УДК 517.432

С. О. Кужіль (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ВИГЛЯД ВХІДНОГО ТА ВИХІДНОГО ПІДПРОСТОРІВ ДЛЯ ХВИЛЬОВОГО РІВНЯННЯ В $\mathbb{R}^n$

We investigate the structure of incoming and outgoing subspaces in the Lax – Phillips scheme for the classic acoustic equation in $\mathbb{R}^n$.

Досліджено структуру вхідного та вихідного підпросторів у схемі Лакса – Філліпса для класичного хвильового рівняння в $\mathbb{R}^n$.

Нехай $W(t)$ — група унітарних операторів у гільбертовому просторі H. Необхідною умовою застосування методу Лакса – Філліпса до вивчення розсіяння еволюційної системи, що задається цією групою, є існування для неї підпросторів D_- та D_+ з властивостями

$$W(-t)D_- \subset D_-, \quad W(t)D_+ \subset D_+, \quad t \geq 0,$$
$$\bigcap_{t\geq 0} W(-t)D_- = \bigcap_{t\geq 0} W(t)D_+ = \{0\}.$$

При виконанні цих умов підпростір D_- називається вхідним, а підпростір D_+ — вихідним для групи $W(t)$.

У випадку хвильового рівняння в $\mathbb{R}^n$, використання методу Лакса – Філліпса дозволяє отримати важливі результати про зв'язок між сингулярностями матриці розсіяння та характером збурення [1]. Таке застосування можливе тому, що для вільного хвильового рівняння в $\mathbb{R}^n$

$$u_{tt}(x, t) = \Delta u(x, t) \tag{1}$$

множини початкових даних $\left\{\begin{pmatrix} u(x,0) \\ u_t(x,0) \end{pmatrix}\right\}$ розв'язків $u(x, t)$, що обертаються в нуль в задньому $|x| < -t$ та передньому $|x| < t$ конусах, є відповідно вхідним D_- та вихідним D_+ підпросторами для унітарної в просторі початкових даних H групи $W(t)$ розв'язків задачі Коші рівняння (1). Незначна модифікація цих підпросторів $D_-^{\rho} = W(-\rho)D_-$, $D_+^{\rho} = W(\rho)D_+$, $\rho \geq 0$, дозволяє визначити вхідний D_-^{ρ} та вихідний D_+^{ρ} підпростори для групи розв'язків хвильового рівняння із збуренням, зосередженим в кулі радіуса ρ [1, 2].

Зрозуміло, що існування таких підпросторів і, отже, можливість застосування методу Лакса – Філліпса обумовлено певними властивостями самоспряженого в просторі $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператора Лапласа Δ, $D(\Delta) = W_2^2(\mathbb{R}^n)$.

В роботі [3] показано, що у випадку, коли n непарне, вхідний D_- та вихідний D_+ підпростори для вільного хвильового рівняння є замиканням (відносно енергетичної норми) в просторі H множин

$$\left\{\begin{pmatrix} f \\ -iB^*f \end{pmatrix} \middle| \forall f \in D(\Delta)\right\} \quad \text{та} \quad \left\{\begin{pmatrix} f \\ iB^*f \end{pmatrix} \middle| \forall f \in D(\Delta)\right\} \tag{2}$$

відповідно, де B — простий максимальний симетричний оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$ такий, що

i) оператор $-\Delta$ є самоспряженим розширенням симетричного оператора B^2;
ii) справджується рівність

$$(-\Delta f, f) = \| B^* f\|^2 \quad \forall f \in D(\Delta). \tag{3}$$

Врахування цих властивостей оператора Лапласа дозволяє характеризувати збурення цього оператора методами теорії розширень і, як наслідок, розглянути деякі нові задачі в теорії різсіяння для класичного хвильового рівняння в просторах непарної розмірності [4, 5].

Зауважимо, що необхідною умовою зображення підпросторів $D_\pm$ у вигляді (2) є їх ортогональність відносно енергетичного скалярного добутку в H. У випадку, коли n парне, ці підпростори не є ортогональними [2] і, отже, таке зображення неможливе.

