УДК 517.9

Н. И. Ронто, А. М. Самойленко, С. И. Трофимчук
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРИЯ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА: ДОСТИЖЕНИЯ И НОВЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ. V*

For the numerical-analytic method suggested by A. M. Samoilenko in 1965, we analyze the application to difference equations.

Проаналізовано застосування чисельно-аналітичного методу, запропонованого А. М. Самойленком у 1965 р., до різницевих рівнянь.

Данная статья является пятой частью работы [1 – 4], поэтому в ней продолжается нумерация пунктов, теорем, формул и других элементов текста. Продолжаем исследование численно-аналитического метода, называемого в дальнейшем для простоты одним словом „метод".

3.7. Разностные уравнения. В последнее время возрос интерес к исследованию разностных уравнений, изучение которых необходимо, в частности, при численном моделировании решений дифференциальных уравнений. В связи с этим представляется важным получить аналог метода и для разностных уравнений, а также выяснить связь между сходимостью метода в непрерывном случае и при его дискретизации. Оказывается, что в случае сходимости классической схемы метода для обыкновенных дифференциальных уравнений подходящая дискретизация сохраняет это свойство.

Перейдем к более подробному обсуждению этих вопросов.

3.7.1. ***Уравнения типа Вольтерра и Фредгольма.*** В работах [5 – 8] метод впервые был применен к нахождению N-периодических решений системы разностных уравнений вида

$$x_{k+1} = x_k + f_k(x_k), \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{134}$$

где

$$x_k = \mathrm{col}(x_k^{[1]}, \ldots, x_k^{[n]}), \qquad f_k = \mathrm{col}(f_k^{[1]}, \ldots, f_k^{[n]}),$$

$f_k(x)$ — периодическая по k с периодом N n-мерная вектор-функция в некоторой ограниченной замкнутой области $D \subset \mathbb{R}^n$, удовлетворяющая неравенствам

$$|f_k(x)| \le M, \qquad |f_k(x) - f_k(y)| \le K|x - y|,$$

где вектор M и матрица K неотрицательны.

Можно показать, что аналогом интегрального уравнения (2) в случае N-периодической задачи (134) будет уравнение

$$x_k(z) = z + \sum_{i=0}^{k} f_i(x_i(z)) - \frac{k}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i(z)), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots N, \tag{135}$$

где считается, что $\sum_{i=j}^{j-1} \cdot = 0$.

Если через $x_i^*(z)$, $i \in \mathbb{Z}$, обозначить решение уравнения (135), то начальное значение N-периодической последовательности

$$\{\, p_k : p_{k+1} = p_k + f_k(p_k), \quad p_0 = z \,\}$$

---

* Работа выполнена при частичной поддержке INTAS, грант №96-0915, Государственного фонда фундаментальных исследований, проект № 1.4 (269), а также гранта OMFB UK-3/1998.

можно найти, решая определяющее (суммарное) уравнение

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i^*(z)) = 0. \tag{136}$$

Основной результат указанных работ [5 – 8] заключается в установлении условий, достаточных для разрешимости уравнения (135) методом простых итераций. Так, в книге [7] доказано следующее утверждение.

Теорема 26 ([7], *теорема* 1.18). *Предположим, что спектральный радиус матрицы $NK/2$ меньше единицы:*

$$r\left(\frac{NK}{2}\right) < 1. \tag{137}$$

Пусть $z \in D_\beta$, где $\beta = NM/2$. Тогда последовательность функций, задаваемых итерационным процессом

$$x_k^{(m+1)}(z) = z + \sum_{i=0}^{k-1} f_i(x_i^{(m)}(z)) - \frac{k}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i^{(m)}(z)),$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots; \quad x_i^{(0)}(z) = z, \tag{138}$$

равномерно сходится к решению $x_k^*(z)$ уравнения (135). *Более того, справедлива оценка*

$$\left|x_k^*(z) - x_k^m(z)\right| \le \frac{N}{2} Q^m (E - Q)^{-1} M .$$

Замечание **10.** Поскольку разностное уравнение (134) можно представить как импульсную систему вида

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \Delta x|_k = f_k(x), \end{cases}$$

то все результаты п. 3.6 из [4] применимы и к исследованию уравнения (134).

