УДК 517.5

А. С. Сердюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПОПЕРЕЧНИКИ ТА НАЙКРАЩІ НАБЛИЖЕННЯ КЛАСІВ ЗГОРТОК ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ

We establish exact lower bounds for the Kolmogorov widths in the metrics of C and L for classes of functions with high smoothness; the elements of these classes are sourcewise-representable as convolutions with generating kernels that can increase oscillations. We calculate exact values of the best approximations of such classes by trigonometric polynomials.

Знайдено точні оцінки знизу поперечників за Колмогоровим в метриках C і L класів функцій високої гладкості, елементи яких витокоподібно зображаються у вигляді згорток із твірними ядрами, що можуть збільшувати осциляції. Обчислено точні значення найкращих наближень тригонометричними поліномами таких класів.

Нехай C — простір 2π-періодичних неперевних функцій $f(t)$ з рівномірною нормою

$$\|f\|_C = \max_t |f(t)|;$$

L — простір 2π-періодичних сумовних на $[0, 2\pi]$ функцій $f(t)$ із нормою

$$\|f\|_L = \|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(t)| dt;$$

L_∞ — простір 2π-періодичних вимірних і суттєво обмежених функцій $f(t)$, у якому норма задається рівністю

$$\|f\|_{L_\infty} = \sup_t \operatorname{vrai} |f(t)|.$$

***Означення* 1** ([1, с. 4]). *Нехай $f \in L$ і її ряд Фур'є $s[t]$ має вигляд*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f; x). \tag{1}$$

Нехай, далі, $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ — пара довільних фіксованих числових послідовностей $\psi_1(k)$ і $\psi_2(k)$, $k = 0, 1, \ldots$, $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = 0$, таких, що $\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k) \neq 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_1(k)}{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} A_k(f; x) - \frac{\psi_2(k)}{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} \tilde{A}_k(f; x), \tag{2}$$

$$\tilde{A}_k(f; x) \overset{\text{df}}{=} a_k \sin kx - b_k \cos kx$$

є рядом Фур'є деякої функції φ із L, то φ називають $\overline{\psi}$-похідною функції f і позначають $f^{\overline{\psi}}(\cdot)$. Підмножину функцій f із L, які мають $\overline{\psi}$-похідні, позначають $\overline{L}^{\overline{\psi}}$.

Покладемо

$$L_1^{\overline{\psi}} \overset{\text{df}}{=} \left\{ f \in \overline{L}^{\overline{\psi}} : \left\| f^{\overline{\psi}} \right\|_L \leq 1 \right\}; \qquad C_\infty^{\overline{\psi}} \overset{\text{df}}{=} \left\{ f \in C \cap \overline{L}^{\overline{\psi}} : \left\| f^{\overline{\psi}} \right\|_{L_\infty} \leq 1 \right\}.$$

В роботі знаходяться N-вимірні поперечники за Колмогоровим, тобто величини

$$d_N(\mathfrak{N}, X) = \inf_{F_N \subset X} \sup_{v \in X} \inf_{\xi \in F_N} \|v - \xi\|_X$$

(де зовнішній inf береться по всіх підпросторах $F_N \subset X$, розмірність яких не перевищує N) у випадках, коли X є простором C або L, а центрально-симетричною множиною $\mathfrak{N} \subset X$ є відповідно класи $C_\infty^{\overline{\psi}}$ або $L_1^{\overline{\psi}}$.

Якщо пара $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$ така, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_{-k} = \tilde{c}_k |c_k| \neq 0, \tag{3}$$

де $c_k = \psi_1(k) - i\psi_2(k)$, $k \in \mathbb{N}$, $\tilde{c}_k$ — число, спряжене до c_k, є рядом Фур'є деякої функції $\Psi(x)$ із L, то, як випливає із роботи [1, с. 7–9], для кожної $f \in \overline{L}^{\overline{\psi}}$ майже скрізь виконується рівність

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^{\overline{\psi}}(x-t)\Psi(t)\,dt \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{a_0}{2} + (f^{\overline{\psi}} * \Psi)(x), \tag{4}$$

в якій a_0 — вільний член розкладу Фур'є функції $f(\cdot)$.

Надалі скрізь будемо вимагати, щоб справджувалась умова

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)} < \infty, \tag{5}$$

яка забезпечує рівномірну збіжність ряду (3), а отже, і виконання співвідношення (4).

1. Знаходження оцінок поперечників знизу. Основним результатом цього пункту, який стосується знаходження оцінок знизу поперечників $d_{2n}(C_\infty^{\overline{\psi}}, C)$ і $d_{2n-1}(L_1^{\overline{\psi}}, L)$, є наступне твердження.

Теорема 1. *Нехай пара* $\overline{\psi} = (\psi_1, \psi_2)$, *яка породжує функціональні класи* $L_1^{\overline{\psi}}$ *та* $C_\infty^{\overline{\psi}}$, *підпорядкована умові*

$$\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \sqrt{\frac{\psi_1^2(k+1) + \psi_2^2(k+1)}{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}} \le \rho_*, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

де ρ_* — *абсолютна константа,* $\rho_* = 0{,}1912822\ldots$. *Тоді мають місце нерівності*

$$d_{2n}(C_\infty^{\overline{\psi}}, C) \ge \|\Psi(\cdot) * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_C, \tag{7}$$

$$d_{2n-1}(L_1^{\overline{\psi}}, L) \ge \|\Psi(\cdot) * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_C, \tag{8}$$

в яких

$$\Psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\psi_1(k)\cos kx + \psi_2(k)\sin kx) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}, \quad c_{-k} = \tilde{c}_k, \tag{9}$$

де $c_k = \psi_1(k) - i\psi_2(k)$ $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $|c_k| \neq 0$.

Щодо теореми 1 відзначимо наступне. Останнім часом оцінки (7) і (8) в ряді важливих випадків вдавалось отримати на базі розробленого О. К. Кушпелем [2] апарату SK-сплайнів для класів згорток із ядрами $\Psi(\cdot)$, що задовольняють так звані $C_{y,2n}$-умови (y — точка максимуму функції $|\Psi(t) * \operatorname{sign}\sin nt|$ (означення 2)). Перевірка факту про те, що деяке ядро $\Psi(\cdot)$ задовольняє умову $C_{y,2n}\big(\Psi(\cdot) \in C_{y,2n}\big)$, не є простою. Більшість робіт, в яких були встановлені включення до множин $C_{y,2n}$, стосувались ядер $\Psi_\beta(\cdot)$ вигляду

$$\Psi_\beta(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi(k)\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \tag{10}$$

де $\left\{\psi(k)\right\}_{k=1}^{\infty}$ — деякі монотонно спадні послідовності додатних чисел такі, що $\sum_{k=1}^{\infty}\psi(k) < \infty$, а $\beta \in \mathbb{R}$.

