УДК 517.988:519.25

Г. А. Переверзєва (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРОЕКЦІЙНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ФРЕДГОЛЬМА І РОДУ З (ψ, β)-ДИФЕРЕНЦІЙОВНИМИ ЯДРАМИ ТА ВИПАДКОВИМИ ПОХИБКАМИ

An estimate of error is obtained for projection methods for solving the Fredholm equations of the first kind $Ax = y + \xi$ with a random perturbation ξ under assumption that an integral operator A possesses a (ψ, β)-differentiable kernel and the mathematical expectation of $\|\xi\|^2$ does not exceed σ^2. In the framework of these assumptions, the estimate obtained is a complete analog of the well-known result by Vainikko and Plato concerning the determined case where $\|\xi\| \le \sigma$.

Отримано оцінку похибки проекційних методів розв'язання рівнянь Фредгольма І роду $Ax = y + \xi$ з випадковим збуренням ξ у припущенні, що інтегральний оператор A має (ψ, β)-диференційовне ядро, а математичне сподівання $\|\xi\|^2$ не більше ніж σ^2. У рамках цих припущень отримана оцінка є повним аналогом відомого результату Г. Вайнікко та Р. Плато, що стосується детермінованого випадку, коли $\|\xi\| \le \sigma$.

1. Розглянемо інтегральне рівняння

$$Ax(t) \equiv \int_{-\pi}^{\pi} a(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau = y(t) \tag{1}$$

з 2π-періодичними ядрами $a(t,\tau)$ та вільними членами $y(t)$. Умова періодичності не є обтяжливою, оскільки за допомогою відповідної заміни змінних завжди маємо можливість перейти від неперіодичного випадку до рівняння (1) з періодичними функціями $a(t,\tau)$ та $y(t)$. Будемо вважати, що оператор A неперервно діє з гільбертового простору $L_2 = L_2(-\pi,\pi)$ у простір функцій, які характеризуються більшою диференціальною гладкістю. Як відомо, в L_2 однією з найбільш щільних є введена у [1, с. 198] шкала просторів (ψ,β)-диференційовних функцій $L^{\psi}_{\beta}L_2$. Тому припустимо, що оператор A та спряжений до нього оператор

$$A^{*}x(t) = \int_{-\pi}^{\pi} a(t,\tau)\,x(\tau)\,d\tau$$

неперервно діють з L_2 у $L^{\psi}_{\beta}L_2$. Якщо функція $\psi(u)$ не зростає, то з [1, с. 201] для такого оператора A маємо

$$\|(I-S_m)A\|_{L_2\to L_2} \le \psi(m)\,\|A\|_{2\to\psi}, \tag{2}$$

$$\|A\,(I-S_m)\|_{L_2\to L_2} \le \psi(m)\,\|A^{*}\|_{2\to\psi}, \tag{3}$$

де S_m — оператор, що ставить у відповідність кожній функції $f \in L_2$ m-ту часткову суму її ряду Фур'є, I — одиничний оператор, а $\|\cdot\|_{2\to\psi}$ — норма лінійного оператора, що діє з L_2 у $L^{\psi}_{\beta}L_2$. Зазначимо, що для справедливості (2), (3) достатньо, щоб ядро $a(t,\tau)$ оператора A мало по кожній змінній обмежену в L_2 (ψ,β)-похідну.

