УДК 517.521.8

Н. А. Давыдов (Нац. пед. ун-т, Киев)

ДВЕ ТЕОРЕМЫ ИЗ ТЕОРИИ СУММИРОВАНИЯ ЧИСЛОВЫХ РЯДОВ НИЖНИМИ ТРЕУГОЛЬНЫМИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ МОНОТОННЫМИ МАТРИЦАМИ

For so-called monotone matrices, we establish necessary and sufficient conditions of summation by them up to zero of some divergent sequences of 0 and 1 or some unbounded sequences of nonnegative numbers.

Для так званих монотонних матриць встановлено необхідні та достатні умови підсумовування ними до нуля деяких розбіжних послідовностей з 0 і 1 або деяких необмежених послідовностей невід'ємних чисел.

1. Мазуру и Орличу [1, с. 375] принадлежит теорема о том, что если регулярная матрица суммирует ограниченную расходящуюся последовательность, то она суммирует и неограниченную последовательность. Однако в этой теореме не даны условия, при которых эта матрица ограниченно эффективна, т. е. суммирует хотя бы одну ограниченную расходящуюся последовательность.

В настоящей работе указан класс матриц, ограниченно и неограниченно эффективных, причем на этом классе матриц упомянутая теорема Мазура – Орлича оказывается обратимой, в то время как на классе всех регулярных матриц эта теорема необратима.

2. Матрицу $\|a_{nk}\|$ назовем *монотонной,* если она нижняя треугольная и удовлетворяет условиям

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0 \quad \forall\, k \quad \text{и} \quad |a_{n+1,k}| \le |a_{nk}| \quad \forall\, k \in \overline{0,n}, \quad n \ge n_0. \tag{1}$$

Заметим, что монотонная матрица может быть регулярной, но не обязательно, поскольку условия (1) содержат только одно из трех условий регулярности.

Основными результатами данной работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Для того чтобы монотонная матрица* $\|a_{nk}\|$ *суммировала к нулю некоторую расходящуюся ограниченную неотрицательную последовательность* (s_n) *(возможно, что* $s_n = 0$ *или* 1 *для любого* n*), достаточно, а в случае положительной матрицы и необходимо, чтобы*

$$\varliminf_{n\to\infty} \|a_{nn}\| = 0. \tag{2}$$

Теорема 2. *Для того чтобы монотонная матрица* $\|a_{nk}\|$ *суммировала к нулю некоторую неограниченную неотрицательную последовательность* (s_n) *(возможно, только с двумя частичными пределами* 0 *и* $+\infty$*), достаточно,* *а в случае положительной матрицы и необходимо, чтобы выполнялось равенство* (2).

***Следствие* 1.** *Для того чтобы монотонная положительная матрица* $\|a_{nk}\|$ *суммировала к нулю некоторую расходящуюся ограниченную неотрицательную последовательность, необходимо и достаточно, чтобы она суммировала к нулю некоторую неограниченную неотрицательную последовательность.*

***Следствие* 2.** *Пусть* $z_0 \neq 0$, F — *замкнутое множество, причем* $\{0, z_0\} \subset F \subset \{z : |z| \leq R\}$ (*в частности*, $F = \{z : |z| \leq R\}$). *Тогда существует последовательность комплексных чисел* (s_n), *всюду плотная в* F, *которая суммируется к нулю монотонной матрицей* $\|a_{nk}\|$, *удовлетворяющей условию* (2).

***Следствие* 3.** *Матрица средних Чезаро порядка* $\alpha \geq 1$ *суммирует к нулю как некоторые расходящиеся последовательности из* 0 *и* 1, *так и некоторые неограниченные неотрицательные последовательности, частичными пределами которых являются только числа* 0 *и* $+\infty$.

***Следствие* 4.** *Для того чтобы матрица Рисса* (R, p_n), *где* $p_0 > 0$, $p_i \geq 0$ *для любого* i, $P_n = \sum_{i=0}^{n} p_i \to \infty$, $n \to \infty$, *суммировала к нулю некоторую расходящуюся последовательность из* 0 *и* 1 (*некоторую неограниченную неотрицательную последовательность*), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p_n}{P_n} = 0. \tag{3}$$

***Следствие* 5.** *Пусть положительная матрица Вороного* (W, p_n) *удовлетворяет условиям*

$$p_0 \geq p_1 \geq \ldots \geq p_n \geq \ldots \quad \text{и} \quad \lim_{n \to \infty} P_n = +\infty.$$

Тогда эта матрица суммирует к нулю как некоторые расходящиеся последовательности из 0 *и* 1, *так и некоторые неограниченные неотрицательные последовательности, имеющие только два частичных предела:* 0 *и* $+\infty$.