В 1988 г. дискретная версия метода была применена к нахождению периодического решения скалярного уравнения типа (134) в статье R. Musielak, J. Popluda [9]. Появившиеся впоследствии работы M. Kwapisz [10 – 12] усиливают указанные выше результаты сразу в нескольких отношениях. Во-первых, в [10, 12] доказано, что оценка (137) может быть ослаблена до

$$r\left(\frac{NK}{3}\right) < 1. \tag{139}$$

Во-вторых, неравенство (137) в случае, когда матрица K такова, что выполняется соотношение

$$\max_{0\le j\le N-1}\left|f_j(x_0, x_1, \ldots, x_N) - f_j(y_0, y_1, \ldots, y_N)\right| \le K \max_{0\le j\le N}\left|x_j - y_j\right|,$$

обеспечивает сходимость алгоритма метода для разностной краевой задачи общего „фредгольмова” вида

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + f_k(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_N), & k = 0, 1, 2, \ldots, N-1, \\ Ax_0 + Bx_N = d, & \det B \ne 0, \end{cases} \tag{140}$$

рассматриваемой во всем банаховом пространстве X.

Алгоритм метода при этом для задачи (140) имеет вид

$$x_k^{(m)}(z) = z + \sum_{i=0}^{k-1} f_i\Big(x_0^{(m-1)}(z), x_1^{(m-1)}(z), \ldots, x_N^{(m-1)}(z)\Big) -$$

$$- \frac{k}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f_i\Big(x_0^{(m-1)}(z), x_1^{(m-1)}(z), \ldots, x_N^{(m-1)}(z)\Big) + \tag{141}$$

$$+ \frac{k}{N} B^{-1}[d-(A+B)z], \qquad m = 1, 2, \ldots; \quad x_i(0) = z.$$

Как видим, (141) — полный аналог схемы метода для двухточечной краевой задачи (см. гл. 1 работы [13])

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(t,x), \\ Ax(0) + Bx(T) = d. \end{cases}$$

Следует отметить, что в предположении „нерезонансности" краевых условий в (140) $(\det(A+B) \neq 0)$, в работе [11] получены достаточные условия разрешимости разностной краевой задачи (140) в виде

$$N\tilde{K}\left[\left\|(A+B)^{-1}B\right\| \max_{0\le n\le N-1}\left\|E - \frac{n}{N}B^{-1}(A+B)\right\| + \frac{1}{2}\right] < 1, \tag{142}$$

где константа $\tilde{K}$ такова, что выполняется соотношение

$$\max_{0\le j\le N-1}\left\|f_j(x_0, x_1, \ldots, x_N) - f_j(y_0, y_1, \ldots, y_N)\right\| \le \tilde{K}\max_{0\le j\le N}\left|x_j - y_j\right|.$$

При доказательстве этого факта вначале методом простой итерации устанавливается разрешимость суммарного уравнения, порожденного схемой (141), после чего исследуется определяющее уравнение

$$z = (A+B)^{-1}\left[d - B\sum_{i=0}^{N-1} f_i\left(x_0^*(z), x_1^*(z), \ldots, x_N^*(z)\right)\right], \tag{143}$$

где $x_k^*(z)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, — решение уравнения, задаваемого схемой (141).

При этом показано, что условие (142) достаточно для того, чтобы к (141), (143) можно было применить принцип сжимающих отображений и тем самым установить существование и единственность решения разностной краевой задачи (140). Более того, в работе [12] установлено, что ограничительное условие типа (137), (139) для возможности применения метода к исследованию задачи (140) может быть снято, если это уравнение „вольтерровского" типа, т. е.

$$f_k(x_0, x_1, \ldots, x_N) = f_k(x_0, x_1, \ldots, x_k) \quad \forall\, k = 0, 1, \ldots, N.$$

При этом множители k/N, $k = 0, 1, \ldots, N$, в правой части (141) заменяются на подходящим образом выбранную числовую последовательность $\omega(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, такую, что $0 = \omega(0) \le \omega(k) \le \omega(N) = 1$. А именно, разрешимость краевой задачи (140) сводилась к решению суммарного уравнения

$$x_k(z) = z + \sum_{i=0}^{k-1} f_i\big(x_0(z), x_1(z), \ldots, x_i(z)\big) - \omega(k)\sum_{i=0}^{N-1} f_i\big(x_0(z), x_1(z), \ldots, x_i(z)\big) +$$

$$+ \omega(k)\left[B^{-1}(d-(A+B)z)\right], \qquad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{144}$$

а затем определяющего уравнения

$$B^{-1}(d-(A+B)z) \;=\; \sum_{i=0}^{N-1} f_i\Big(x_0^*(z), x_1^*(z), \ldots, x_i^*(z)\Big). \tag{145}$$

Имеет место следующее утверждение.