У найбільш цікавому випадку, коли $\psi(m) \to 0$ при $m \to \infty$, з (2) та (3) випливає, що оператор A є компактним, а тому A^{-1} (якщо він існує) не може бути неперервним. Таким чином, задача розв'язання рівняння (1) не є коректною за Адамаром, бо розв'язок цього рівняння нестійкий до малих збурень ξ правої частини (1). Але такі збурення, з іншого боку, цілком природно виникають на практиці, оскільки права частина $y(t)$ рівняння (1) відображає, як правило, результати деяких вимірювань, що неминуче містять певні похибки. Тому на практиці замість рівняння (1) маємо

$$A x = y + \xi, \tag{4}$$

де збурення ξ є малим у певному сенсі, і проблема полягає у тому, щоб виходячи з (4) побудувати наближений розв'язок рівняння (1). Внаслідок вказаної вище нестійкості це можна зробити тільки застосувавши до (4) той чи інший метод регуляризації. Сучасний підхід до побудови методів регуляризації пов'язаний з вибором деякої вимірної за Борелем функції $g_\alpha(u)$, що задовольняє вимоги (див., наприклад, [2])

$$\sup_{0 \le u \le \beta} u^p |1 - u g_\alpha(u)| \le \gamma_p \alpha^p, \quad \alpha > 0, \quad 0 \le p \le p_0, \tag{5}$$

$$\sup_{0 \le u \le \beta} \sqrt{u}\, |g_\alpha(u)| \le \gamma \alpha^{-1/2}, \tag{6}$$

де p_0, γ_p, γ — деякі сталі, а β така, що $\|A\|^2_{L_2 \to L_2} \le \beta$. Якщо g_α вибрана, то у рамках пов'язаного з нею методу регуляризації наближений розв'язок x_α рівняння (1) будується, виходячи з рівняння (4), за допомогою формули

$$x_\alpha = g_\alpha(A^* A) A^* (y + \xi).$$

Так, відомому методу регуляризації Тихонова, при якому

$$x_\alpha = (\alpha I + A^* A)^{-1} A^* (y + \xi) \tag{7}$$

відповідає функція $g_\alpha(u) = (\alpha + u)^{-1}$, що задовольняє вимоги (5), (6) при $p_0 = 1$.

Зазначимо, що при тому чи іншому методі регуляризації фактично здійснюємо перехід від некоректної задачі розв'язання рівняння (4) до коректної задачі побудови x_α. Наприклад, у методі Тихонова (7) x_α визначається з рівняння Фредгольма II роду $\alpha x + A^* A x = A^*(y + \xi)$, розв'язок якого є стійким відносно малого збурення ξ. Але в загальному випадку маємо змогу побудувати лише деяке наближення до цього розв'язку, попередньо дискретизувавши рівняння (4). Таким чином, проблема наближеного розв'язання (1) складається з двох частин — дискретизації і регуляризації.

Одним з найбільш поширених методів дискретизації є проекційні методи. Застосування цих методів до рівнянь (4), оператори яких задовольняють вимоги (2), (3), полягає в тому, що переходимо від (4) до рівняння

$$S_m A S_n x = S_m (y + \xi). \tag{8}$$

Застосовуючи тепер до (8) метод регуляризації, що визначається деякою функцією g_α, отримуємо елемент

$$x_{\alpha,m,n} = x_{\alpha,m,n}(A, y, \xi) = g_\alpha(S_n A^* S_m A S_n) S_n A^* S_m (y + \xi), \tag{9}$$

який розглядається як наближений розв'язок (1). Зазначимо, що для побудови $x_{\alpha,m,n}$ потрібно знати лише $(2n+1)(2m+1)$ коефіцієнтів Фур'є ядра $a(t, \tau)$ та $(2m+1)$ коефіцієнтів Фур'є вільного члена $y(t) + \xi(t)$ рівняння (4).

Для оцінки точності того чи іншого методу наближеного розв'язання некоректно поставленої задачі (1) потрібно вказати так звану множину коректності, тобто описати компакт, що містить розв'язок задачі (1). В теорії некоректних задач у ролі такого компакта традиційно виступає множина $M_{p,\rho}(A) = \{x: x = |A|^p v, \|v\| \leq \rho\}$, де $\|\cdot\|$ — норма в L_2, а $|A|^p = (A^*A)^{p/2}$. Таким чином, у подальшому будемо вважати, що вільний член $y(t)$ рівняння (1) належить множині $AM_{p,\rho}(A) = \{y: y = Ax, x \in M_{p,\rho}(A)\}$. Відомо, що в цьому випадку розв'язок рівняння (1) з найменшою нормою належить $M_{p,\rho}(A)$. Цей розв'язок будемо позначати A^+y.

