $u \in D(B_\rho^2)$ відповідає елемент $x_{B_\rho u}$.

Гільбертів простір $H_L = \mathfrak{H}_L \oplus \tilde{\mathfrak{H}}$ будемо називати *простором даних*. Елементи цього простору зручно позначати у вигляді матриць-стовпців, де верхня компонента належить підпростору $\mathfrak{H}_L \oplus 0$, а нижня — підпростору $0 \oplus \tilde{\mathfrak{H}}$.

У просторі даних H_L рівняння (1) можна записати у вигляді

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = Q\begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -L & 0 \end{pmatrix}.$$

Безпосередньо перевіряється, що оператор Q з областю визначення

$$D(Q) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \middle| \{u, v\} \subset D(L) \right\} \tag{17}$$

є кососамоспряженим в істотному в просторі H_L. Тому його замикання $Q_L = \overline{Q}$ є генератором унітарної в H_L групи розв'язків задачі Коші $W_L(t) = e^{Q_L t}$ рівняння (1). У просторі даних H_L розглянемо підпростори

$$D_-^\rho = \left\{ \begin{pmatrix} x_g \\ -ig \end{pmatrix} \middle| g \in \mathfrak{H}_\rho \right\}, \quad D_+^\rho = \left\{ \begin{pmatrix} x_g \\ ig \end{pmatrix} \middle| g \in \mathfrak{H}_\rho \right\}. \tag{18}$$

З означення H_L і рівності (16) випливає, що ці підпростори є ортогональними, і $D_-^\rho \oplus D_+^\rho = \mathfrak{H}_L^0 \oplus \mathfrak{H}_\rho$. Використовуючи результати [5], неважко бачити, що є вірною така теорема.

Теорема 2. *Підпростори* D_{-}^{ρ} *та* D_{+}^{ρ} *є відповідно вхідним та вихідним підпросторами для групи розв'язків* $W_L(t)$ ρ*-збуреного хвильового рівняння, тобто*

$$W_L(\pm t)D_{\pm}^{\rho} \subset D_{\pm}^{\rho} \ (t \geq 0), \qquad \bigcap_{t \geq 0} W_L(\pm t)D_{\pm}^{\rho} = \{0\}.$$

При цьому при всіх $g \in \mathfrak{H}_{\rho}$ *справджуються рівності*

$$W_L^*(t)\begin{pmatrix} x_g \\ -ig \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{V(t)g} \\ -iV(t)g \end{pmatrix}, \qquad W_L(t)\begin{pmatrix} x_g \\ ig \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{V(t)g} \\ iV(t)g \end{pmatrix}, \qquad t \geq 0. \tag{19}$$

4. Означення матриці розсіяння. З [6] та теореми 2 випливає, що для звуження групи $W_L(t)$ на підпростір

$$M_{-} = \overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_L(t)D_{-}^{\rho}} \qquad \left(M_{+} = \overline{\bigcup_{t \in \mathbb{R}} W_L(t)D_{+}^{\rho}} \right)$$

існує вхідне (вихідне) спектральне зображення у просторі $L_2(\mathbb{R}, N_{-})$ $(L_2(\mathbb{R}, N_{+}))$, що побудоване по підпростору D_{-}^{ρ} (D_{+}^{ρ}). Це зображення визначається єдиним чином, з точністю до ізоморфізму допоміжного гільбертового простору N_{-} (N_{+}).

Нехай $f \in M_{-}$, а $g = P_{M_+} f$, де P_{M_+} — ортопроектор в H_L на підпростір M_{+}. Через $\mathfrak{f}(s)$ та $\mathfrak{g}(s)$ позначимо зображення елементів f та g відповідно у вхідному та вихідному спектральних зображеннях. Розглянемо оператор

$$\mathfrak{S} : \mathfrak{f}(s) = \mathfrak{g}(s).$$

Відомо [6, 7], що цей оператор може бути зображений у вигляді оператора множення на функцію $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\delta)$, $\delta \in \mathbb{R}$, значеннями якої є стискуючі оператори з N_{-} в N_{+}.