Зокрема, у роботах [2, 3] було доведено, що при $\beta \in \mathbb{Z}$ умови $C_{y,2n}$ задовольняють функції $\Psi_\beta(t)$ вигляду (10) із коефіцієнтами $\psi(k) = \varphi(k)\rho^k$, $0 < \rho \le 1/7$, де $\varphi(k)$ — довільні незростаючі функції натурального аргументу.

Потім В. Т. Шевалдін [4, 5] довів, що умови $C_{y,2n}$ задовольняють ядра Пуассона вигляду

$$\Psi_\beta(t) = P_{\rho,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right),$$

де $0 < \rho \le \rho(\beta)$, $\rho(\beta) = 0{,}2$, при $\beta \in \mathbb{Z}$ і $\rho(\beta) = 0{,}196881$ при $\beta \notin \mathbb{Z}$, а також ядра Вейля

$$\Psi_\beta(t) = B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\cos\left(kt - \frac{\beta\pi}{2}\right), \quad r \ge 1,$$

для $n \le c(\beta)(r+1)$, де $c(\beta) = 0{,}249971$, якщо $\beta \in \mathbb{Z}$ і $c(\beta) = 0{,}247812$, якщо $\beta \notin \mathbb{Z}$.

У роботі [6] доведено, що умови $C_{y,2n}$, $n = 1, 2, \ldots$, задовольняють всі ядра $\Psi_\beta(\cdot)$ з коефіцієнтами $\psi(k)$ в зображенні (10), що підпорядковані нерівностям $0 < \psi(k+1) \le \rho(\beta)\psi(k)$, $k = 1, 2, \ldots$, де $\rho(\beta) = 0{,}2$, якщо $\beta \in \mathbb{Z}$ і $\rho(\beta) = 0{,}193864$, якщо $\beta \notin \mathbb{Z}$. Включення $\Psi_\beta(\cdot) \in C_{y,2n}$ були доведені і у деяких інших випадках (див., зокрема, [7, 8]).

***Доведення теореми* 1.** Розглянемо функцію $\Psi_1(\cdot) = (\Psi * B_{1,1})(\cdot)$, де $B_{1,1}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}\sin kt$ — ядро Бернуллі. Легко бачити, що виконання умов (6) забезпечує неперервність функцій $\Psi_1(\cdot)$ і справедливість рівностей

$$\Psi_1(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\psi_2(k)}{k}\cos kt + \frac{\psi_1(k)}{k}\sin kt\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{c_k}{ik}e^{ikt}. \tag{11}$$

Нехай

$$\Delta_{2n} = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} = 2\pi\}, \quad x_k = \frac{k\pi}{n}$$

— розбиття проміжку $[0, 2\pi]$ і $S\Psi_1(\Delta_{2n})$ — простір SK-сплайнів $S\Psi_1(\cdot)$ за розбиттям Δ_{2n}, тобто множина функцій, що мають вигляд

$$S\Psi_1(\cdot) = a_0 + \sum_{k=1}^{2n} a_k \Psi_1(\cdot - x_k), \qquad \sum_{k=1}^{2n} a_k = 0, \tag{12}$$

де a_k, $k = \overline{0, 2n}$, — дійсні числа.

Фундаментальними SK-сплайнами називають функції вигляду (12) $\overline{S\Psi_{1,k}}(y,\cdot) \overset{\text{df}}{=} \overline{S\Psi_1}(y, \cdot - x_k)$, де $\overline{S\Psi_1}(y,\cdot)$ задовольняє умови

$$\overline{S\Psi_1}(y, y_k) = \delta_{0,k} = \begin{cases} 0, & 1 \le k \le 2n-1; \\ 1, & k = 0, \end{cases}$$

$y_k = y + x_k$; y — параметр, що визначає зсув вузлів інтерполяції. Фундаментальні сплайни $\overline{S\Psi_1}(y, \cdot - x_k)$, $k = \overline{0, 2n-1}$, утворюють базис у просторі $S\Psi_1(\Delta_{2n})$. Необхідні і достатні умови існування та єдиності сплайнів $\overline{S\Psi_1}(y, \cdot)$ в залежності від співвідношення між параметром y та коефіцієнтами Фур'є ядра $\Psi_1(\cdot)$, що породжує SK-сплайни, встановлено в роботі [9]. Неважко переконатись, що виконання співвідношення (6) забезпечує справедливість умов (22) наслідку 1 з роботи [9], а тому, згідно із цим наслідком, існує єдиний набір фундаментальних сплайнів $\overline{S\Psi_{1,k}}(y, \cdot) \overset{\text{def}}{=} \overline{S\Psi_1}(y, \cdot - x_k)$, $k = \overline{0, 2n-1}$, таких, що $\overline{S\Psi_{1,k}}(y, y_j) = \delta_{k,j}$ ($\delta_{k,j}$ — символ Кронекера) при всіх дійсних значеннях параметра y за виключенням точок вигляду $y = \xi_0 + \pi k/n$, $k \in \mathbb{Z}$, ξ_0 — єдиний на відрізку $[0, \pi/n]$ корінь рівняння

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(-\frac{\psi_2((2m+1)n)}{(2m+1)n} \cos((2m+1)n\xi) + \frac{\psi_1((2m+1)n)}{(2m+1)n} \sin((2m+1)n\xi) \right) = 0.$$

Означення 2. *Будемо говорити, що ядро $\Psi(\cdot)$ для деякого дійсного числа y і розбиття Δ_{2n} задовольняє умову $C_{y,2n}$ $\left(\Psi(\cdot) \in C_{y,2n}\right)$, якщо існує єдиний набір фундаментальних сплайнів $\overline{S\Psi_1}(y, \cdot - x_k)$, $k = \overline{0, 2n-1}$, і виконується рівність*

$$\operatorname{sign} \overline{S\Psi_1}^{\overline{\psi}}(y, t_k) = (-1)^k \varepsilon e_k,$$

де $t_k = (x_{k-1} + x_k)/2$, e_k дорівнює або 0, або 1, а ε набуває значень ± 1 і не залежить від k.