2. При побудові наближеного розв'язку (1) за формулою (9) природно виникає питання про те, яким чином вибирати параметри α, m, n. Відповідь на це питання залежить від величини збурення ξ. В теорії некоректних задач розглядаються два типи збурень: детерміновані і випадкові.

У детермінованому випадку вважається, що збурення ξ міститься у кулі малого радіуса $\sigma > 0$, тобто $\|\xi\| \leq \sigma$. В цьому випадку питання про вибір α, m і n було повністю вирішене в [2].

Теорема 1 [2]. *Нехай $A^+y \in M_{p,\rho}(A)$ і g_α задовольняє вимоги* (5), (6). *Тоді для*

$$\alpha \asymp (\sigma^{1/(p+1)} + [\psi(m)]^{\min\{2/p,1\}} + [\psi(n)]^{\min\{1/p,1\}})^2 \tag{10}$$

має місце оцінка

$$\|A^+y - x_{\alpha,m,n}\| \leq c\,(\sigma^{p/(p+1)} + [\psi(m)]^{\min\{p,2\}} + [\psi(n)]^{\min\{p,1\}}),$$

де стала c залежить лише від p, ρ, $\|A\|_{2\to\psi}$ та $\|A^*\|_{2\to\psi}$.

Таким чином, з [2] випливає, що в детермінованому випадку при фіксованих p та σ доцільно вибирати α, m, n в (9) так, щоб виконувались співвідношення

$$[\psi(m)]^{\min\{p,2\}} \asymp [\psi(n)]^{\min\{p,1\}} \asymp \sigma^{p/(p+1)},$$

$$\alpha \asymp \sigma^{2/(p+1)}.$$

Мета нашої роботи полягає в тому, щоб отримати аналог такої теореми для випадкових збурень.

3. Як і в [3, с. 80] будемо вважати, що $\xi \in L_2$ є (вимірним) випадковим елементом. Точніше, існує деякий імовірнісний простір $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ з σ-алгеброю випадкових подій $\mathcal{A}$ і визначеною на $\mathcal{A}$ ймовірнісною мірою P такий, що відображення $\xi(\omega, t)$, $\omega \in \Omega$, $t \in (-\pi, \pi)$, множини Ω в L_2 є вимірним відносно борелівської σ-алгебри $\mathcal{B}(L_2)$, тобто найменшої σ-алгебри, яка містить усі відкриті підмножини з L_2. Це означає, що для довільного $B \in \mathcal{B}(L_2)$ множина $\xi^{-1}(B) = \{\omega: \omega \in \Omega, \xi(\omega, t) \in B\}$ належить σ-алгебрі $\mathcal{A}$. Крім цього, як і в [4], будемо вважати, що математичне сподівання $E\xi = 0$, а математичне сподівання $E\|\xi\|^2 \leq \sigma^2$. Останнє припущення є аналогом вимоги $\|\xi\| \leq \sigma$ у детермінованому випадку.

При випадковому збуренні ξ похибка наближеного розв'язку (9) характеризується за допомогою функції ризику [5, с. 24]

$$\mathcal{R}_{m,n}(y, g_\alpha, A, \xi) = \mathrm{E}\,\|A^+ y - x_{\alpha,m,n}(A, y, \xi)\|^2 =$$
$$= \int\limits_\Omega \|A^+ y - g_\alpha(A_{m,n}^* A_{m,n})\, A_{m,n}^*(y + \xi(\omega))\|^2\, dP(\omega),$$

де $A_{m,n} = S_m A S_n$.