Операторнозначна функція $\mathfrak{S}(\delta)$ називається *матрицею розсіяння.* Вона є граничним значенням аналітичної в нижній півплощині, стискуючої операторнозначної функції $\mathfrak{S}(z)$, яка називається *матрицею розсіяння Гейзенберга.*

Покладемо

$$N_{-} = D_{-}^{\rho} \ominus Y^* D_{-}^{\rho}, \qquad N_{+} = D_{+}^{\rho} \ominus Y D_{+}^{\rho}, \tag{20}$$

де $Y = (Q_L + I)(Q_L - I)^{-1}$ — когенератор групи $W_L(t)$. З доведення леми 3.1, гл. 5 з [8] та зв'язку між дискретною та неперервною схемою Лакса – Філліпса (гл. 2 [6]) випливає, що при такому виборі допоміжних підпросторів $N_{\pm}$ в спектральних зображеннях матриця розсіяння Гейзенберга має вигляд

$$\mathfrak{S}(z) = P_{+}\left(Y^* - \frac{iz-1}{iz+1}I\right)^{-1}\Bigg|_{N_{-}} = \frac{(iz+1)^2}{2}P_{+}(Q_L - izI)^{-1}\Bigg|_{N_{-}},$$

де P_{+} — ортопроектор в H_L на N_{+}.

Лема 4. *Є вірними такі співвідношення:*

$$N_{\pm} = \left\{ \begin{pmatrix} x_g \\ \pm ig \end{pmatrix} \middle| \, g \in \ker(B_{\rho}^* + iI) \right\}.$$

Доведення. Використовуючи зображення резольвент $(iB_\rho - I)^{-1}$ та $(Q_L - I)^{-1}$ у вигляді перетворень Лапласа півгрупи $V(t)$ та групи $W_L(t)$ відповідно та враховуючи другу рівність в (19), приходимо до висновку, що при всіх $\begin{pmatrix} x_g \\ ig \end{pmatrix} \in D_+^\rho$ справджується рівність

$$Y\begin{pmatrix} x_g \\ ig \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{Tg} \\ iTg \end{pmatrix}, \tag{21}$$

де $T = (iB_\rho + I)(iB_\rho - I)^{-1}$ — перетворення Келі оператора iB_ρ.

З рівностей (16), (18), (20), (21) випливає справедливість твердження леми для простору N_+. Розглядаючи аналогічно випадок простору N_-, завершуємо доведення.

З теореми 1 одержуємо

$$F\ker(B_\rho^* + iI) = \left\{e^{-s}n \,\middle|\, e^{-s} \in L_s(\rho, \infty), n \in N\right\}. \tag{22}$$

Це означає, що при всіх $g \in \ker(B_\rho^* + iI)$ справджується рівність

$$\left\|\begin{pmatrix} x_g \\ \pm ig \end{pmatrix}\right\|^2_{H_{\tilde{L}}} = 2\|g\|^2 = 2\|Fg\|^2_{L_2(\rho,\infty)} = 2\|n\|^2_N \int_\rho^\infty e^{-2s}ds = e^{-2\rho}\|n\|^2_N,$$

де $Fg = e^{-s}n$.

Тому з леми 4 випливає, що оператори

$$J_-\begin{pmatrix} x_g \\ -ig \end{pmatrix} = -e^{-\rho}n, \qquad J_+\begin{pmatrix} x_g \\ ig \end{pmatrix} = e^{-\rho}n \tag{23}$$

є унітарними відображеннями просторів N_- та N_+ на простір N. Це дозволяє (з урахуванням того, що матриця розсіяння визначається з точністю до ізоморфізмів просторів $N_\pm$) надалі розглядати матрицю розсіяння як операторнозначну функцію в $L_2(\mathbb{R}, N)$, що є граничним значенням функції

$$\mathfrak{S}(z) = \frac{(iz+1)^2}{2} J_+ P_+ (Q_L - izI)^{-1} J_-^{-1}\Big|_N, \tag{24}$$

значеннями якої є стискуючі оператори в N.

5. Вигляд матриці розсіяння. Нехай $L = L_\mu^\rho$. У цьому випадку простір даних $H_{L_\mu^\rho}$ збігається з ортогональною сумою $D_-^\rho \oplus D_+^\rho$. Для довільного $d = \begin{pmatrix} x_g \\ f \end{pmatrix}$ з простору $H_{L_\mu^\rho}$ покладемо

$$T_\mu^\rho d = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{cases} F_\rho(ig+f)(s), & s \ge 0; \\ F_\rho(ig-f)(-s), & s < 0, \end{cases} \tag{25}$$

де F_ρ — ізометрія простору $\mathfrak{H}_\rho$ на $L_2(\mathbb{R}_+, N)$, що задовольняє умову теореми 1 у випадку оператора B_ρ. В [5] показано, що оператор T_μ^ρ унітарно відображає простір $H_{L_\mu^\rho}$ на простір $L_2(\mathbb{R}, N)$ і

$$T_\mu^\rho Q_{L_\mu^\rho} d = -\frac{d}{ds}(T_\mu^\rho d)(s), \qquad d \in D(Q_{L_\mu^\rho}). \tag{26}$$