Теорема 27 [12]. *Пусть последовательность* $\omega(k)$, $k = 0, 1, \ldots, N$, *неубывающая и выполнено условие Липшица вида*

$$\left|f_k(x_0, x_1, \ldots, x_k) - f_k(y_0, y_1, \ldots, y_k)\right| \le L(k) \max_{0\le j\le k}\left|x_j - y_j\right|, \tag{146}$$

где $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$, $L(k)$ — *матрицы с неотрицательными элементами, а*

$$\max_{0\le k\le n}\left\{a_j^{(k)} \ge 0\right\}_{j=1}^{p} \;=\; \left\{\max_{0\le k\le n} a_j^{(k)} \ge 0\right\}_{j=1}^{p}.$$

Кроме того, пусть спектральный радиус $r(G)$ *матрицы*

$$G \;=\; \sum_{i=0}^{N-1} \prod_{s=i+1}^{N-1} \big(E + (1-\omega(s))\, L(s)\, \omega(i)\, L(i)\big)$$

меньше единицы.

Тогда для каждого $z \in \mathbb{R}^n$ *существует единственное решение* $x_k^*(z)$ *суммарного уравнения* (144), *которое может быть найдено методом последовательных приближений.*

***Замечание* 11.** Очевидно, что по данной последовательности матриц Липшица $L(k)$ всегда можно указать числовую последовательность $\omega(k)$ (например, $\omega(0) = \omega(1) = \ldots = \omega(N-1) = 0$, $\omega(N) = 1$, и при этом $G \equiv 0$) такую, что $r(G) < 1$.

Если вместо условия (146) в задаче (140) выполнено более жесткое ограничение [12] вида

$$\left|f_k(x) - f_k(y)\right| \le L(k)\,|x-y|, \qquad k = 0, 1, \ldots, N$$

(т. е. $f_k(x_0, x_1, \ldots, x_N) = f_k(x_k)$) с неотрицательными матрицами $L(k)$ и спектральный радиус матрицы

$$A_\omega = \begin{bmatrix} \omega(1)\,L(1) & \omega(1)\,L(2) & \ldots & \omega(1)\,L(N-1) \\ (1-\omega(2))\,L(1) & \omega(2)\,L(2) & \ldots & \omega(2)\,L(N-1) \\ (1-\omega(3))\,L(1) & (1-\omega(3))\,L(2) & \ldots & \omega(3)\,L(N-1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (1-\omega(N-1))\,L(1) & (1-\omega(N-1))\,L(2) & \ldots & \omega(N-1)\,L(N-1) \end{bmatrix}$$

меньше единицы:

$$r(A_\omega) < 1, \tag{147}$$

то для всех $z \in \mathbb{R}^n$ существует единственное решение $x_k^*(z)$ суммарного уравнения

$$x_k(z) \;=\; z + \sum_{i=0}^{k-1} f_i(x_i(z)) \;-\; \omega(k)\sum_{i=0}^{N-1} f_i(x_i(z)) \;+$$

$$+\; \omega(k)\,[B^{-1}(d-(A+B)z)], \quad k = 0, 1, \ldots, N, \tag{148}$$

которое может быть решено методом простой итерации.

Снова-таки, за счет подходящего выбора последовательности $\omega(k)$ всегда можно добиться выполнения условия (147).

Нетрудно увидеть, что уравнение (135) является частным случаем (148), если рассматривать N-периодическую краевую задачу для (134), когда $\omega(k) = k/N$, $A = E$, $B = -E$, $d = 0$.