Умова $C_{y,2n}$ була введена в роботі [2] і формулювалась в термінах так званого твірного полінома для ядра $\Psi(\cdot)$, там же було наведено деякі достатні умови включення $\Psi(\cdot) \in C_{y,2n}$. Згодом, у лемі 2 роботи [6] було встановлено нові достатні умови включення $\Psi(\cdot) \in C_{y,2n}$ для ядер $\Psi(\cdot) = \Psi_\beta(\cdot)$ вигляду (10) із коефіцієнтами $\psi(k)$, що задовольняють умову

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi(k)}{k} < \infty.$$

Виявляється, що ця лема залишається справедливою для довільних ядер $\Psi(\cdot)$ вигляду (9) із коефіцієнтами Фур'є, що підпорядковані умові (5) (в цьому легко пересвідчитись повторивши всі етапи доведення леми 2 із [2]). А саме, має місце наступне твердження.

Лема 1. *Нехай для деякого дійсного числа y і розбиття*

$$\Delta_{2n} = \{0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} = 2\pi\}, \qquad x_k = \frac{k\pi}{n}$$

функція $\Psi(\cdot)$ вигляду (9) із коефіцієнтами Фур'є, що задовольняють умову (5), така, що величини

$$\lambda_j(y) \overset{\text{df}}{=} \frac{2}{n} \sum_{\nu=1}^{2n} \exp(ijx_\nu)\Psi_1(y - x_\nu), \qquad y = \overline{1, n-1},$$

підпорядковані умовам

$$\lambda_j(y) \neq 0, \quad j = \overline{1, n},$$
$$2\sum_{j=1}^{n-1} \frac{n|\lambda_n(y)|}{j|\lambda_j(y)|} \leq 1, \tag{13}$$

де i *— уявна одиниця, а функція* $\Psi_1(\cdot)$ *має вигляд* (11). *Тоді має місце включення* $\Psi(\cdot) \in C_{y,2n}$.

У подальшому будемо вважати, що точка y вибирається на $[0, \pi/n]$ із умови
$$|\Psi * \operatorname{sign} \sin ny| = \|\Psi(\cdot) * \operatorname{sign} \sin n(\cdot)\|_C. \tag{14}$$

Покажемо, що виконання нерівностей (6) для коефіцієнтів Фур'є функції $\Psi(\cdot)$ забезпечує справедливість умов (13). Нерівності $|\lambda_j(y)| > 0$, $j = \overline{1, n}$, при виконанні умов теореми 1, а також рівності (14) випливають із теореми 1′ і наслідку 1 роботи [9]. На основі співвідношень (14) і (17) з роботи [9] можемо записати

$$|\lambda_j(y)|^2 = \left[\frac{\psi_2(j)}{j} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_2(2mn+j)}{2mn+j} + \frac{\psi_2(2mn-j)}{2mn-j}\right)\cos 2mny - \right.$$
$$\left. - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(2mn+j)}{2mn+j} + \frac{\psi_1(2mn-j)}{2mn-j}\right)\sin 2mny\right]^2 +$$
$$+ \left[\frac{\psi_1(j)}{j} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_1(2mn+j)}{2mn+j} - \frac{\psi_1(2mn-j)}{2mn-j}\right)\cos 2mny + \right.$$
$$\left. + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{\psi_2(2mn+j)}{2mn+j} - \frac{\psi_2(2mn-j)}{2mn-j}\right)\sin 2mny\right]^2 =$$
$$= \left[\frac{|c_j|}{j}\sin\frac{\beta_j\pi}{2} - \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|c_{2mn+j}|}{2mn+j}\sin\left(2mny - \frac{\beta_{2mn+j}\pi}{2}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{|c_{2mn-j}|}{2mn-j}\sin\left(2mny - \frac{\beta_{2mn-j}\pi}{2}\right)\right)\right]^2 +$$
$$+ \left[\frac{|c_j|}{j}\cos\frac{\beta_j\pi}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|c_{2mn+j}|}{2mn+j}\cos\left(2mny - \frac{\beta_{2mn+j}\pi}{2}\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{|c_{2mn-j}|}{2mn-j}\cos\left(2mny - \frac{\beta_{2mn-j}\pi}{2}\right)\right)\right]^2, \quad j = \overline{1, n-1}; \tag{15}$$

$$|\lambda_n(y)| = 2\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi_1[(2m+1)n]}{(2m+1)n}\sin((2m+1)ny) - \right.$$
$$\left. - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi_2[(2m+1)n]}{(2m+1)n}\cos((2m+1)ny)\right| =$$
$$= 2\left|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|c_{(2m+1)n}|}{(2m+1)n}\sin((2m+1)ny) - \frac{\beta_{(2m+1)n}\pi}{2}\right|, \tag{16}$$

де β_k означаються рівностями

$$\cos\frac{\pi\beta_k}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}},$$

$$\sin\frac{\pi\beta_k}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}}, \quad k\in \mathbb{N},$$

а

$$|c_k| = \sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}, \quad k\in \mathbb{N}.$$

Із співвідношень (15) і умови (6) випливає, що $\forall n = 2, 3, \ldots$

$$|\lambda_j(y)|^2 \ge \frac{|c_j|^2}{j^2} - 2\frac{|c_j|}{j}\left(\left|\sin\frac{\beta_j\pi}{2}\right| + \left|\cos\frac{\beta_j\pi}{2}\right|\right)\times$$

$$\times\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|c_{2mn+j}|}{2mn+j} + \frac{|c_{2mn-j}|}{2mn-j}\right) \ge$$

$$\ge \frac{|c_j|^2}{j^2}\left(1-2\sqrt{2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|c_{2mn-j}|}{|c_j|} + \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|c_{2mn+j}|}{|c_j|}\right)\right) \ge$$

$$\ge \frac{|c_j|^2}{j^2}\left(1-2\sqrt{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\rho_*^{2mn+2} + \frac{1}{3}\sum_{m=1}^{\infty}\rho_*^{2mn}\right)\right) =$$

$$= \frac{|c_j|^2}{j^2}\left(1-2\sqrt{2}\left(\frac{\rho_*^2}{1-\rho_*^{2n}} + \frac{\rho_*^{2n}}{3\left(1-\rho_*^{2n}\right)}\right)\right) \ge \frac{|c_j|^2}{j^2}\left(1-\frac{2\sqrt{2}}{1-\rho_*^4}\left(\rho_*^2+\frac{\rho_*^4}{3}\right)\right). \quad (17)$$