Теорема 2. *Нехай умови теореми* 1 *виконуються і* α *вибране згідно з* (10). *Тоді*

$$\mathrm{E}\,\|A^+ y - x_{\alpha,m,n}(A, y, \xi)\|^2 \le$$
$$\le c\,(\sigma^{p/(p+1)} + [\psi(m)]^{\min\{p,2\}} + [\psi(n)]^{\min\{p,1\}})^2,$$

де стала c *залежить лише від* p, ρ, $\|A\|_{2\to\psi}$ *та* $\|A^*\|_{2\to\psi}$.

Доведення. Використовуючи лему про розклад функції ризику [5, с. 91], маємо

$$\mathrm{E}\,\|A^+ y - x_{\alpha,m,n}(A, y, \xi)\|^2 = \|(g_\alpha(A_{m,n}^* A_{m,n})\, A_{m,n}^* A - I)\, A^+ y\|^2 +$$
$$+ \operatorname{tr}(g_\alpha(A_{m,n}^* A_{m,n})\, A_{m,n}^* R_\xi A_{m,n}\,(g_\alpha(A_{m,n}^* A_{m,n}))^*), \tag{11}$$

де $\operatorname{tr}(B)$ — слід оператора B, а R_ξ — кореляційний оператор випадкового елемента ξ, який визначається тим, що для довільних $x, y \in L_2$

$$(x, R_\xi y) = \mathrm{E}\,(\xi, x)(\xi, y) = \int\limits_\Omega (\xi(\omega), x)(\xi(\omega), y)\, dP(\omega),$$

де $(\cdot\,,\cdot)$ — звичайний скалярний добуток у L_2.

Позначивши $g_\alpha(A_{m,n}^* A_{m,n})\, A_{m,n}^*$ через L_α і використавши відомі властивості операції $\operatorname{tr}(\cdot)$ (див., наприклад, [3, с. 132, 143]; [5, с. 225]), отримаємо

$$\operatorname{tr}(L_\alpha R_\xi L_\alpha^*) = \operatorname{tr}(R_\xi L_\alpha^* L_\alpha) \le \operatorname{tr}(|R_\xi L_\alpha^* L_\alpha|) \le \operatorname{tr}(|R_\xi|)\,\|L_\alpha^* L_\alpha\|_{L_2\to L_2} \le$$
$$\le \|L_\alpha\|_{L_2\to L_2}^2 \operatorname{tr}(|R_\xi|) = \|L_\alpha\|_{L_2\to L_2}^2\, \mathrm{E}\,\|\xi\|^2 \le \sigma^2 \|L_\alpha\|_{L_2\to L_2}^2.$$

Крім цього, з (6) і того факту, що $\|A_{m,n}\|_{L_2\to L_2} \le \|A\|_{L_2\to L_2}$ випливає

$$\|L_\alpha\|_{L_2\to L_2} = \|g_\alpha(A_{m,n}^* A_{m,n})\, A_{m,n}^*\|_{L_2\to L_2} \le$$
$$\le \|g_\alpha(A_{m,n}^* A_{m,n})(A_{m,n}^* A_{m,n})^{1/2}\|_{L_2\to L_2} \le$$
$$\le \sup_{0<u\le\|A_{m,n}\|^2} \sqrt{u}\,|g_\alpha(u)| \le \sup_{0<u\le\beta} \sqrt{u}\,|g_\alpha(u)| \le \gamma\alpha^{-1/2}.$$

Таким чином, беручи до уваги (10), маємо

$$\operatorname{tr}(L_\alpha R_\xi L_\alpha^*) \le \gamma^2 \alpha^{-1} \sigma^2 \le c\,\sigma^{2p/(p+1)}. \tag{12}$$

Оцінимо тепер перший доданок у правій частині (11). Для цього нам буде потрібно допоміжне твердження, що є прямим наслідком лем 4.3, 4.4 з [2] та оцінок (2), (3).