Предположим, что $L(1) = L(2) = \ldots = L(N-1) = L$. В этом случае матрица A_ω имеет вид

$$A_\omega = \operatorname{diag}(L, L, \ldots, L)\, B_N, \tag{149}$$

где

$$B_N = \begin{bmatrix} \frac{1}{N}E & \frac{1}{N}E & \ldots & \frac{1}{N}E & \frac{1}{N}E \\ \left(1-\frac{2}{N}\right)E & \frac{2}{N}E & \ldots & \frac{2}{N}E & \frac{2}{N}E \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(1-\frac{N-2}{N}\right)E & \left(1-\frac{N-2}{N}\right)E & \ldots & \frac{N-2}{N}E & \frac{N-2}{N}E \\ \left(1-\frac{N-1}{N}\right)E & \left(1-\frac{N-1}{N}\right)E & \ldots & \left(1-\frac{N-1}{N}\right)E & \frac{N-1}{N}E \end{bmatrix}.$$

Принимая во внимание, что $\operatorname{diag}(L, L, \ldots, L)$ коммутирует с матрицей B_N, а спектральный радиус $\operatorname{diag}(L, L, \ldots, L)$ равен $r(L)$, получаем

$$r(A_\omega) \le r(L)\, r(B_N).$$

В статье [12] показано, что

$$r(B_N) \le \frac{N}{3},$$

а это приводит к оценке (139).

Следующим этапом в изучении периодической краевой задачи (134) с помощью уравнения (135) является работа [14]. В ней рассматриваются уравнения в банаховом пространстве с конусом, и для таких разностных уравнений была улучшена оценка сходимости (139) итерационного процесса (138).

Подробнее эти результаты будут изложены в п. 3.7.3. Для удобства в первую очередь в п. 3.7.2 приводятся некоторые нужные в дальнейшем вспомогательные утверждения.

3.7.2. ***Вспомогательные утверждения.*** Используемая в [15, 16, 13, 17, 18] техника доказательства сходимости метода как для периодических, так и для общего вида краевых задач (см. также п. 1.2.1 в [1]) опирается на свойства рекуррентно определенной последовательности скалярных функций

$$\alpha_{m+1}(t) = \left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t \alpha_m(s)\,ds + \frac{t}{T}\int_t^T \alpha_m(s)\,ds, \quad t \in [0, T], \tag{150}$$

$$m = 0, 1, 2, \ldots; \quad \alpha_0(t) = 1.$$

Можно проверить [14], что

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1-\frac{t}{T}\right),$$

$$\alpha_2(t) = \alpha_1(t)\left(\frac{T}{6} + \frac{1}{3}\alpha_1(t)\right),$$

$$\alpha_3(t) = \alpha_1(t)\left(\frac{T^2}{20} + \frac{T}{15}\alpha_1(t) + \frac{1}{15}\alpha_1^2(t)\right), \tag{151}$$

$$\alpha_4(t) = \alpha_1(t)\left(\frac{37T^3}{2520} + \frac{5T^2}{252}\alpha_1(t) + \frac{T}{70}\alpha_1^2(t) + \frac{1}{105}\alpha_1^3(t)\right).$$

При этом $\alpha_m(0) = \alpha_m(T) = 0$ для всех $m = 1, 2, \ldots$.

В приложениях теории метода важны следующие две леммы.

Лемма 5 [13, с. 31]. *Для всякой непрерывной функции* $f\colon [0, T] \to \mathbb{R}$ *имеет место оценка*

$$\left|\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,ds\right]d\tau\right| \leq \alpha_1(t) \max_{s\in[0,T]}|f(s)|. \tag{152}$$

Лемма 6 [13, с. 31]. *Функции последовательности* (150) *удовлетворяют неравенствам*

$$\alpha_{m+1}(t) \leq \frac{\pi}{3}T^m q_m\,\alpha_1(t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{153}$$

где постоянные $q_m \leq 1/\pi^m$.

В работе [19] эти утверждения были улучшены следующим образом.