У просторі $H_{L_\mu^\rho}$ розглянемо рівняння $(Q_{L_\mu^\rho} - izI)\phi = d_-$, де елемент $d_- = \begin{pmatrix} x_g \\ -ig \end{pmatrix}$ належить N_-. Враховуючи лему 4 та рівності (25), (26), одержуємо, що у просторі $L_2(\mathbb{R}, N)$ це рівняння набере вигляду

$$\frac{d}{ds}k(s) + izk(s) = -y(s),$$

де

$$T_\mu^\rho \phi = k(s), \qquad T_\mu^\rho d_- = y(s) = \begin{cases} 0, & s \geq 0; \\ i\sqrt{2}e^s n, & s < 0. \end{cases}$$

Єдиний розв'язок цього рівняння, що належить простору $L_2(\mathbb{R}, N)$, має вигляд

$$k(s) = -\frac{i\sqrt{2}}{1+iz} e^{(1+iz)(\min\{s,0\})} e^{-izs} n.$$

З леми 4 зрозуміло, що підпростір $T_\mu^\rho N_+$ складають функції $f(s) \in L_2(\mathbb{R}, N)$ такі, що $f(s) = e^{-s}n$ (n — довільний елемент з N) при $s \geq 0$ і $f(s) = 0$ при $s < 0$. Нехай $\tilde{P}$ — ортопроектор в $L_2(\mathbb{R}, N)$ на $T_\mu^\rho N_+$. Безпосередньою перевіркою встановлюємо, що

$$\tilde{P}k(s) = -\frac{i2\sqrt{2}}{(1+iz)^2} e^{-s} n, \qquad s \geq 0.$$

Тому

$$P_+(Q_{L_\mu^\rho} - izI)^{-1} d_- = P_+\phi = P_+(T_\mu^\rho)^{-1}k(s) = (T_\mu^\rho)^{-1}\tilde{P}k(s) = -\frac{2}{(1+iz)^2}\begin{pmatrix} x_g \\ ig \end{pmatrix}.$$

Це з урахуванням (23), (24) приводить до висновку, що $\mathfrak{S}(z) = I$. Отже, при $L = L_\mu^\rho$ матриця розсіяння є одиничним оператором.

Таким чином, у випадку, коли L — довільний ρ-збурений оператор, відповідну матрицю розсіяння Гейзенберга можна записати у вигляді

$$\mathfrak{S}(z) = I + \frac{(1+iz)^2}{2} J_+ E(z) J_-^{-1}, \tag{27}$$

де $E(z) = P_+\left((Q_L - izI)^{-1} - (Q_{L_\mu^\rho} - izI)^{-1}\right)$.

Нехай $g \in \mathcal{H}_\rho = \ker(B_\rho^* + iI)$. Згідно з рівністю (22) $Fg = e^{-s}n \in L_2((\rho, \infty), N)$. Покладемо $Xg = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\rho} n$. Неважко бачити, що оператор X є унітарним відображенням простору $\mathcal{H}_\rho$ на простір N.

Теорема 3. *Нехай L — додатний ρ-збурений оператор, а $\{C_z | \operatorname{Im} z < 0\}$ — множина операторів, що визначають в позитивному ПГЗ $(\mathcal{H}_\rho, \Gamma_1^\rho, \Gamma_2^\rho)$ асоційовані з L оператори L_z ($\operatorname{Im} z < 0$). Тоді матриця розсіяння $\mathfrak{S}(\delta)$, що відповідає групі розв'язків $W_L(t)$ ρ-збуреного абстрактного хвильового рівняння, є граничним значенням аналітичної в нижній півплощині операторнозначної функції*

$$\mathfrak{S}(z) = I - 4izXC_z(I - 2(1-iz)C_z)^{-1}X^{-1}. \tag{28}$$

Доведення. Довільний елемент $d_- \in N_-$ подамо у вигляді $d_- = d_+ + \begin{pmatrix} 0 \\ -2ig \end{pmatrix}$, де $d_+ = \begin{pmatrix} x_g \\ ig \end{pmatrix} \in N_+$. Із зображень резольвент $(Q_\beta - izI)^{-1}$ у вигляді перетворень Лапласа груп $W_\beta(t)$, $\beta \in \{L, L_\mu^\rho\}$, та рівності (19) випливає $E(z)d_+ = 0$. Отже,

$$E(z)d_- = E(z)\begin{pmatrix} 0 \\ -2ig \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\gamma \\ i\gamma \end{pmatrix}, \tag{29}$$

де на підставі леми 4 елемент γ належить простору $\mathcal{H}_\rho$.