Із рівностей (16) з урахуванням умови (6) одержимо

$$|\lambda_n(y)| \le \frac{2}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{|c_{(2m+1)n}|}{2m+1} < \frac{2}{n}|c_n|\sum_{m=0}^{\infty}\rho_*^{2mn} = \frac{2|c_n|}{n(1-\rho_*^{2n})}. \quad (18)$$

На основі формул (17) і (18) маємо

$$2\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n|\lambda_n(y)|}{j|\lambda_j(y)|} \le \frac{4}{(1-\rho_*^{2n})\sqrt{1-2\sqrt{2}\left(\rho_*^2+\frac{1}{3}\rho_*^4\right)/(1-\rho_*^4)}}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{|c_n|}{|c_j|} \le$$

$$\le \frac{4}{(1-\rho_*^{2n})\sqrt{1-2\sqrt{2}\left(\rho_*^2+\frac{1}{3}\rho_*^4\right)/(1-\rho_*^4)}}\sum_{j=1}^{n-1}\rho_*^j =$$

$$= \frac{4\rho_*(1-\rho_*^{n-1})}{(1-\rho_*^{2n})(1-\rho_*)\sqrt{1-2\sqrt{2}\left(\rho_*^2+\frac{1}{3}\rho_*^4\right)/(1-\rho_*^4)}} =$$

$$= \frac{4\rho_*}{1-\rho_*}\,\frac{1}{1+\rho_*^n}\,\frac{1-\rho_*^{n-1}}{1-\rho_*^n}\,\frac{1}{\sqrt{1-2\sqrt{2}\left(\rho_*^2+\frac{1}{3}\rho_*^4\right)/(1-\rho_*^4)}} <$$

$$< \frac{4\rho_*}{(1-\rho_*)\sqrt{1-2\sqrt{2}\left(\rho_*^2+\frac{1}{3}\rho_*^4\right)/(1-\rho_*^4)}}. \quad (19)$$

Значення абсолютної константи ρ_* в умові (6) теореми 1 таке, що забезпечує рівність

$$\frac{4\rho_*}{(1-\rho_*)\sqrt{1-2\sqrt{2}\left(\rho_*^2+\frac{1}{3}\rho_*^4\right)/(1-\rho_*^4)}} = 1. \qquad (20)$$

Тому, виходячи із співвідношень (19) і (20), на основі леми 1 можемо записати, що для кожного $n=2,3,\ldots$

$$\Psi(\cdot)\in C_{y,2n}.$$

У випадку $n=1$ останнє включення очевидне.

Повторюючи міркування, які використовувались при доведенні теореми роботи [3] (див. також [6]), переконуємось у справедливості співвідношень

$$\forall f\in S\Psi_1(\Delta_{2n}), \qquad \forall\, t=(x_{k-1}+x_k),$$

$$\left|f^{\overline{\Psi}}(t)\right| = \max_{1\le k\le 2n}|f(y+x_k)|\sum_{k=1}^{2n}\left|\overline{S\Psi_1}^{\overline{\Psi}}(y,t-x_k)\right| =$$

$$= \max_{1\le k\le 2n}|f(y+x_k)|\sum_{k=1}^{2n}\left|\overline{S\Psi_1}^{\overline{\Psi}}(y,t_k)\right|, \qquad (21)$$

де $t_k=(x_{k-1}+x_k)/2$, а $y\in[0,\pi/n)$ і задовольняє умову (14). Як показано в роботі [2], у випадку, коли $\Psi(\cdot)\in C_{y,2n}$, справедлива рівність

$$\sum_{k=1}^{2n}\left|\overline{S\Psi_1}^{\overline{\Psi}}(y,t_k)\right| = \frac{1}{|\Psi*\operatorname{sign}\sin ny|},$$

тому, з урахуванням (14) і (21), одержуємо

$$\left|f^{\overline{\Psi}}(t)\right| \le \max_{1\le k\le 2n}|f(y+x_k)|\left(\|\Psi(\cdot)*\operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_C\right)^{-1}.$$

Таким чином, оскільки $\dim S\Psi_1(\Delta_{2n})=2n$, то, згідно з теоремою Тихомирова [10] про поперечник кулі, отримуємо нерівність

$$d_{2n-1}(C_\infty^{\overline{\Psi}},C) \ge \|\Psi(\cdot)*\operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_C.$$

Використовуючи схему міркувань з роботи [11], одержуємо ту ж саму оцінку для парного поперечника $d_{2n}(C_\infty^{\overline{\Psi}},C)$. Методом Стейна, як показано у [3], легко одержується і оцінка (8). Теорему 1 доведено.

Умови (6), що фігурують у формулюванні теореми 1, диктуються особливостями використовуваного методу одержання оцінок знизу поперечників і, на нашу думку, не пов'язані із особливостями задачі. При накладанні тих чи інших додаткових обмежень на вигляд твірного ядра $\Psi(t)$, умови (6) можуть бути дещо послаблені (зняти їх повністю в рамках даного методу не вдається).

2. Оцінки найкращих наближень класів згорток тригонометричними поліномами. Через $E_{n-1}(\mathfrak{N})_X$ позначимо найкраще наближення в X функціонального класу $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}\subset X$, простором $\mathcal{T}_{2n-1}$ тригонометричних поліномів T_{n-1} порядку $n-1$:

$$E_{n-1}(\mathfrak{N})_X = \sup_{v\in\mathfrak{N}}\inf_{\xi\in\mathcal{T}_{2n-1}}\|v-\xi\|_X. \qquad (22)$$

У даному пункті розглядається задача про знаходження точних значень величин вигляду (22) у випадках, коли X є простором C або L, а множиною $\mathfrak{N}$ є відповідно клас $C_\infty^{\overline{\Psi}}$ або $L_1^{\overline{\Psi}}$.