Лемма 7. *Если* $f \in C([0, T], \mathbb{R})$, *то*

$$\left|\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)\,ds\right]d\tau\right| \leq \frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{s\in[0,T]} f(s) - \min_{s\in[0,T]} f(s)\right].$$

Лемма 8. *Для функций* $\alpha_m(t)$ *вида* (150) *имеют место оценки*:

$$\alpha_{m+1}(t) \leq \left(\frac{3}{10}T\right)\alpha_m(t), \quad t \in [0, T],$$

$$\alpha_{m+1}(t) \leq \frac{10}{9}\left(\frac{3}{10}T\right)^m \alpha_1(t), \quad m = 0, 1, 2, \ldots .$$

***Замечание* 12.** Легко проверить, что

$$\frac{1}{2}\left[\max_{s\in[0,T]} f(s) - \min_{s\in[0,T]} f(s)\right] \leq \max_{s\in[0,T]}|f(s)| \tag{154}$$

и в (154) равенство достигается тогда и только тогда, когда

$$\max_{s\in[0,T]} f(s) = -\min_{s\in[0,T]} f(s) = \max_{s\in[0,T]}|f(s)|.$$

Кроме того, фигурирующая в оценках леммы 8 постоянная $3/10$ меньше, чем $1/\pi$ в лемме 6.

Следуя работе [14], переходим к более подробному изучению свойств функций (150). Для упрощения выкладок в дальнейшем примем, что $T = 1$. Удобно представить функции последовательности (150) в виде $\alpha_m = A^m\alpha_0$, где $A: C([0, 1], \mathbb{R})$ — это линейный интегральный оператор, заданный формулой

$$(Ax)(t) := (1-t)\int_0^t x(s)\,ds + t\int_t^1 x(s)\,ds, \quad t \in [0, 1], \tag{155}$$

а

$$\alpha_0(t) = 1.$$

Оператор A имеет многие хорошие свойства, упрощающие его исследование: симметричность по t, компактность, α_1-положительность. Свойство α_1-положительности (см. гл. 2, § 1 в [19]) имеет место, поскольку для каждой ненулевой неотрицательной функции $x \in C[0, 1]$ существуют $m(x) > 0$ и $M(x) > 0$ такие, что

$$m(x)\alpha_1(t) \leq (Ax)(t) \leq M(x)\alpha_1(t), \quad t \in [0, 1].$$

Согласно теореме 2.11 в [13], α_1-положительность оператора A гарантирует существование единственной нормированной собственной функции $\xi(t)$, соответствующей собственному значению $r(A)$.

Лемма 9 [14]. *Пусть* $\beta(t) = t(1-t)$. *Тогда для всех* $t \in [0, 1]$ *и всех* $m \in \mathbb{N}$

$$(A\beta^m)(t) = \beta(t)\sum_{k=1}^{m+1} a_k \beta^{k-1}(t),$$

где

$$a_1 = a_2 = \frac{(m!)^2}{(2m+1)!}, \quad a_{k+2} = \frac{2^{k+1}(2k+1)!!\,(m!)^2}{(k+2)!\,(2m+1)!},$$

$$0 \leq m-2, \quad a_m = \frac{1}{2(4m^2-1)}, \quad a_{m+1} = \frac{2}{m+1}.$$

***Следствие* 9** [14]. *Для функции* $A\alpha_1^m(t)$ *при* $m \in \mathbb{N}$ *и* $T = 1$ *имеет место представление*

$$(A\alpha_1^m)(t) = \sum_{k=1}^{m+1} b_k \alpha_1^k(t),$$

где

$$b_1 = \frac{2^{m-1}(m!)^2}{(2m+1)!}, \quad b_2 = \frac{2^{m-2}(m!)^2}{(2m+1)!},$$

$$b_k = \frac{(2k-3)!!}{k!} b_1 = \frac{2^{m-2}(m!)^2(2k-3)!!}{(2m+1)!\,k!}, \quad 2 \leq k \leq m,$$

$$b_m = \frac{1}{2(4m^2-1)}, \quad b_{m+1} = \frac{1}{2m+1}.$$

В частности,

$$A\alpha_1(t) = \frac{\alpha_1(t)}{6} + \frac{\alpha_1^2}{3},$$

$$A\alpha_1^2(t) = \frac{\alpha_1(t)}{15} + \frac{\alpha_1^2}{30} + \frac{\alpha_1^3(t)}{5},$$

$$A\alpha_1^3(t) = \frac{\alpha_1(t)}{35} + \frac{\alpha_1^2}{70} + \frac{\alpha_1^3(t)}{70} + \frac{\alpha_1^4(t)}{7}.$$