Беручи до уваги твердження 2.1 з [5] та рівність (17), неважко перевірити, що

$$(Q_L - izI)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_L(z^2)g \\ izR_L(z^2)g \end{pmatrix}, \qquad (Q_{L_\mu^\rho} - izI)^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{B_\rho^* R_{L_\mu^\rho}(z^2)g} \\ izR_{L_\mu^\rho}(z^2)g \end{pmatrix},$$

де $R_\beta(z^2) = (\beta - z^2 I)^{-1}$, $\beta \in \{L, L_\mu^\rho\}$. Це з урахуванням (15), (16), (29) дозволяє встановити, що для довільного $f \in \mathcal{H}_\rho$ справджується рівність

$$2(\gamma, f) = \left(\begin{pmatrix} x_\gamma \\ i\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_f \\ if \end{pmatrix}\right)_{H_L} = \left(E(z)\begin{pmatrix} 0 \\ -2ig \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_f \\ if \end{pmatrix}\right)_{H_L} = 2\left(i(B_\rho^* + zI)h_z, f\right),$$

де $h_z = P_\rho\left(R_L(z^2) - R_{L_\mu^\rho}(z^2)\right)g$. Тому

$$\gamma = iP(B_\rho^* + zI)h_z, \tag{30}$$

де, як і раніше, P — ортопроектор в $\mathfrak{H}_\rho$ на $\mathcal{H}_\rho$. Оскільки оператори L та L_μ^ρ є самоспряженими розширеннями оператора B_ρ^2, то елемент h_z є ортогональним до множини значень оператора $(B_\rho^2 - \bar{z}^2 I)$. Отже, $h_z \in \ker(B_\rho^* B_\rho^* - z^2 I)$. Звідси з урахуванням твердження б) леми 1 і рівності (30) одержуємо

$$\gamma = 2izPh_z. \tag{31}$$

З теореми 1 легко бачити, що

$$F \ker(B_\rho^* B_\rho^* - z^2 I) = \left\{e^{-izs} n \,\middle|\, e^{-izs} \in L_2(\rho, \infty), n \in N\right\}.$$

Тому $Fh_z = e^{-izs} m$, де m — деякий елемент з N. Враховуючи (22), приходимо до висновку, що

$$Ph_z = PF^{-1}(e^{-izs} m) = F^{-1}P_F(e^{-izs} m) = \frac{2}{1+iz} e^{(1-iz)\rho} F^{-1}(e^{-s} m), \tag{32}$$

де P_F — ортопроектор в $L_2((\rho, \infty), N)$ на $F\mathcal{H}_\rho$. З рівностей (23), (29), (31) та (32) випливає, що матрицю розсіяння $\mathfrak{S}(z)$, яка визначається рівністю (27), можна переписати у вигляді

$$\mathfrak{S}(z)n = n - 2iz(1+iz)e^{(1-iz)\rho} m \qquad \forall n \in N. \tag{33}$$

З рівності (6) зрозуміло, що $P_\rho R_L(z^2)g = R_{L_z}(z^2)g$. Тому $h_z = f - R_{L_\mu^\rho}(z^2)g$, де $f = R_{L_z}(z^2)g$. Звідси, враховуючи (11), маємо

$$\Gamma_1^\rho f = (1+z^2)P\left(R_{L_\mu^\rho}(z^2)g + h_z\right) + g. \tag{34}$$

Беручи до уваги теорему 1, безпосередньо перевіряємо, що

$$R_{L_\mu^\rho}(z^2)g = \frac{1}{(1+z^2)e^{(1-iz)\rho}}F^{-1}\left(e^{-izs} - e^{(1-iz)\rho-s}\right)n.$$

Це з урахуванням (32) дозволяє переписати (34) у вигляді

$$\Gamma_1^\rho f = F^{-1}\left(e^{-s}\left(\frac{2}{1+iz}n + 2(1-iz)e^{(1-iz)\rho}m\right)\right). \tag{35}$$

В свою чергу, з розкладу

$$f = F^{-1}\left(\left(FR_{L_\mu^\rho}(z^2)g + \left(e^{-izs} - e^{(1-iz)\rho-s}\right)m\right) + e^{(1-iz)\rho-s}m\right)$$