У даній роботі з'ясовується структура підпросторів $D_\pm$ для хвильового рівняння у випадку просторів парної розмірності. Наводиться просте доведення того, що при всіх $n \geq 2$ (випадок $n = 1$ є тривіальним і не буде розглядатись) для оператора Лапласа в просторі $L_2(\mathbb{R}^n)$ існує простий максимальний симетричний оператор B з властивостями (3). Для цього оператора показано, що у випадку, коли n непарне, підпростори D_- та D_+ мають вигляд (2), а у випадку, коли n парне, ці підпростори є замиканням в H множин

$$\left\{ (I - iJ) \begin{pmatrix} f \\ -iB^* f \end{pmatrix} \,|\, \forall f \in D(\Delta) \right\} \quad \text{та} \quad \left\{ (I + iJ) \begin{pmatrix} f \\ iB^* f \end{pmatrix} \,|\, \forall f \in D(\Delta) \right\}$$

відповідно, де J — самоспряжений та унітарний оператор в $L_2(\mathbb{R}^n)$. Така подібність структури вхідного та вихідного підпросторів у просторах різної розмірності відкриває додаткові можливості для формування єдиної точки зору на процеси розсіяння хвильового рівняння в просторах парної та непарної розмірностей.

1. Допоміжні твердження. Нехай $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, $n > 2$. Функцію $f(x)$ можна розглядати як функцію від $r = |x|$ та $n - 1$ змінних w на одиничній сфері S^{n-1} в $\mathbb{R}^n$. У цих змінних

$$\| f \|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = \int_0^\infty \left(\int_{S^{n-1}} |f(r, w)|^2 dw \right) r^{n-1} dr. \tag{4}$$

Через $L_2(\mathbb{R}, N)$ позначимо гільбертів простір вектор-функцій $\gamma(s, w)$, $s \in \mathbb{R}$, із значеннями у допоміжному просторі $N = L_2(S^{n-1})$ і скалярним добутком

$$(\gamma_1, \gamma_2)_{L_2(\mathbb{R}, N)} = \int_{-\infty}^\infty (\gamma_1(s, w),\ \gamma_2(s, w))_N \, ds, \tag{5}$$

де $(\gamma_1(\cdot, w),\ \gamma_2(\cdot, w))_N = \int_{S^{n-1}} \gamma_1(\cdot, w) \overline{\gamma_2(\cdot, w)} dw$ — скалярний добуток у просторі $L_2(S^{n-1})$.

У просторах $L_2(\mathbb{R}^n)$ і $L_2(\mathbb{R}, N)$ розглянемо перетворення Фур'є:

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{iyx} f(x) dx, \qquad f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n),$$

$$(F\gamma)(\delta, w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\delta s} \gamma(s, w)\, ds, \qquad \gamma(s, w) \in L_2(\mathbb{R}, N).$$

Запишемо вектор $y \in \mathbb{R}^n$ у вигляді $y = \delta w$, де $\delta \in \mathbb{R}$, $w \in S^{n-1}$. Для довільного $f(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ покладемо

$$(X_n f)(s, w) = \frac{1}{\sqrt{2}} F^{-1} \mathcal{L}_n(\delta) \hat{f}(\delta w), \tag{6}$$

де $\mathcal{L}_n(\delta) = \delta^m$, $m = (n-1)/2$, якщо n непарне;

$$\mathcal{L}_n(\delta) = \begin{cases} \delta^m, & \delta > 0, \\ -\sqrt{|\delta|}\,\delta^{m-1/2}, & \delta < 0, \end{cases}$$

якщо n парне. Зауважимо, що $\hat{f}(\delta w) = \psi(\delta, w)$ в (6) — функція від двох змінних δ і w з властивістю „парності" $\psi(-\delta, -w) = \psi(\delta, w)$.

Лема 1. *Оператор* X_n, $n \geq 2$, *є ізометричним відображенням простору* $L_2(\mathbb{R}^n)$ *на підпростір*

$$L_+ = \left\{ \gamma(s, w) \mid \gamma(-s, -w) = (-1)^{[n/2]} \gamma(s, w) \right\}$$

простору $L_2(\mathbb{R}, N)$, *де* $[n/2]$ — *ціла частина* $n/2$.