Лема. *Нехай для оператора* A *виконуються умови* (2), (3). *Тоді для* $p > 0$

$$\|(I - S_n)|A|^p\|_{L_2\to L_2} \le b_p[\psi(n)]^{\min\{p,1\}}, \tag{13}$$

$$\||A|^p - |A_{m,n}|^p\|_{L_2\to L_2} \le$$
$$\le c_p([\psi(m)]^{\min\{p,2\}} + [\psi(n)]^{\min\{p,1\}}), \tag{14}$$

де сталі b_p *і* c_p *залежать лише від* p *та* $\|A\|_{2\to\psi}$, $\|A^*\|_{2\to\psi}$.

Переходячи тепер до оцінки першого доданку в (11), маємо

$$\|(g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}A - I)A^+y\| \le$$
$$\le \|(g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}A_{m,n} - I)A^+y\| +$$
$$+ \|g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}(A - A_{m,n})A^+y\|. \tag{15}$$

По черзі оцінимо кожний доданок в правій частині (15). Використовуючи для $A^+y \in M_{p,\rho}(A)$ зображення $A^+y = |A|^p v$, з (14) та (5) знаходимо

$$\|(g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}A_{m,n} - I)A^+y\| \le$$
$$\le \|(g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}A_{m,n} - I)(A^*_{m,n}A_{m,n})^{p/2}v\| +$$
$$+ \|(g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}A_{m,n} - I)(|A|^p - |A_{m,n}|^p)v\| \le$$
$$\le \|v\| \sup_{0\le u\le\beta} |(g_\alpha(u)u - 1)u^{p/2}| + \|(|A|^p - |A_{m,n}|^p)v\| \sup_{0\le u\le\beta} |g_\alpha(u)u - 1| \le$$
$$\le p\gamma_{p/2}\alpha^{p/2} + p\gamma_0 c_p([\psi(m)]^{\min\{p,2\}} + [\psi(n)]^{\min\{p,1\}}). \tag{16}$$

Аналогічно для другого доданку в (15) з (3), (6), (10) та (13) маємо

$$\|(g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}(A - A_{m,n})A^+y\| =$$
$$= \|g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}(S_m A - S_m A S_n)|A|^p v\| =$$
$$= \|g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}(I - S_n)|A|^p v\| \le$$
$$\le \|g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}\|_{L_2\to L_2} \|A(I - S_n)\|_{L_2\to L_2} \|(I - S_n)|A|^p\|_{L_2\to L_2} \|v\| \le$$
$$\le p\gamma\alpha^{-1/2}\psi(n)\|A^*\|_{2\to\psi} b_p[\psi(n)]^{\min\{p,1\}} \le$$
$$\le c\,\alpha^{-1/2}[\psi(n)]^{\min\{p,1\}+1} \le c[\psi(n)]^{\min\{p,1\}}. \tag{17}$$

Беручи до уваги (10), з (16) та (17) остаточно отримуємо

$$\|(g_\alpha(A^*_{m,n}A_{m,n})A^*_{m,n}A - I)A^+y\|^2 \le$$
$$\le c(\sigma^{p/(p+1)} + [\psi(m)]^{\min\{p,2\}} + [\psi(n)]^{\min\{p,1\}})^2.$$

Твердження теореми випливає тепер з (11), (12) та останньої оцінки.

Легко бачити, що для розглянутих нами випадкових збурень ξ теорема 2 є повним аналогом теореми 1 з [2].

1. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
2. *Plato R., Vainikko G.* On the regularization of projection methods for solving ill-posed problems // Numer. Math. – 1990. – **57**. – P. 63 – 79.
3. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.
4. *Бакушинский А. Б.* О построении регуляризующих алгоритмов при случайных помехах // Докл. АН СССР. – 1969. – **189**, № 2. – С. 231 – 233.
5. *Федотов А. М.* Некорректные задачи со случайными ошибками в исходных данных. – Новосибирск: Наука, 1990. – 280 с.

Одержано 25.02.98,
після доопрацювання – 30.06.98