і означення оператора L_μ^ρ зрозуміло, що

$$\Gamma_2^\rho f = e^{(1-iz)\rho}F^{-1}(e^{-s}m). \tag{36}$$

Оскільки $f \in D(L_z)$, то згідно з лемою 3 $C_z\Gamma_1^\rho f = \Gamma_2^\rho f$. Таким чином, з рівностей (35), (36) і означення оператора X випливає, що

$$e^{(1-iz)\rho}(I - 2(1-iz)C_z)X^{-1}m = \frac{2}{1+iz}C_zX^{-1}n. \tag{37}$$

Враховуючи загальні властивості максимальних дисипативних (акумулятивних) операторів [9], з леми 3 отримуємо, що оператор $(I-2(1-iz)C_z)^{-1}$ існує і є обмеженим оператором на $\mathcal{H}_\rho$. Тому з рівностей (33), (37) випливає рівність (28). Теорему доведено.

Будемо говорити, що матриця розсіяння має *сингулярність* у точці z $(\operatorname{Im} z < 0)$, якщо в цій точці оператор $\mathfrak{S}(z)$ не є неперервно оберненим. Множина точок сингулярності матриці розсіяння не залежить від вибору допоміжного простору N і характеризує збурення системи. Беручи до уваги лему 3, з теореми 3 одержуємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Точки сингулярності матриці розсіяння в нижній півплощині є симетричними відносно уявної осі. Точка z є точкою сингулярності матриці розсіяння тоді і тільки тоді, коли* $1/2(1+iz) \in \sigma(C_z)$ $(\operatorname{Im} z < 0)$.

Зауважимо, що згідно з означенням 1 ρ-збурений оператор L є також і $(\rho + \alpha)$-збуреним при всіх $\alpha \geq 0$. Розглядаючи цей оператор як $(\rho + \alpha)$-збурений і повторюючи попередні міркування, переконуємось, що відповідна матриця розсіяння $\mathfrak{S}_\alpha(z)$ має вигляд $\mathfrak{S}_\alpha(z) = e^{-2i\alpha z}\mathfrak{S}(z)$. Отже, множина точок сингулярності матриці розсіяння не залежить від вибору параметра $\alpha \geq 0$.

6. Приклади. 1. У просторі $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}_+)$ розглянемо простий максимальний симетричний оператор

$$B = i\frac{d}{ds}, \quad D(B) = \mathring{W}_2^1(\mathbb{R}_+). \tag{38}$$

З вигляду оператора B зрозуміло, що півгрупа $V(t) = e^{iBt}$ є півгрупою операторів зсуву на t вправо

$$V(t)u(s) = \begin{cases} u(s-t), & s \geq t; \\ 0, & 0 \leq s < t. \end{cases}$$

Отже, $\mathfrak{H}_\rho = L_2((\rho, \infty))$ і $B_\rho = id/ds$, $D(B_\rho) = \mathring{W}_2^1((\rho,\infty))$. Звідси, враховуючи рівності (10), (11), одержуємо, що трійка $\left(\mathcal{H}_\rho, \Gamma_1^\rho, \Gamma_2^\rho\right)$, де

$$\mathcal{H}_\rho = \left\{\alpha e^{-s} \,\middle|\, s \geq \rho, \alpha \in \mathbb{C}\right\}, \quad \Gamma_1^\rho u(s) = 2(u_s(\rho) + u(\rho))e^{\rho - s},$$

$$\Gamma_2^\rho u(s) = u(\rho)e^{\rho-s}, \quad u(s) \in W_2^2((\rho, \infty)),$$

є канонічним позитивним ПГЗ симетричного оператора B_ρ^2.

Нехай $g(s)$ — додатна вимірна на $\mathbb{R}_+$ функція така, що $g(s) = 0$ при $s \geq \rho$ і

$$\int_0^\rho g(s)\,ds < \infty.$$

У просторі $L_2(\mathbb{R}_+)$ розглянемо додатний самоспряжений оператор L, що стандартним чином [1, 10] визначається диференціальним виразом

$$l(u) = -\frac{d^2}{ds^2}u + g(s)u$$

та граничною умовою $u_s(0) = \theta u(0)$, $\theta \geq 0$. Зрозуміло, що оператор L є ρ-збуреним. Враховуючи вигляд операторів Γ_i^ρ в цьому випадку, одержуємо, що асоційовані з L оператори L_z визначаються в ПГЗ $\left(\mathcal{H}_\rho, \Gamma_1^\rho, \Gamma_2^\rho\right)$ операторами

$$C_z = \frac{f(\rho)}{2(f_s(\rho) + f(\rho))}I,$$

де вектори $f(s) \in D(L)$ такі, що

$$(L - z^2 I)f(s) = \begin{cases} e^{i\bar{z}s}, & s \geq \rho; \\ 0, & 0 \leq s < \rho. \end{cases}$$