Як уже відзначалось, класи $C_\infty^{\overline{\psi}}$ та $L_1^{\overline{\psi}}$ можна розглядати як класи згорток $\Psi * U_\infty$, $\Psi * U_1$, що породжуються сумовним ядром $\Psi(\cdot)$ із рядом Фур'є вигляду

$$S[\Psi(\cdot)] = \sum_{k=1}^{\infty}(\psi_1(k)\cos k(\cdot)+\psi_2(k)\sin k(\cdot)) = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik(\cdot)}, \qquad (23)$$

$$c_{-k} = \bar{c}_k, \quad |c_k| \neq 0, \; c_k = \psi_1(k) - i\psi_2(k), \quad k \in \mathbb{N},$$

наступним чином:

$$\Psi * U_\infty = \left\{ f \in C\colon f(\cdot) = c + (\Psi * \varphi)(\cdot),\ \|\varphi\|_\infty \le 1,\ \varphi \perp 1,\ c \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\Psi * U_1 = \left\{ f \in L\colon f(\cdot) = c + (\Psi * \varphi)(\cdot),\ \|\varphi\|_1 \le 1,\ \varphi \perp 1,\ c \in \mathbb{R} \right\}.$$

Задача про одержання точних значень найкращих наближень класів $\Psi * U_\infty$ і $\Psi * U_1$ (а отже, і $C_\infty^{\overline{\psi}}$ та $L_1^{\overline{\psi}}$) тригонометричними поліномами $T_{n-1}(\cdot)$ порядку $n-1$ в метриках відповідно C і L у випадку, коли $\Psi(\cdot)$ є ядром Бернуллі чи функцією, спряженою до ядра Бернуллі, тобто якщо

$$\Psi(t) = B_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt - r\pi/2)}{k^r}, \qquad r \in \mathbb{N},$$

$$\Psi(t) = \tilde{B}_r(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt - (r-1)\pi/2)}{k^r}, \qquad r \in \mathbb{N},$$

розв'язана у роботах Ж. Фавара [12], Н. І. Ахієзера та М. Г. Крейна [13]. У випадку, коли $\Psi(\cdot)$ є ядром Вейля

$$\Psi(t) = B_{r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt - \beta\pi/2)}{k^r}, \qquad r > 0, \qquad \beta \in \mathbb{R},$$

ця задача досліджувалась у роботах С. М. Нікольського [14], С. Б. Стечкіна [15], Сунь Юн-Шена [16] та В. К. Дзядика [17, 18], причому остаточні результати належать В. К. Дзядику (див., наприклад, коментарі до пункту 6 роботи [19]). У випадку

$$\Psi(t) = P_{\rho,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k\cos(kt - \beta\pi/2), \qquad 0 < \rho < 1, \qquad \beta \in \mathbb{R},$$

була розв'язана в роботах М. Г. Крейна [10] (для $\beta \in Z$) та В. Т. Шевалдіна [4] (для $\beta \in \mathbb{R}$); у випадках

$$\Psi(t) = \Psi_C(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\cos kt, \quad \psi(k) > 0, \quad \Delta^1\psi(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \psi(k) - \psi(k+1) \ge 0,$$

$$\Delta^2\psi(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \Delta^1\left(\Delta^1\psi(k)\right) \ge 0, \qquad \Delta^3\psi(k) \overset{\mathrm{df}}{=} \Delta^1\left(\Delta^2\psi(k)\right) \ge 0, \qquad k \in \mathbb{N};$$

$$\Psi(t) = \Psi_S(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\psi(k)\sin kt, \qquad \psi(k) > 0, \qquad \Delta^1\psi(k) \ge 0,$$

$$\Delta^2\psi(k) \ge 0, \qquad k \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi(k)}{k} < \infty,$$

— у роботі Б. Надя [21]. Величини $E_{n-1}(\Psi * U_\infty)_C$ та $E_{n-1}(\Psi * U_1)_L$ точно обчислені також в деяких інших випадках (див. посилання в [22, 23]).

Відзначимо, що всі відомі до цього часу точні значення величин $E_{n-1}(\Psi * U_\infty)_C$, $E_{n-1}(\Psi * U_1)_L$ одержані для класів, що породжені ядрами $\Psi(\cdot)$, які задовольняють умову С. М. Нікольського A_n^* [14], або навіть більш жорстку, ніж A_n^*, умову N_n^*.

Означення 3. *Ядро* $\Psi(\cdot)$ *задовольняє умову* A_n^* $(\Psi \in A_n^*)$, *якщо існує натуральне число* $n^* \geq n$ *і тригонометричний поліном* T_{n-1}^* *порядку* $n-1$ *такі, що для функції* $\varphi_*(t) = \operatorname{sign}\left[\Psi(t) - T_{n-1}^*\right]$ *майже скрізь виконується співвідношення* $\varphi_*(t + \pi/n^*) = -\varphi_*(t)$.

Означення 4. *Ядро* $\Psi(\cdot)$ *задовольняє умову* N_n^* $(\Psi \in N_n^*)$, *якщо існують тригонометричний поліном* T_{n-1}^* *порядку* $n-1$ *і точка* $\xi_0 \in [0, \pi/n)$ *такі, що різниця* $\Psi(t) - T_{n-1}^*(t)$ *змінює знак на* $[0, 2\pi)$ *в точках* $t_k = \xi_0 + k\pi/n$, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, *і тільки в них.*

Теорема 2 (С. М. Нікольський [14]). *Якщо* $\Psi(\cdot) \in A_n^*$, *то виконуються рівності*

$$E_{n-1}(\Psi * U_1)_1 = E_{n-1}(\Psi * U_\infty)_C = \frac{1}{\pi} E_{n-1}(\Psi)_1.$$

Теорема 2 дає можливість, таким чином, обчислювати значення найкращих наближень класів згорток, що породжуються ядрами $\Psi(\cdot)$ із множини A_n^* (а з урахуванням включення $N_n^* \subset A_n^*$ і із множини N_n^*).

Має місце таке твердження.

Теорема 3. *Нехай функція* $\Psi(t)$ *має ряд Фур'є вигляду* (23) *і її коефіцієнти* c_k *задовольняють умови*

$$\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} = \sqrt{\frac{\psi_1^2(k+1) + \psi_2^2(k+1)}{\psi_1^2(k) + \psi_2^2(k)}} < \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)(n+1)}, \qquad k = n, n+1, \ldots, \tag{24}$$

тоді виконуються рівності

$$E_{n-1}(\Psi * U_\infty)_C = E_{n-1}(\Psi * U_1)_1 = \frac{1}{\pi} E_{n-1}(\Psi)_1 =$$

$$= \|\Psi(\cdot) * \operatorname{sign}\sin n(\cdot)\|_C = \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} \Psi(t)\operatorname{sign}\sin[n(t-\xi_0)]\,dt\right|, \tag{25}$$

де ξ_0 *— єдиний в* $[0, \pi/n)$ *корінь рівняння*

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(\psi_1((2j+1)n)\cos(n(2j+1)\xi) + \psi_2((2j+1)n)\sin(n(2j+1)\xi)\right) = 0.$$

Доведення теореми 3. Покажемо, що виконання співвідношень (24) для коефіцієнтів Фур'є функції $\Psi(\cdot)$ вигляду (23) забезпечує справедливість включення $\Psi(\cdot) \in N_n^*$.