3. *Доказательство теорем* 1 *и* 2. Пусть матрица $\|a_{nk}\|$ монотонная и удовлетворяет условию (2). Построим возрастающую последовательность (n_k) следующим образом.

В силу условий (1) и (2) существует число $n_1 > 1$, для которого

$$\sum_{i=0}^{1-1} |a_{n_1 n_i}| \leq 1, \quad |a_{n_1 n_1}| \leq 1,$$

где $n_0 = 0$.

Допустим, что уже выбрано число n_k, для которого справедливы неравенства

$$\sum_{i=0}^{k-1} |a_{n_k n_i}| \leq \frac{1}{k}, \quad |a_{n_k n_k}| \leq \frac{1}{k}. \tag{4}$$

Поскольку $\lim\limits_{n \to \infty} a_{ni} = 0$ для любого i, а $\varliminf\limits_{n \to \infty} |a_{nn}| = 0$, то существует число $n_{k+1} > n_k + 1$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{k} |a_{n_{k+1} n_i}| \leq \frac{1}{k+1} \quad \text{и} \quad |a_{n_{k+1} n_{k+1}}| \leq \frac{1}{k+1}.$$

В силу принципа математической индукции последовательность (n_k) построена таким образом, что неравенства (4) выполняются для всех $k \in N$.

Возьмем $1 \le s_{n_k} \le \sqrt{k}$, $k \in N$, и $s_n = 0$, когда $n \ne n_k$, $k \in N$. Покажем, что $t_n = \sum_{j=0}^{n} a_{nj} s_j \to 0$, $n \to \infty$.

Учитывая неравенства (1) и (4), для $n \in [n_k; n_{k+1})$ имеем:

$$|t_n| = \left| \sum_{j=0}^{n} a_{nj} s_j \right| \le \sum_{j=0}^{n} |a_{nj}||s_j| = \sum_{i=1}^{k} |a_{nn_i}| s_{n_i} \le$$

$$\le \sqrt{k} \sum_{i=1}^{k} |a_{n_k n_i}| \le \frac{2}{\sqrt{k}} \to 0, \quad k \to \infty.$$

Достаточность доказана, причем в силу построения последовательность (s_n) может состоять из 0 и 1 или иметь два частичных предела: 0 и $+\infty$.

Допустим теперь, что матрица $\|a_{nk}\|$ не только монотонна, но и неотрицательна. Пусть эта матрица суммирует к нулю некоторую расходящуюся неотрицательную последовательность (s_n) (ограниченную или неограниченную).

Тогда существует подпоследовательность $s_{n_k} \ge \delta > 0$, $k \in N$. В силу этого $t_{n_k} = \sum_{j=0}^{n_k} a_{n_k j} s_j \ge a_{n_k n_k} s_{n_k} \ge \delta a_{n_k n_k}$ для любого k, а потому $0 \le a_{n_k n_k} \le \le \frac{1}{\delta} t_{n_k} \to 0$, $k \to \infty$. Отсюда и вытекает условие (2).

Теоремы 1 и 2 доказаны.

Следствие 1 сразу вытекает из теорем 1 и 2.

Если в доказательстве достаточности теорем 1 и 2 взять подпоследовательность (s_{n_k}) всюду плотной в F, то получим доказательство следствия 2.

Следствие 3 вытекает из теорем 1 и 2 в силу известной теоремы [2, с. 131].

Следствие 4 вытекает из теорем 1 и 2 в силу того, что матрица Рисса, очевидно, монотонна: $a_{nk} = \frac{p_k}{P_n} \ge \frac{p_k}{P_{n+1}} = a_{n+1,k}$, $k \in \overline{0,n}$, $a_{nk} \to 0$, $n \to \infty$, для любого k, а также $a_{nn} = \frac{p_n}{P_n}$, т. е. условие (2) равносильно условию (3).

Если выполнены условия следствия 5, то для матрицы Вороного выполнены все условия теорем 1 и 2: $a_{nk} = \frac{p_{n-k}}{P_n} \ge \frac{p_{n+1-k}}{P_n} \ge \frac{p_{n+1-k}}{P_{n+1}} = a_{n+1,k}$, $k \in \overline{0,n}$, $a_{nk} \le a_{nn} = \frac{p_0}{P_n} \to 0$, $n \to \infty$, для любого k.

Этим доказано следствие 5.

1. *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: Физматгиз, 1960. – 471 с.
2. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. – М.: Изд-во иностр. лит., 1951. – 504 с.

Получено 25.12.96