Використовуючи інтегральне зображення резольвенти $(L - z^2 I)^{-1}$ [10], маємо

$$C_z = \frac{u(\rho, z^2)}{2\left(u_s(\rho, z^2) + u(\rho, z^2)\right)}I,$$

де $u(s, z^2)$ — розв'язок рівняння $l(u) - z^2 u(s) = 0$, що задовольняє в точці $x = 0$ граничні умови $u(0, z^2) = 1$, $u_s(0, z^2) = \theta$.

На підставі теореми 3 одержуємо, що матриця розсіяння системи, яка визначається рівнянням (1) з оператором L у правій частині, є граничним значенням аналітичної в нижній півплощині функції

$$\mathfrak{S}(z) = \frac{u_s(\rho, z^2) - izu(\rho, z^2)}{u_s(\rho, z^2) + izu(\rho, z^2)}I.$$

З наслідку 2 випливає, що матриця розсіяння $\mathfrak{S}(z)$ в нижній півплощині має сингулярності в точках z, для яких $u_s(\rho, z^2) = izu(\rho, z^2)$. Беручи до уваги зауваження до наслідку 2, переконуємось, що остання рівність справджується при всіх $s \geq \rho$. Таким чином, матриця розсіяння має сингулярність в точці z тоді і тільки тоді, коли розв'язок $u(s, z^2)$ при $s \geq \rho$ має вигляд $u(s, z^2) = \text{const} \cdot e^{izs}$.

2. Диференціальна операція

$$l(u) = -\frac{d^2}{ds^2}u(s) + \frac{\nu^2 - 1/4}{s^2}u(s)$$

при $\nu \geq 1$ визначає у просторі $L_2(\mathbb{R}_+)$ додатний самоспряжений оператор L_ν. Нехай $f(s) \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Через

$$(\Gamma_\nu f)(x) = \int_0^\infty \sqrt{sx}\, f(s) J_\nu(sx)\,ds, \qquad (F_s f)(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(s)\sin sx\,ds$$

позначимо відповідно перетворення Ганкеля порядку ν та синус-перетворення Фур'є функції $f(s)$. Ці перетворення є унітарними та самоспряженими операторами у просторі $L_2(\mathbb{R}_+)$. Беручи до уваги [11], неважко бачити, що $X_\nu L_\nu = B^* B X_\nu$, де $X_\nu = F_s \Gamma_\nu$ — унітарний в $L_2(\mathbb{R}_+)$ оператор, а оператор B визначається рівністю (38). Отже, оператор L_ν є розширенням Фрідріхса симетричного оператора $\tilde{B}^2$, де $\tilde{B} = X_\nu^{-1} B X_\nu$ — простий максимальний симетричний оператор в $L_2(\mathbb{R}_+)$.

Відомо [3, 4], що довільне додатне самоспряжене розширення L оператора $\tilde{B}^2$ в канонічному позитивному ПГЗ $\left(\mathcal{H}_0, \Gamma_1^0, \Gamma_2^0\right)$ описується оператором $C = cI$, де $c \in [0, 1/2]$. Це означає, що

$$D(L) = \left\{ f(x) = u(x) + c\beta \left\langle u, \frac{1}{x^2} \right\rangle \gamma(x) \,\middle|\, u(x) \in D(L_\nu) \right\},$$

$$Lf = L_\nu u - c\beta \left\langle u, \frac{1}{x^2} \right\rangle \gamma(x),$$

де

$$\gamma(x) = \Gamma_\nu\left(\frac{s}{s^2+1}\right), \qquad \beta = \frac{8\sqrt{2}}{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{2\nu+5}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{2\nu-1}{4}\right)}$$

($\Gamma(x)$ — гамма-функція), а інтеграл

$$\left\langle u, \frac{1}{x^2} \right\rangle = \int_0^\infty \frac{u(x)}{x^2} ds$$

розуміється у сенсі головного значення.