***Следствие* 10** [14]. *Функция* α_m — *полином степени* m *по* α_1, *а именно*

$$\alpha_m \equiv A_m\alpha_0 = \alpha_1 R_{m-1}(\alpha_1),$$

где $R_{m-1}(\cdot)$ — *полином степени* $m-1$ *с положительными коэффициентами,* $R_{m-1}(0) = \frac{1}{2}\int_0^1 \alpha_{m-1}(s)\,ds$. *Таким образом,* α_m — *многочлен степени* $2m$ *по* t, *и* $\max_{t\in[0,1]}\alpha_m(t) = \alpha_m(1/2)$ *для всех* $m \ge 1$.

Следствие **11** [14]. *Справедливы соотношения:*

a) $\max_{t\in[0,1]}\dfrac{\alpha_4(t)}{\alpha_3(t)} = \dfrac{1}{\lambda^*}$, $\lambda^* = 3{,}406623\ldots$ (*точное значение* λ^* *выражается в радикалах*);

b) $\alpha_3'(t) = \dfrac{a_1'(t)}{15}\left[\dfrac{3}{4} + 2\alpha_1(t) + 3\alpha_1^2(t)\right]$, $\alpha_3''(t) = 4\left(\dfrac{1}{12} - \alpha_1^2(t)\right)$ $\forall t\in[0,1]$;

c) $\max_{t\in[0,1]}\left|\alpha_3'(t)\right| = \dfrac{2\sqrt{2}}{15\sqrt{3}}\sqrt{1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}} = 0{,}13672731\ldots$;

d) $\max_{t\in[0,1]}\dfrac{\alpha_2(t)}{\alpha_1(t)} = \dfrac{5}{\sqrt{2}}$.

Приводимые далее утверждения дают некоторые оценки значений оператора A вида (155) и его дискретного аналога A_N, где

$$(A_N\bar{x})(n) := \begin{cases} \dfrac{1}{N}\left(1-\dfrac{n}{N}\right)\sum\limits_{i=0}^{n-1}x_i + \dfrac{n}{N^2}\sum\limits_{i=n}^{N-1}x_i, & 1\le n\le N-1, \\ 0, & n = 0, \end{cases} \tag{156}$$

$\bar{x} = \operatorname{col}(x_0, x_1, \ldots, x_{N-1})$.

Положим

$$H_N x := A_N\varphi_N x - \varphi_N A x,$$

где $x \in C(S^1, \mathbb{R})$, φ_N — оператор дискретизации,

$$\varphi_N : C(S^1,\mathbb{R}) \ni x \to \varphi_N x := \operatorname{col}\left(x(0), x\left(\frac{1}{N}\right), \ldots, x\left(\frac{N-1}{N}\right)\right) \in l_N^\infty, \tag{157}$$

$C(S^1, \mathbb{R})$ — пространство всех непрерывных 1-периодических скалярных функций (на окружности $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$), и

$$l_N^\infty := \left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{l^\infty}\right).$$

Лемма 10 [14]. *Для всех* $x \in C^1(S^1, \mathbb{R})$ *справедлива оценка*

$$|H_N x| \le \frac{\max_{t\in[0,1]}\left|x'(t)\right|}{N}\varphi_N\alpha_1.$$

Следствие **12** [14]. *Имеет место неравенство*

$$A_N\varphi_N\alpha_3 \le \lambda^*\varphi_N\alpha_3 + \frac{\max_{t\in[0,1]}\left|\alpha_3'(t)\right|}{N}\varphi_N\alpha_1.$$

Лемма 11 [14]. *Справедлива оценка*

$$A_N\varphi_N\alpha_1 \le \frac{5}{\sqrt{2}}\varphi_N\alpha_3 + \frac{1}{2N}\varphi_N\alpha_1.$$

Лемма 12 [14]. *Выполняется равенство*

$$\left\|A^N\right\| = \max_{t\in[0,1]}\alpha_n(t) \quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

***Следствие* 13** [14]. *Верно соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\alpha_n\left(\frac{1}{2}\right)} = r(A) = \frac{1}{q} = \frac{1}{3{,}1461306\ldots}.$$

Более того,

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\alpha_n(t)} = r(A) \quad \forall t\in(0,1),$$

и равномерно на отрезке $[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{\alpha_n(t)}{\alpha_1(t)}} = r(A).$$

Следующее утверждение облегчает практическое вычисление спектрального радиуса оператора A_N вида (156).