Спочатку відзначимо, що функція $\Psi(\cdot)$, для якої виконуються умови (24), є нескінченно диференційовною функцією (див., наприклад, теорему 1.8.1 з роботи [19]). Подіявши на $\Psi(\cdot)$ лінійним диференціальним оператором

$$\lambda_{n-1}(D) = D(D^2+1^2)\cdot\ldots\cdot(D^2+(n-1)^2)$$

($D = \dfrac{d}{dt}$ — символ диференціювання), отримаємо

$$\lambda_{n-1}(D)\Psi(t) = (-1)^{n-1}\sum_{k=n}^{\infty}\left(\psi_1(k)\frac{(k+n-1)!}{(k-n)!}\sin kt - \psi_2(k)\frac{(k+n-1)!}{(k-n)!}\cos kt\right) =$$

$$= (-1)^{n-1}\sum_{k=n}^{\infty}\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}\,\frac{(k+n-1)!}{(k-n)!}\left(kt-\beta_k\frac{\pi}{2}\right), \tag{26}$$

де β_k визначається рівностями

$$\cos\frac{\pi\beta_k}{2} = \frac{\psi_1(k)}{\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}};$$

$$\sin\frac{\pi\beta_k}{2} = \frac{\psi_2(k)}{\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)}}, \qquad k\in\mathbb{N}.$$

Позначивши

$$b_n(k) \overset{\text{df}}{=} \frac{(k+n-1)!}{(k-n)!}\sqrt{\psi_1^2(k)+\psi_2^2(k)},$$

покажемо, що

$$nb_n(n) > \sqrt{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} kb_n(k). \tag{27}$$

Для кожного фіксованого n запишемо тотожність

$$\sqrt{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} kb_n(k) = \sqrt{2}\,nb_n(n)\sum_{k=n+1}^{\infty}\prod_{j=n+1}^{k}\frac{jb_n(j)}{(j-1)b_n(j-1)}. \tag{28}$$

Оскільки, згідно з умовами (24), виконуються співвідношення

$$\frac{(k+1)b_n(k+1)}{kb_n(k)} = \frac{(k+1)(k+n)!\,|c_{k+1}|(k-n)!}{(k+1-n)!\,k(k+1-n)!\,|c_k|} =$$

$$= \frac{k+1}{k}\,\frac{k+n}{k-n+1}\,\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} \le 2(n+1)\frac{|c_{k+1}|}{|c_k|} < \frac{1}{\sqrt{2}+1}, \qquad k = n, n+1, \ldots,$$

то із рівності (28) випливає

$$\sqrt{2}\sum_{k=n+1}^{\infty} kb_n(k) < \sqrt{2}\,nb_n(n)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+1}\right)^k = nb_n(n).$$

Далі нам буде необхідне наступне твердження з [24].

Лема 2. *Нехай*

$$g(x) = \sum_{k=l}^{\infty} b_k\cos(k(x+x_k)), \qquad l\ge 1,$$

і

$$l|b_l| > \sqrt{2}\sum_{k=1+l}^{\infty} k|b_k|.$$

Тоді число нулів функції $g(\cdot)$ *на періоді* $[0,2\pi)$ *з урахуванням кратності дорівнює* $2l$ $(Z(g)=2l)$.

Застосовуючи лему 2 до функції $\lambda_{n-1}(D)\Psi(t)$, на основі нерівності (27) і зображення (26) робимо висновок, що $Z\big(\lambda_{n-1}(D)\Psi(t)\big)=2n$. Із теореми 2 роботи [24] випливає, що на підставі останнього співвідношення виконується нерівність

$$Z\big(\Psi(t)-T_{n-1}(t)\big) \le 2n, \tag{29}$$

у якій $T_{n-1}(t)$ — довільний тригонометричний поліном порядку $n-1$. Тоді з (29) і теореми 5 роботи В. К. Дзядика [18] випливає, що $\Psi(\cdot)\in N_n^*$. Таким чином, на основі включення $N_n^* \subset A_n^*$ і теореми 2, а також теореми 5 із [18] переконуємось у справедливості рівностей (25). Теорему 3 доведено.

Легко переконатись, що умови (24) при всіх $n\in\mathbb{N}$ задовольняють, наприклад, ядра

a) $\Psi(t) = \Phi_{\rho,\overline{\beta}}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi(k)\dfrac{\rho^k}{k!}\cos\left(kt-\dfrac{\beta(k)\pi}{2}\right), \quad 0<\rho<\dfrac{1}{2(\sqrt{2}+1)};$

b) $\Psi(t) = \Phi_{\gamma,\overline{\beta}}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi(k)k^{-\gamma k}\cos\left(kt-\dfrac{\beta(k)\pi}{2}\right), \quad \gamma > \log_4 4(\sqrt{2}+1);$

c) $\Psi(t) = \Phi_{\alpha,\overline{\beta}}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi(k)e^{-\alpha e^k}\cos\left(kt-\dfrac{\beta(k)\pi}{2}\right), \quad \alpha > \dfrac{\ln 4(\sqrt{2}+1)}{e(e-1)};$

d) $\Psi(t) = \Phi_{r,\alpha,\beta}(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi(k)e^{-\alpha k^r}, \quad r>1, \quad \alpha>0,$

$$\begin{cases}\alpha r(r-1)\ge 1,\\ \alpha r>\ln 4(\sqrt{2}+1),\end{cases}$$

де $\varphi(k)$ — довільні незростаючі послідовності додатних чисел, $\beta(k)$ — довільні послідовності дійсних чисел. Тоді на основі теореми 3 для класів згорток $\Psi * U_\infty$ і $\Psi * U_1$ виконуються рівності (25).