Зрозуміло, що оператор L є 0-збуреним. Тому, враховуючи (5), одержуємо, що $L_z = L$ і, отже, $C_z = C$. З цього випливає, що матриця розсіяння має вигляд

$$\mathfrak{S}(z) = \frac{1 - 2(1+iz)c}{1 - 2(1-iz)c} I,$$

а множина її сингулярностей у нижній півплощині складається з точки $z = i\left(1 - \frac{1}{2c}\right)$.

3. Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R})$. У цьому просторі оператор

$$B = \begin{cases} i\dfrac{d}{ds}, & s > 0; \\ -i\dfrac{d}{ds}, & s < 0, \end{cases} \qquad D(B) = \mathring{W}_2^1(\mathbb{R}_-) \oplus \mathring{W}_2^1(\mathbb{R}_+),$$

є простим максимальним симетричним, а півгрупа $V(t) = e^{iBt}$ діє таким чином:

$$V(t)u(s) = \begin{cases} u(s-t), & s \ge t; \\ 0, & |s| < t; \\ u(s+t), & s \le -t. \end{cases}$$

Отже, $\mathfrak{H}_\rho = L_2((-\infty, -\rho) \cup (\rho, \infty))$, $B_\rho = B\big|_{D(B) \cap \mathfrak{H}_\rho}$ і канонічне позитивне ПГЗ $\left(\mathcal{H}_\rho, \Gamma_1^\rho, \Gamma_2^\rho\right)$ оператора B_ρ^2 має вигляд

$$\Gamma_1^\rho u(s) = \left(u(\rho) + u_s(\rho)\right)\psi_+(s) + \left(u(-\rho) - u_s(-\rho)\right)\psi_-(s),$$

$$\Gamma_2^{\rho} u(s) = \frac{1}{2}(u(\rho)\psi_+(s) + u(-\rho)\psi_-(s)), \qquad u(s) \in W_2^2((-\infty, -\rho)) \oplus W_2^2((\rho, \infty)),$$

де функції

$$\psi_-(s) = \begin{cases} 0, & s \geq \rho; \\ 2e^{s+\rho}, & s \leq -\rho, \end{cases} \qquad \psi_+(s) = \begin{cases} 2e^{-s+\rho}, & s \geq \rho; \\ 0, & s \leq -\rho, \end{cases}$$

є ортогональним базисом простору $\mathcal{H}_\rho$. Надалі елементи $\alpha\psi_-(s) + \beta\psi_+(s)$ цього простору будемо ототожнювати з вектор-стовпцями $\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix}$. Використовуючи канонічне ПГЗ при $\rho = 0$, одержуємо, що довільне додатне самоспряжене розширення L оператора B^2 є звуженням оператора $-\frac{d^2}{ds^2}$ на множину функцій $u(s) \in W_2^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ таких, що

$$c_{11}(u(0+) + u_s(0+)) + c_{12}(u(0-) - u_s(0-)) = \frac{1}{2}u(0+),$$

$$c_{21}(u(0+) + u_s(0+)) + c_{22}(u(0-) - u_s(0-)) = \frac{1}{2}u(0-),$$

де

$$c_{ii} \in \mathbb{R}, \quad c_{12} = \overline{c}_{21}, \quad 0 \leq c_{11} \leq \frac{1}{2}, \quad \det C = c_{11}c_{22} - |c_{12}|^2 \geq$$

$$\geq \max\left\{0, \frac{1}{2}(c_{11} + c_{22}) - \frac{1}{4}\right\}.$$

Оператор L є 0-збуреним. Тому

$$C_z = C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} I.$$

Враховуючи це, з (28) дістаємо, що матриця розсіяння має вигляд

$$\mathfrak{S}(z) = \frac{1}{\beta(z)}(\alpha_{ij})_{i,j=1}^2 I,$$

де

$$\alpha_{ii} = 1 - 2(1+iz)c_{ii} - 2(1-iz)c_{jj} + 4(1+z^2)\det C,$$

$$\alpha_{ij} = -4izc_{ij} \qquad (i \neq j),$$

$$\beta(z) = 1 - 2(1-iz)(c_{11} + c_{22}) + 4(1-iz)^2 \det C.$$

Згідно з наслідком 2 отримуємо, що множина сингулярностей матриці розсіяння в нижній півплощині складається з точок

$$z_{1,2} = i\,\frac{4\det C - c_{11} - c_{22} \pm \sqrt{(c_{11} - c_{22})^2 + 4|c_{12}|^2}}{4\det C},$$

якщо $\det C \neq 0$, і з точки

$$z = i\left(1 - \frac{1}{2(c_{11} + c_{22})}\right),$$

якщо $\det C = 0$.

