УДК 517.4

В. Г. Самойленко (Херсон. пед. ун-т)

НЕРАВЕНСТВО КАТО ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ РАЗДЕЛЯЮЩИХСЯ ПЕРЕМЕННЫХ

We consider conditions of preserving the Kato inequality in the case where, instead of an operator with finitely many variables, an operator with infinitely many separating variables is chosen. We use the inequality obtained to study the self-adjointness of a perturbed operator with infinitely many separating variables and the domain of definition for form-sum of this operator and for singular potential.

Розглянуто умови збереження нерівності Като у випадку, коли замість оператора з скінченним числом змінних розглядається оператор з нескінченним числом відокремлюваних змінних. Отримана нерівність використовується для вивчення самоспряженості збуреного оператора з нескінченним числом відокремлюваних змінних та області визначення форм-суми вказаного оператора і сингулярного потенціалу.

Пусть $L_2(M_k, d\mu_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, — пространства квадратично суммируемых функций по вероятностной мере $d\mu_k$, в каждом из которых действует самосопряженный оператор A_k с областью определения $D(A_k)$ и такой, что $A_k 1 = 0$. Ниже будем обозначать $L_2(M, d\mu) = \bigotimes_{k=1}^{\infty} L_2(M_k, d\mu_k)$, $M = \bigotimes_{k=1}^{\infty} M_k$, $d\mu = \bigotimes_{k=1}^{\infty} d\mu_k$, а через A — замыкание оператора

$$\text{л. о.}\left(\bigotimes_{k=1}^{\infty} D(A_k)\right) \ni u \mapsto Au = \sum_{k=1}^{\infty} (1 \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes A_k \otimes 1 \otimes \ldots) u \in L_2(M, d\mu),$$

который становится самосопряженным.

Кроме того, под P_n будем подразумевать оператор ортогонального проектирования на подпространство функций n переменных (более подробное изложение см. в [1]).

Рассмотрим подмножество $D \subset L_2(V, d\mu)$ (включение топологическое) и предположим, что $1 \in D$ и $D \subset D(A) \cap L_\infty$, с топологией, заданной более сильной сходимостью, чем сходимость в норме графика оператора A. Обозначим $D_n = P_n D \subset L_2\left(\bigoplus_{k=1}^{n} M_k, \bigotimes_{k=1}^{n} d\mu_k\right)$ с индуцированной топологией на D; ниже будем предполагать, что топологическое пространство $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$ (равенство теоретико-множественное). Отметим, что в конкретных приложениях изложенные требования, как правило, выполнены.

Обозначим через B_n оператор, являющийся замыканием в $L_2\left(\bigoplus_{k=1}^{n} M_k, \bigotimes_{k=1}^{n} d\mu_k\right)$ оператора

$$\text{л. о.}\left(\bigotimes_{k=1}^{n} D(A_k)\right) \ni u \mapsto B_n u = \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{(1 \otimes \ldots \otimes 1 \otimes A_k \otimes 1 \otimes \ldots \otimes 1)}_{n} u,$$

который становится самосопряженным [1].

Пусть $u \in L_2(M, d\mu)$, тогда можно рассматривать Au как обобщенную функцию над D, определяя ее с помощью равенства $(Au, \varphi)_{L_2(M, d\mu)} = (u, A\varphi)_{L_2(M, d\mu)}$, $\varphi \in D \subset D(A)$ (правая часть определена корректно, так как

$u, A\varphi \in L_2(M, d\mu))$. Отметим, что в силу определенной на D топологии последнее равенство задает непрерывный функционал над D, т. е. Au можно понимать как обобщенную функцию над D.

В силу свойств оператора P_n [2] можно показать справедливость утверждения: для любого $n = 1, 2, \ldots$ топология, индуцированная на D_n, сильнее топологии, заданной нормой графика оператора B_n. Благодаря этому утверждению, аналогично изложенному выше получим, что для любой функции $V \in$ $\in L_2\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} M_k, \overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}} d\mu_k\right)$ существует обобщенная функция B_nV над D_n, определенная с помощью равенства

$$(B_n V, \psi)_{L_2\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} M_k, \overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}} d\mu_k\right)} = (V, B_n \psi)_{L_2\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} M_k, \overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}} d\mu_k\right)}, \qquad \psi \in D_n.$$

Далее будем говорить, что оператор B_n удовлетворяет неравенству Като, если для любого $u \in L_2\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} M_k, \overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}} d\mu_k\right)$ и такого, что $B_n u \in L_1\left(\overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}} M_k, \overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}} d\mu_k\right)$, в смысле обобщенных функций над D_n выполняется неравенство $B_n|u| \leq$ $\leq \operatorname{Re}((\operatorname{sgn} u) B_n u)$, где

$$(\operatorname{sgn} u)(x) = \begin{cases} 0, & |u(x)| = 0; \\ \dfrac{\overline{u(x)}}{|u(x)|}, & |u(x)| \neq 0. \end{cases}$$

Теорема 1. *Пусть при каждом $n = 1, 2, \ldots$ для оператора B_n выполняется неравенство Като. Тогда для любой функции $u \in L_2(M, d\mu)$ такой, что $Au \in L_1(M, d\mu)$, справедливо неравенство Като в смысле обобщенных функций над D*

$$A|u| \leq \operatorname{Re}((\operatorname{sgn} u) Au).$$

Доказательство теоремы заключается в проверке сохранения неравенства Като в результате предельного перехода от оператора B_n к оператору A. Это удается осуществить с помощью аппроксимации функции u цилиндрическими функциями $P_n u$ в силу тех свойств, которые имеет оператор P_n.