Як уже відзначалось, для ядер $P_{\rho,\beta}(t)$ задача про знаходження точних значень найкращих наближень функціональних класів, що витокоподібно зображаються згортками із цими ядрами, тригонометричними поліномами у метриках C і L була розв'язана у роботі [4], а саме, для ядер $P_{\rho,\beta}(t)$ було встановлено рівності (25), при всіх значеннях ρ із інтервалу $(0, 1)$. Далі покажемо, що аналогічне твердження можна одержати і для ядер Неймана

$$K_{\rho,r,\beta}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho^k}{k^r}\cos\left(kt-\frac{\beta\pi}{2}\right), \quad 0<\rho<1, \quad \beta\in\mathbb{R}, \quad r\in\mathbb{N}. \tag{30}$$

А саме, має місце таке твердження.

Теорема 4. *Для довільних* $\beta\in\mathbb{R}$, $0<\rho<1$, $r\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$, *виконуються рівності*

$$E_{n-1}(K_{\rho,r,\beta} * U_\infty)_C = E_{n-1}(K_{\rho,r,\beta} * U_1)_1 = \frac{1}{\pi}E_{n-1}(K_{\rho,r,\beta})_1 =$$

$$= \frac{4}{\pi}\max_x\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{n^r(2\nu+1)^{r+1}}\sin\left((2\nu+1)nx-\frac{\beta\pi}{2}\right)\right|. \tag{31}$$

Доведення. Покажемо спочатку, що при довільних $\beta \in \mathbb{R}$, $0 < \rho < 1$, $r \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}$ різниця $K_{\rho,r,\beta}(t) - T_{n-1}(t)$ має на $[0, 2\pi)$ не більше, ніж $2n$ нулів з урахуванням їх кратності:

$$Z\Big(K_{\rho,r,\beta}(t) - T_{n-1}(t)\Big) \le 2n, \tag{32}$$

де $T_{n-1}(t)$ — довільний тригонометричний поліном порядку не вищого за $n-1$. Припустимо супротивне, що існує поліном $T_{n-1}(t)$ такий, що різниця $K_{\rho,r,\beta}(t) - T_{n-1}(t)$ має на $[0, 2\pi)$ не менше, ніж $2n+1$ нуль, але тоді, враховуючи неперервність і 2π-періодичність функції $\Delta(t) \overset{\text{df}}{=} K_{\rho,r,\beta}(t) - T_{n-1}(t)$, переконуємось, що цих нулів є принаймні $2n+2$. Тоді на основі теореми Ролля робимо висновок, що $\Delta'(t)$ має на $[0, 2\pi)$ не менше, ніж $2n+1$ нуль. Міркуючи аналогічним чином, після r-разового застосування теореми Ролля одержуємо, що $\Delta^{(r)}(t) = K^{(r)}_{\rho,r,\beta}(t) - T^{(r)}_{n-1}(t)$ має на $[0, 2\pi)$ не менше, ніж $2n+2$ нулі. Неважко помітити, що $K^{(r)}_{\rho,r,\beta}(t) = P_{\rho,\beta+r}(t)$.

Як показано у роботі [4], для довільних ядра $P_{\rho,\beta}(t)$, $0 < \rho < 1$, і тригонометричного полінома $T_{n-1}(t)$ порядку $n-1$ різниця $P_{\rho,\beta}(t) - T_{n-1}(t)$ може мати на $[0, 2\pi)$ не більше, ніж $2n$ нулів з урахуванням кратності.

Одержана суперечність доводить справедливість нерівності (32) при довільних $0 < \rho < 1$, $\beta \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$ і $n \in \mathbb{N}$. Застосування теореми 5 з [18], теореми 2, а також теореми (1.5) розділу II з роботи [25] дає змогу одержати рівності (31). Теорему 4 доведено.

3. Формулювання основних результатів.

Теорема 5. *Нехай функція* $\Psi(t)$ *із рядом Фур'є вигляду* (23) *така, що її коефіцієнти* c_k *задовольняють умови* (24), *тоді при всіх* $n \in \mathbb{N}$ *виконуються точні рівності*

$$d_{2n}\Big(C_\infty^{\overline{\Psi}}, C\Big) = d_{2n-1}\Big(C_\infty^{\overline{\Psi}}, C\Big) = d_{2n-1}\Big(L_1^{\overline{\Psi}}, L\Big) =$$

$$= E_{n-1}\Big(C_\infty^{\overline{\Psi}}\Big)_C = E_{n-1}\Big(L_1^{\overline{\Psi}}\Big)_1 = \frac{1}{\pi} E_{n-1}(\Psi)_1 =$$

$$= \|\Psi(\cdot) * \operatorname{sign}\sin(\cdot)\|_C = \frac{4}{\pi}\left| \sum_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{\psi_1((2\nu+1)n)}{2\nu+1}\sin(2\nu+1)n\xi_0\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\psi_2((2\nu+1)n)}{2\nu+1}\cos((2\nu+1)n\xi_0)\right|, \tag{33}$$

де ξ_0 *— єдиний в* $[0, \pi/n)$ *корінь рівняння*

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\big(\psi_1((2\nu+1)n)\cos((2\nu+1)n\xi) + \psi_2((2\nu+1)n)\sin((2\nu+1)n\xi)\big) = 0.$$

Теорема 5 є по суті наслідком теорем 1 і 4, які дають оцінки знизу і зверху поперечників відповідних класів.

Теорема 6. *Нехай* $K_{\rho,r,\beta}(t)$ *— ядра Неймана вигляду* (30) *і* $0 < \rho < \rho(\beta)$, *де* $\rho(\beta) = 0,2$, *якщо* $\beta \in \mathbb{Z}$, *і* $\rho(\beta) = 0,193864$, *якщо* $\beta \notin \mathbb{Z}$. *Тоді при всіх* $n \in \mathbb{N}$ *мають місце рівності*

$$d_{2n}(K_{\rho,r,\beta} * U_\infty)_C = d_{2n-1}(K_{\rho,r,\beta} * U_\infty)_C = d_{2n-1}(K_{\rho,r,\beta} * U_1)_1 =$$

$$= E_{n-1}(K_{\rho,r,\beta} * U_\infty)_C = E_{n-1}(K_{\rho,r,\beta} * U_1)_1 = \frac{1}{\pi} E_{n-1}(K_{\rho,r,\beta})_1 =$$

$$= \frac{4}{\pi} \max_x \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\rho^{(2\nu+1)n}}{n^r (2\nu+1)^{r+1}} \sin\left((2\nu+1)nx - \frac{\beta\pi}{2}\right) \right|. \tag{34}$$

Істинність рівностей (34) випливає із теореми 4 даної роботи, а також із теореми роботи [6], які дають відповідно оцінки зверху та знизу поперечників.