Доведення. Нехай $\gamma(\delta, w) = 1/\sqrt{2}\mathcal{L}_n(\delta) \hat{f}(\delta w)$. З елементарної рівності $\mathcal{L}_n(-\delta) = (-1)^{[n/2]} \mathcal{L}_n(\delta)$ випливає

$$\gamma(-\delta, -w) = (-1)^{[n/2]} \gamma(\delta, w).$$

В свою чергу, з рівностей (4), (5) зрозуміло, що оператор $Uf = \delta^m \hat{f}(\delta w)$, $\delta > 0$, є ізометричним відображенням простору $L_2(\mathbb{R}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}_+, N)$. Тому

$$\| \gamma(\delta, w) \|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)} = 2 \int_0^{\infty} \| \gamma(\delta, w) \|^2_N \, d\delta = \| Uf \|^2_{L_2(\mathbb{R}_+, N)} = \| f \|^2_{L_2(\mathbb{R}^n)}$$

і множина $\{ \mathcal{L}_n(\delta) \hat{f}(\delta w) \mid \forall f \in L_2(\mathbb{R}^n) \}$ збігається з підпростором L_+. Це, з урахуванням того, що для унітарного в $L_2(\mathbb{R}, N)$ оператора F справджується рівність $FL_+ = L_+$, завершує доведення леми.

2. Означення оператора B. У просторі L_+ розглянемо простий максимальний симетричний оператор

$$B_+ = \begin{cases} i d/ds, & s > 0, \\ -i d/ds, & s < 0, \end{cases} \qquad D(B_+) = \{ \gamma(s, w) \in L_+ \cap W_2^1(\mathbb{R}, N) \mid \gamma(0, w) = 0 \}. \tag{7}$$

На підставі леми 1 оператор

$$B = X_n^{-1} B_+ X_n, \qquad D(B) = X_n^{-1} D(B_+) \tag{8}$$

є простим максимальним симетричним у просторі $L_2(\mathbb{R}^n)$.

Нехай $f(x) \in W_2^2(\mathbb{R}^n)$. Оскільки $(\widehat{-\Delta f})(\delta w) = \delta^2 \hat{f}(\delta w)$, то з (6) випливає

$$-(X_n \Delta f)(s, w) = A^2 (X_n f)(s, w), \tag{9}$$

де $A^2 = -d^2/ds^2$, $D(A^2) = L_+ \cap W_2^2(\mathbb{R}, N)$ — самоспряжений в L_+ оператор. Зрозуміло, що оператор A^2 є розширенням B_+^2. Отже, беручи до уваги рівності (8), (9), отримуємо, що оператор $-\Delta$, $D(\Delta) = W_2^2(\mathbb{R}^n)$ є самоспряженим розширенням у просторі $L_2(\mathbb{R}^n)$ оператора B^2 і $-(\Delta f, f) = \| B^* f\|^2$. Таким чином, визначений рівністю (8) простий максимальний симетричний оператор B задовольняє умови (3).

3. Простір даних. Простір даних H вільного хвильового рівняння (1) є поповненням множини початкових даних $d = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$, $f(x) \in D(\Delta)$, $g(x) \in L_2(\mathbb{R}^n)$, за енергетичною нормою

$$\|d\|_H^2 = -(\Delta f, f)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + (g, g)_{L_2(\mathbb{R}^n)}. \tag{10}$$

На підставі (9) маємо

$$-(\Delta f, f)_{L_2(\mathbb{R}^n)} = (A^2 X_n f, X_n f)_{L_2(\mathbb{R}, N)} = \left\| \frac{d}{ds} X_n f \right\|^2_{L_2(\mathbb{R}, N)},$$

де елемент $d/ds X_n f$ належить підпростору

$$L_- = L_+^\perp = \{ \gamma(s, w) \mid \gamma(-s, -w) = (-1)^{[n/2-1]} \gamma(s, w) \}$$

простору $L_2(\mathbb{R}, N)$. Звідси легко бачити, що замикання в енергетичній нормі оператора Ω_n, який на елементах $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ визначається за формулою

$$\Omega_n \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \frac{d}{ds} X_n f - X_n g, \quad f(x) \in D(\Delta), \quad g(x) \in L_2(\mathbb{R}^n), \tag{11}$$

ізометрично відображає простір H на $L_2(\mathbb{R}, N)$.

У просторі H розглянемо унітарний та самоспряжений оператор

$$J = \Omega_n^{-1} K \Omega_n, \tag{12}$$

де $K = F^{-1}(\operatorname{sgn} \delta) F$ — перетворення Гільберта в $L_2(\mathbb{R}, N)$.

Використовуючи відомий результат [2] про зображення перетворення Фур'є в $L_2(\mathbb{R}^n)$ як композиції перетворення Фур'є в $L_2(\mathbb{R}, N)$ та перетворення Радона, з теореми 4.1 із [2] одержуємо таке твердження.