***Замечание* 1.** Если $D \subset D(A) \cap L_q(M, d\mu)$, $q \in (2, \infty)$, и топология на D задана сходимостью более сильной, чем сходимость в $L_q(M, d\mu)$, то теорема 1 остается справедливой при условии, что в ее формулировке пространство L_1 будет заменено на L_p, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Теорема 1 позволяет гарантировать выполнение неравенства Като для оператора с бесконечным числом разделяющихся переменных, если оно справедливо для соответствующих операторов от n переменных при каждом $n = 1, 2, \ldots$. Однако при незначительных ограничениях на топологию множества D утверждение теоремы 1 остается справедливым, если неравенство Като выполняется для операторов, действующих по одной переменной. Рассмотрим эту ситуацию более подробно.

Пусть D_n получается из $\overset{n}{\underset{k=1}{\otimes}} D_k$ $(D_k \subset L_2(M_k, d\mu_k)$, $D_k \subset D(A_k) \cap L_\infty$ при каждом $n = 1, 2, \ldots)$ путем замыкания в соответствующей топологии, относительно которой будем дополнительно предполагать, что она не слабее топологии, заданной равномерной сходимостью.

Теорема 2. *Пусть при каждом* $k = 1, 2, \ldots$ *оператор* A_k, *действующий в* $L_2(M_k, d\mu_k)$, *удовлетворяет неравенству Като в смысле обобщенных функций над* D_k. *Тогда для любой функции* $u \in L_2(M, d\mu)$ *такой, что* $Au \in L_1(M, d\mu)$, *справедливо неравенство Като* $A\,|u| \le \operatorname{Re}((\operatorname{sgn} u)Au)$ *в смысле обобщенных функций над* D.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1, однако основано на аппроксимации цилиндрическими функциями, являющимися тензорным произведением функций, каждая из которых зависит от одной переменной.

***Замечание* 2.** Если $D_k \subset D(A_k) \cap L_q(M_k, d\mu_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, и D_n — замыкание $\bigotimes_{k=1}^{n} D_k$ в соответствующей топологии, относительно которой мы будем предполагать, что она слабее чем топология, заданная сходимостью $L_q(M, d\mu)$, то теорема 2 останется справедливой при условии, что в ее формулировке L_1 заменено на L_p, где $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Следствие. *Пусть* $V(x) \in L_2(M, d\mu)$, $V(x) \ge c$, *и выполнены условия теоремы* 1 *или* 2. *Тогда оператор* $A + V$ *существенно самосопряжен на* D.

Кроме того, при условии теоремы 1 или 2, аналогично тому, как это делается в теореме X.32 из [3], для форм-суммы B операторов A и V, $V(x) > 0$, $V(x) \in L_1(M, d\mu)$, выполняется равенство

$$D(B) = \{u \in L_2(M, d\mu) \mid Vu \in L_1(M, d\mu);\ (Au + Vu)_{\text{о.ф.}} \in L_2(M, d\mu)\},$$

где $(Au + Vu)_{\text{о.ф.}}$ — обобщенная функция:

$$((Au + Vu)_{\text{о.ф.}}, \varphi) \to \int\limits_M u(x)(A\varphi)(x)\,d\mu(x) + \int\limits_M V(x)\,u(x)\,\varphi(x)\,d\mu(x), \qquad \varphi \in D.$$

Более того, $Bu = (Au + Vu)_{\text{о.ф.}}$.

Результаты теорем 1, 2 примыкают к ряду работ, в которых рассматривалось неравенство Като для дифференциальных операторов от конечного и бесконечного числа переменных (см. [4, 5], а также [3, 6] и приведенную в них библиографию). Отметим, что для операторов общего вида $A + V$, действующих в $L_2(M, d\mu)$, результаты, аналогичные следствию 1, рассматривались в [2, 3], однако при других условиях на оператор A и область D в [3], а также при более жестких требованиях на потенциал в [2].

1. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с.
2. *Березанский Ю. М., Самойленко В. Г.* Самосопряженность дифференциальных операторов с конечным и бесконечным числом переменных и эволюционные уравнения // Успехи мат. наук. – 1981. – **36**, № 5. – С. 3 – 56.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики: В 6-ти т. – М.: Мир, 1978. – Т. 2. – 395 с.
4. *Кондратьев Ю. Г.* Неравенство Като для операторов вторичного квантования // Укр. мат. журн. – 1973. – **35**, № 6. – С. 735 – 756.
5. *Кондратьев Ю. Г., Цикаленко Т. В.* Операторы Дирихле и связанные с ними дифференциальные уравнения. – Киев, 1986. – 49 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; № 86.37).

Получено 09.01.96,
после доработки — 14.01.99