Лемма 13 [14]. *Для каждого* $N\geq 1$ *спектральный радиус* $r(A_N) = 1/c_N$ *оператора* A_N *равняется наибольшему положительному корню полинома*

$$p_N(\lambda) := N^2\lambda^{N-1} - (N-1)\lambda^{N-2} - \sum_{i=1}^{N-2} i\lambda^{i-1}\prod_{j=i+1}^{N-1}\left(\lambda + \frac{N-2j}{N^2}\right).$$

Доказательство леммы 9 и следующих за ней утверждений можно найти в [14].

3.7.2. *Уравнение вида* $x_{k+1} = x_k + f_k(x_k)$. В работе [14] с применением численно-аналитического метода к уравнению вида (134) получено улучшение достаточного условия сходимости (139) в случае периодической краевой задачи.

Приведем формулировку соответствующего утверждения для более общей двухточечной задачи.

Теорема 28. *Предположим, что спектральный радиус*

$$r\left(\frac{NK}{c_N}\right) < 1. \tag{158}$$

Тогда схема численно-аналитического метода

$$x_k^{j+1} = z + \sum_{i=0}^{k-1} f_i\left(x_i^{(j)}(z)\right) - \frac{k}{N}\sum_{i=0}^{k-1} f_i\left(x_i^{(j)}(z)\right) +$$

$$+ \frac{k}{N}\left[B^{-1}(d-(A+B)z)\right], \quad k = 0,1,\ldots,N; \quad j = 0,1,2,\ldots; \quad x_i^{(0)}(z) = z, \tag{159}$$

для двухточечной краевой задачи

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + f_k(x_k), & k = 0,1,\ldots,N; \\ Ax_0 + Bx_N = d, & \det B\neq 0, \end{cases} \tag{160}$$

является сходящейся.

Здесь $c_N = \dfrac{N}{r(B_N)}$, где B_N — *матрица вида* (149). *Числовая последовательность* $\{c_N\}$ *имеет следующие свойства*:

$$\lim_{N\to\infty} c_N = c_\infty = 3{,}4161306\ldots, \tag{161}$$

$$\min_{N\geq 2} c_N = c_5 = 3{,}38113277\ldots. \tag{162}$$

N	c_N	N	c_N
2	4	50	3,415602628956188
3	3,437694101250946	60	3,415763647669043
4	3,381197846482995	70	3,415860870512664
5	3,381132773963670	80	3,415924025588460
6	3,387542305176701	90	3,415967348911256
7	3,393374797824043	100	3,415998350004724
8	3,397884447992579	200	3,416097540016316
9	3,401284588368706	300	3,416115919915052
10	3,403863389821704	500	3,416125331798814
20	3,412879718581394	700	3,416127925032506
30	3,414671300096892	$\vdots$	$\vdots$
40	3,415306932199579	∞	3,416130626392786

В таблице, которая получена в [14] с использованием программы MATLAB 4.0, приведены значения c_N для некоторых N.

На основании результатов п. 3.7.1, при условии (158) доказательство сходимости последовательности (159) сводится к подсчету спектрального радиуса $r(B_N)$.

Доказательства соотношений (161) и (162) основываются [14] на теории, изложенной в [20], и факте сходимости операторов последовательности $\{A_N\}_{N\geq 1}$ к соответствующему линейному оператору сравнения, используемому в непрерывном случае.

Как следует из результатов работы [21], значение числа c_∞ можно определить, вычислив наибольший положительный корень некоторого трансцендентного уравнения. Подсчет на ЭВМ показывает, что $c_\infty = 3{,}416130626392786\ldots$.

***Замечание* 13.** Сходимость последовательности $\{c_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ может быть доказана и с использованием теории компактной аппроксимации операторов, развитой Г. М. Вайникко (см. [22], § 8.3).