Лема 2. *Нехай n парне. Тоді оператор*

$$T_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_n (I + iJ), \quad T_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \Omega_n (I - iJ) \tag{13}$$

ізометрично відображає простір даних H на $L_2(\mathbb{R}, N)$ і задає вхідне (вихідне) трансляційне зображення для групи розв'язків $W(t)$ вільного хвильового рівняння (1), *що побудовано по вхідному (вихідному) підпростору D_- (D_+). Це означає, що*

$$T_\pm W(t) = \mathcal{T}(t) T_\pm, \quad T_\pm D_\pm = L_2(\mathbb{R}_\pm, N),$$

де $\mathcal{T}(t)$ — група зсувів на t вправо в $L_2(\mathbb{R}, N)$.

Зауважимо, що коли n непарне, то подібний результат можна отримати з теореми 2.2 [1, Гл. 4]. У цьому випадку $T_- = T_+ = \Omega_n$. Отже, вплив парної розмірності в схемі розсіяння Лакса – Філліпса для хвильового рівняння характеризується оператором J.

4. Вигляд підпросторів $D_{\pm}$. Замикання в H лінеалів з формули (2), де оператор B визначається рівністю (8), позначимо через $\mathcal{D}_-$ та $\mathcal{D}_+$ відповідно. З (3) та (10) випливає, що ці підпростори є ортогональними в H і

$$H = \mathcal{D}_- \oplus \mathcal{D}_+. \tag{14}$$

Теорема 1. *Для вхідного D_- та вихідного D_+ підпросторів вільного хвильового рівняння* (1) *справджуються рівності $D_- = (I - iJ)\mathcal{D}_-$, $D_+ = (I + iJ)\mathcal{D}_+$, якщо n парне, і $D_{\pm} = \mathcal{D}_{\pm}$, якщо n непарне, де оператор J визначається рівністю* (12) *і є унітарним та самоспряженим оператором у просторі даних H.*

Доведення. Нехай n парне. З рівностей (8), (11), (13) випливає, що при всіх $f(x) \in D\,(\Delta)$ справджується рівність

$$T_-\left((I - iJ)\begin{pmatrix} f \\ -iB^* f \end{pmatrix} \right) = \sqrt{2}\left(\frac{d}{ds} X_n f + iB_+^* X_n f \right) = \psi(s, w),$$

де, згідно з (7), $\psi\,(s, w) = 0$ при $s > 0$. На підставі леми 2 це означає, що $(I - iJ)\begin{pmatrix} f \\ -iB^* f \end{pmatrix} \subset D_-$. Отже, $(I - iJ)\mathcal{D}_- \subset D_-$. Міркуючи аналогічно, одержуємо $(I + iJ)\mathcal{D}_+ \subset D_+$. З цих двох включень та рівності (14) випливає

$$D_- \ominus (I - iJ)\mathcal{D}_- \subset D_- \cap JD_+, \qquad D_+ \ominus (I + iJ)\mathcal{D}_+ \subset D_+ \cap JD_-.$$

З леми 2 зрозуміло, що $T_- JD_+ = iT_+ D_+ = L_2(\mathbb{R}_+, N)$. Отже, $D_- \cap JD_+ = JD_- \cap \cap D_+ = \{0\}$. Таким чином, $(I \pm iJ)\mathcal{D}_{\pm} = D_{\pm}$.

Аналогічно, враховуючи зауваження до леми 2, доводиться, що у випадку, коли n непарне, справджуються рівності $\mathcal{D}_{\pm} = D_{\pm}$. Теорему доведено.

1. *Лакс П. Д., Филлипс П. С.* Теория рассеяния. – М.: Мир, 1971. – 310 с.
2. *Lax P., Phillips R.* Scattering theory for the acoustic equation in an even number of space dimensions // Indiana Univ. Math. J. – 1972. – **22**, № 2. – P. 101 – 134.
3. *Kuzhel S. A.* Abstract wave equation; definition and properties of solutions. – Kiev, 1996. – 45p. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukraine. Inst. Math.; 96. 14).
4. *Кужіль С. О.* Про абстрактну схему розсіяння Лакса – Філліпса для диференціально-операторних рівнянь другого порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 4. – С. 452 – 463.
5. *Кужель С. А.* Об абстрактной схеме рассеяния Лакса – Филлипса для одного класса уравнений второго порядка // Функцион. анализ и его приложения. – 1996. – **30**, № 1. – С. 54 – 57.

Одержано 12. 08. 97