Нехай $\nu(f)$ — число змін знака 2π-періодичної функції f на $[0, 2\pi)$.

Означення 5. *Періодичну функцію* $\Omega(\cdot)$ *називають CVD-ядром (ядром, що не збільшує осциляції) і записують* $\Omega(\cdot) \in CVD$, *якщо для довільної неперервної* 2π*-періодичної функції* f *виконується нерівність*

$$\nu(\Omega * f) \le \nu(f).$$

Вважаючи CVD-ядро $\Omega(\cdot)$ неперервною функцією, а систему функцій $\{\Omega(\cdot - y_i)\}_{i=0}^{2n+1}$ при довільних $0 \le y_0 < y_1 < \ldots < y_{2n+1} < 2\pi$ лінійно незалежною, А. Пінкус [26, 27] довів, що $\Omega(\cdot) \in N_n^*$, і обчислив поперечники $d_{2n-1}(\Omega * U_p, L_q)$ і $d_{2n}(\Omega * U_p, L_q)$ при $p = \infty$, $1 \le q \le \infty$, а також при $1 \le p \le \le \infty$, $q = 1$.

Як показано у роботі [28], функції

$$\Psi^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,2^k}{k!} \cos kt,$$

$$\Psi^{**}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2k} \cos kt$$

не є CVD-ядрами і тому для обчислення точних значень поперечників класів згорток із такими ядрами неможливо використати методи, що розвинуті в [26] (див. також [27]). В той же час функції $\Psi^*(t)$ і $\Psi^{**}(t)$ задовольняють всі умови теореми 5 і тому для породжених ними класів при всіх $n \in \mathbb{N}$ мають місце рівності (33) (рівності (33) при всіх $n \in \mathbb{N}$ виконуватимуться і для функцій більш загального вигляду:

$$\Psi_{\bar\beta}^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{0,2^k}{k!} \cos\left(kt - \frac{\beta(k)\pi}{2}\right),$$

$$\Psi_{\bar\beta}^{**}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2k} \cos\left(kt - \frac{\beta(k)\pi}{2}\right),$$

де $\beta(k)$ — довільна послідовність дійсних чисел).

1. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах сверток. – Киев, 1996. – 70 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 96.11).
2. *Кушпель А. К.* SK-сплайны и точные оценки поперечников функциональных классов в пространстве $C_{2\pi}$. – Киев, 1985. – 47 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 85.51).
3. *Кушпель А. К.* Оценки поперечников классов сверток в пространствах C и L // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 8. – С. 1070 – 1076.
4. *Шевалдин В. Т.* Поперечники классов сверток с ядром Пуассона // Мат. заметки. – 1992. – **51**, вып. 6. – С. 126 – 136.

5. *Шевалдин В. Т.* Оценки снизу поперечников классов периодических функций с ограниченной дробной производной // Там же. – 1993. – **53**, вып. 2. – С. 145 – 151.
6. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Оценки снизу поперечников классов сверток периодических функций в метриках C и L // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1112 – 1121.
7. *Сердюк А. С.* Оцінки поперечників класів (ψ, β)-диференційовних функцій: Автореф. дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Київ, 1995. – 20 с.
8. *Сердюк А. С.* Оцінки поперечників за Колмогоровим класів нескінченно диференційовних періодичних функцій // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 12. – С. 1700 – 1706.
9. *Сердюк А. С.* Про існування та єдиність розв'язку задачі рівномірної SK-сплайн інтерполяції // Там же. – 1999. – **51**, № 4. – С. 486 – 492.
10. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
11. *Тихомиров В. М.* Наилучшие методы приближения и интегрирования дифференцируемых функций в пространстве $C[-1,1]$ // Мат. сб. – 1969. – **80**, № 2. – С. 290 – 304.
12. *Favard J.* Sur les meilleurs procédés d'approximation de certaines classes des fonctions par des polynomes trigonometriques // Bull. sci. math. – 1937. – **61**. – P. 209 – 224; 243 – 256.
13. *Ахиезер Н. И., Крейн М. Г.* О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций // Докл. АН СССР. – 1937. – **15**, № 3. – С. 107 – 112.
14. *Никольский С. М.* Приближение функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1946. – **10**, № 3. – С. 207 – 256.
15. *Стечкин С. Б.* О наилучшем приближении некоторых классов периодических функций тригонометрическими полиномами // Там же. – 1956. – **20**, № 6. – С. 643 – 648.
16. *Сунь Юн-Шен.* О наилучшем приближении периодических дифференцируемых функций тригонометрическими полиномами // Там же. – 1959. – **23**, № 1. – С. 67 – 92.
17. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых ядрами, являющимися интегралами от абсолютно монотонных функций // Там же. – 1959. – **23**, № 6. – С. 933 – 950.
18. *Дзядык В. К.* О наилучшем приближении на классах периодических функций, определяемых интегралами от линейной комбинации абсолютно монотонных ядер // Мат. заметки. – 1974. – **16**, № 5. – С. 691 – 701.
19. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 267 с.
20. *Крейн М. Г.* К теории наилучшего приближения периодических функции // Докл. АН СССР. – 1938. – **18**, № 4, 5. – С. 245 – 249.
21. *Nagy B.* Uber dewisse Extremalfragen bei transformierten trigonometrischen Entwicklungen // Ber. Acad. Wiss. – 1938. – **90**. – P. 103 – 134.
22. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
23. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 5. – С. 6 – 21.
24. *Нгуен Тхи Тхьеу Хоа.* Оператор $D(D^2+1^2)\cdot\ldots\cdot(D^2+n^2)$ и тригонометрическая интерполяция // Anal. Math. – 1989. – **15**, № 4. – P. 291 – 306.
25. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. В 2-х т. – М.: Мир, 1965. – **1**. – 615 с.
26. *Pinkus A.* On n-widths of periodic functions // J. Anal. Math. – 1979. – **35**. – P. 209 – 235.
27. *Pinkus A.* Widths in Approximation Theory. – Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer Verlag, 1985. – 291 p.
28. *Сердюк А. С.* О наилучшем приближении классов сверток периодических функций тригонометрическими полиномами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 9. – С. 1261 – 1265.

Одержано 11.06.97