***Замечание* 14.** Используемая в [14] теорема 1а [20, с. 529] гарантирует, что если $\lambda \in \rho(A)$ (резольвентное множество оператора A), и, кроме того,

$$N > \left[1 + 2\left\|I - \hat{\varphi}_N^{-1} f_N\right\|\right]\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\|,$$

то $\lambda \in \rho(A_N)$. В частности, это справедливо, когда $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq N/5$. Поэтому, если N_0 таково, что $\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq N_0/5$ $\forall \lambda \in [1/c_5, 1/2]$, то $c_N \geq c_5$ $\forall N \in N_0$.

Последнее неравенство, однако, довольно грубо, ибо можно показать, что наименьшее натуральное число, большее, чем $\left\|(1/c_5 I - A)^{-1}\right\|$, есть 656, и поэтому неравенство $c_N \geq c_5$ гарантировано только для $N > 3280$.

Предельное соотношение (161) доказывается с использованием следующего утверждения.

Лемма 14 ([14], лемма 5.3). *Справедливо неравенство* $c_N \geq 3{,}3813473\ldots$ $(\forall N \geq 810)$.

Доказательство леммы 14 опирается на свойства линейных операторов сравнения A_N и оператора дискретизации (157).

Утверждение, что $c_N \geq c_5$ для всех $N > 5$, следует из подсчитанных значений c_N (см. таблицу) и из леммы 14.

1. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. I // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 93 – 108.
2. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. II // Там же. – № 2. – С. 225 – 243.
3. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. III // Там же. – № 7. – С. 960 – 979.
4. *Ронто Н. И., Самойленко А. М., Трофимчук С. И.* Теория численно-аналитического метода: достижения и новые направления развития. IV // Там же. – № 12. – С. 1656 – 1672.
5. *Мартынюк Д. И.* Лекции по качественной теории разностных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1972. – 246 с.
6. *Мартынюк Д. И, Миронов Н. В., Харабовская Л. В.* Численно-аналитический метод исследования периодических решений нелинейных разностных уравнений // Дифференциально-разностные уравнения. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1971. – С. 58 – 66.
7. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Мартынюк Д. И.* Системы эволюционных уравнений с периодическими и условно-периодическими коэффициентами. – Киев: Наук. думка, 1985. – 216 с.
8. *Mitropolsky Yu. A., Samoilenko A. M., Martinyuk D. I.* Systems of evolutionary equations with periodic and quasiperiodic coefficients. – Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 1993. – 280 p.
9. *Musielak R., Popenda J.* On periodic solutions of a first order difference equation // An. sti. Univ. Iasi. sec. I.A Mat. 2. – 1988. – P. 124 – 132.
10. *Kwapisz M.* Some existence and uniqueness results for boundary value problems for difference equations // Appl. Anal. – 1990. – **37**. – P. 169 – 182.
11. *Kwapisz M.* On boundary value problems for difference equations // J. Math. Anal. Appl. – 1991. – **157**. – P. 254 – 270.
12. *Kwapisz M.* On modification of Samoilenko's numerical-analytic method of solving boundary value problems for difference equations // Appl. Math. – 1993. – **38**. № 2. – P. 133 – 144.
13. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы в теории краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1992. – 279 с.
14. *Rontó M., Ronto A., Trofimchuk S. I.* Numerical-analytic method for nonlinear differential equations. – Miskolc, 1996. – 60 p. – (Preprint / Univ. Miskolc, Inst. Math.; 96-02).
15. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. I // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 4. – С. 82 – 93.
16. *Самойленко А. М.* Численно-аналитический метод исследования периодических систем обыкновенных дифференциальных уравнений. II // Укр. мат. журн. – 1966. – **18**, № 2. – С. 50 – 59.
17. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования периодических решений. – Киев: Выща шк., 1976. – 180 с.
18. *Самойленко А. М., Ронто Н. И.* Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач. – Киев: Наук. думка, 1985. – 224 с.
19. *Красносельский М. А.* Положительные решения операторных уравнений. – М.: Физматгиз, 1962. – 394 с.
20. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 741 с.
21. *Трофимчук Е. П.* Интегральные операторы метода последовательных периодических приближений // Мат. физика и нелинейн. механика. – 1990. – Вып. 15 (47). – С. 31 – 36.
22. *Вайникко Г. М.* Компактная аппроксимация операторов и приближенное решение уравнений. – Тарту: Из-во Тарт. ун-та, 1970. – 192 с.

Получено 09.12.98