4. Нехай $\mathfrak{H} = L_2(\mathbb{R}^3)$. Розглянемо перетворення Радона R, яке на функціях $u(x)$ з $S(\mathbb{R}^3)$ визначається так:

$$(Ru)(s, w) = \tilde{u}(s, w) = \frac{1}{2\pi}\int_{x \cdot w = s} u(x)\, ds_x,$$

де $s \in \mathbb{R}$, w — одиничний вектор в $\mathbb{R}^3$, ds_x — евклідова міра гіперплощини $x \cdot w = s$.

Функцію $\tilde{u}(s, w)$ зручно розглядати як функцію від s, із значеннями у допоміжному просторі $N = L_2(S^2)$, де S^2 — одинична сфера в $\mathbb{R}^3$. Замикання оператора Y, який на функціях $u(x)$ з $S(\mathbb{R}^3)$ визначається формулою

$$(Yu)(s, w) = (\partial_s Ru)(s, w), \qquad s \geq 0,$$

ізометрично відображає простір $L_2(\mathbb{R}^3)$ на простір $L_2(\mathbb{R}_+, N)$. Звідси випливає, що оператор

$$B = iY^{-1}\frac{d}{ds}Y, \qquad D(B) = Y^{-1}\mathring{W}_2^1(\mathbb{R}_+, N) \tag{39}$$

є простим максимальним симетричним оператором у просторі $L_2(\mathbb{R}^3)$. В [4] показано, що при такому виборі оператора B оператор $L = -\Delta$, $D(L) = W_2^2(\mathbb{R}^3)$ є 0-збуреним. З рівності (39) зрозуміло, що $V(t) = Y^{-1}V_+(t)Y$, де $V_+(t)$ — півгрупа зсувів на t вправо у просторі $L_2(\mathbb{R}_+, N)$. Використовуючи аналог теореми Пелі – Вінера для перетворення Радона [12], можна показати, що є вірною така теорема.

Теорема 4. *Підпростір $\mathfrak{H}_\rho$ простору $L_2(\mathbb{R}^3)$ складають ті і тільки ті функції $u(x)$, які дорівнюють нулю при $|x| < \rho$ і для всіх сферичних гармонік $Y_m(w)$ порядку $m \geq 1$ задовольняють рівності*

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{u(x)}{|x|^{\beta_k}} Y_m\left(\frac{x}{|x|}\right) dx = 0,$$

де $\beta_k \in \{2k\}_{k=1}^{\frac{m+1}{2}}$ *при непарних, та* $\beta_k \in \{2k+1\}_{k=1}^{\frac{m}{2}}$ *при парних* m.

З теореми 4 та [4] випливає, що оператор B_ρ^2 збігається із звуженням оператора $-\Delta$ на множину $D(B_\rho^2) = W_2^2(\mathbb{R}^3) \cap \mathfrak{H}_\rho$. Це, зокрема, означає, що класичне хвильове рівняння в $\mathbb{R}^3$, збурення якого зосереджено в кулі радіуса ρ, є ρ-збуреним. Отже, для такого типу рівнянь результати цієї роботи дозволяють встановити вигляд матриці розсіяння.

1. *Ахиезер Н. И., Глазман И. М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966. – 543 с.
2. *Кочубей А. Н.* О расширениях положительно определенного симметрического оператора // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 168 – 171.
3. *Горбачук В. I., Горбачук М. Л.* Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1984. – 282 с.
4. *Кужіль С. О.* Про абстрактну схему розсіяння Лакса – Філліпса для диференціально-операторних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 452 – 463.
5. *Kuzhel S. A.* Abstract wave equation: definition and properties of solutions. – Kiev, 1996. – 45 p. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukr. Inst. Math.; 96.14).
6. *Лакс П. Д., Филлипс Р. С.* Теория рассеяния. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
7. *Адамян В. М., Аров Д. З.* Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов // Мат. исслед. АН МССР. – 1966. – **1**, № 2. – С. 3 – 64.
8. *Секефальви-Надь Б., Фояш Ч.* Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Мир, 1970. – 431 с.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1967. – 323 с.
10. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Операторы Штурма – Лиувилля и Дирака. – М.: Наука, 1988. – 431 с.
11. *Снеддон И.* Преобразования Фурье. – М.: Изд-во иностр. лит, 1955. – 667 с.
12. *Helgason S.* The Radon transform. – Boston; Basel: Birkhauser, 1980. – 192 p.

Одержано 03.04.97