УДК 511.33

І. В. Ковердюк (Одес. ун-т)

НЕСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА ДІЛЬНИКІВ У АРИФМЕТИЧНІЙ ПРОГРЕСІЇ

The value distribution of an asymmetric divisor function $d(a, b; n)$ is investigated in arithmetic progression with increasing difference.

Досліджується розподіл значень несиметричної функції дільників $d(a, b; n)$ у арифметичній прогресії із зростаючою різницею.

Вступ. Нехай $a, b,\ 1 \le a < b,$ — натуральні числа. Для кожного $n \in \mathbf{N}$ позначимо через $d(a, b; n)$ кількість зображень n у вигляді $n = n_1^a n_2^b,\ n_1, n_2 \in \mathbf{N}$, тобто

$$d(a, b; n) = \sum_{n = n_1^a n_2^b} 1. \tag{1}$$

Функція $d(a, b; n)$ є узагальненням класичної функції дільників $d(n)$.

Покладемо для $x > 1$

$$D(a, b; l, q; x) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv l (\operatorname{mod} q)}} d(a, b; n).$$

Метою роботи є побудова асимптотичної формули для $D(a, b; l, q; x)$ у випадку, коли q зростає разом з x. Результати для $D(a, b; x)$, $q = 1$ одержані в [1, 2]. Ці результати залишаються також вірними для фіксованого q. А при зростаючому q доводиться враховувати вплив q на значення залишкових членів. Розподіл значень $d(n)$ на арифметичних прогресіях досліджено у багатьох роботах (див., наприклад, [3, 4]). Звичайно вивчення $d(n)$ в арифметичній прогресії грунтується на застосуванні дзета-функції Гурвіца; ми ж будемо істотно використовувати методи статистичної теорії чисел та оцінки тригонометричних сум за методом експонентних пар.

Проблема асимптотики для несиметричної функції дільників виникає при розв'язанні задачі про кількість точок з цілими координатами, що належать решітці, яка визначається конгруенцією $x^a y^b \equiv l (\operatorname{mod} q)$, та розміщені під кривою $x^a y^b \le N$.

Ця задача узагальнює відому задачу про число дільників Діріхле. Аналітичні методи розв'язання таких задач були встановлені Г. Ф. Вороним [5, 6].

Несиметричну задачу дільників можна також розглядати з точки зору діофантових рівнянь: задача про кількість розв'язків рівняння $x^a y^b = n$ за умови $n \le x,\ n \equiv l (\operatorname{mod} q)$.

1. Попередні перетворювання. Зведемо $D(a, b; l, q; x)$ до вигляду

$$D(a, b; l, q; x) = \sum_{\substack{n \le x \\ n \equiv l (\operatorname{mod} q)}} d(a, b; n) = \sum_{\substack{n^a m^b \le x \\ n^a m^b \equiv l (\operatorname{mod} q)}} 1 =$$

$$= \sum_{\substack{l_1, l_2 (\operatorname{mod} q) \\ l_1^a l_2^b \equiv l (\operatorname{mod} q)}} \ \sum_{(nq + l_1)^a (mq + l_2)^b \le x} 1 = \sum_{\substack{l_1, l_2 (\operatorname{mod} q) \\ l_1^a l_2^b \equiv l (\operatorname{mod} q)}} \ \sum_{\substack{n^a m^b \le x \\ n \equiv l_1 (q) \\ m \equiv l_2 (q)}} 1.$$

Позначимо

$$S(a, b; l_1, l_2, q; x) = \sum_{\substack{n^a m^b \le x \\ n \equiv l_1(q) \\ m \equiv l_2(q)}} 1.$$

Тоді

$$D(a, b; l, q; x) = \sum_{\substack{l_1, l_2 \,(\mathrm{mod}\, q) \\ l_1^a l_2^b \equiv l (\mathrm{mod}\, q)}} S(a, b; l_1, l_2, q; x). \tag{2}$$

Таким чином, спочатку будемо вивчати $S(a, b; l_1, l_2, q; x)$.

Перш за все запишемо такий розклад:

$$S(a, b; l_1, l_2, q; x) = S_1 + S_2 - S_3, \tag{3}$$

де

$$S_1 = \sum_{\substack{n \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ n \equiv l_1(q)}} \sum_{\substack{m \le (xn^{-a})^{\frac{1}{b}} \\ m \equiv l_2(q)}} 1, \quad S_2 = \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ m \equiv l_2(q)}} \sum_{\substack{n \le (xn^{-b})^{\frac{1}{a}} \\ n \equiv l_1(q)}} 1,$$

$$S_3 = \sum_{\substack{n \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ n \equiv l_1(q)}} \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ m \equiv l_2(q)}} 1.$$

2. Вилучення головного та залишкового членів асимптотичної формули. Нехай функція $\psi(y)$ визначається таким чином:

$$\psi(y) = y - [y] - \frac{1}{2} \quad \forall\, y \in \mathbf{R}.$$

Для кожного нецілого y вірне розвинення у ряд Фур'є:

$$\psi(y) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2\pi n y}{\pi n}.$$

Будемо послідовно розглядати суми S_1, S_2, S_3:

$$S_1 = \sum_{\substack{n \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ n \equiv l_1(q)}} \sum_{\substack{m \le (xn^{-a})^{\frac{1}{b}} \\ m \equiv l_2(q)}} 1 = \sum_{\substack{n \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ n \equiv l_1(q)}} \left[\frac{(xn^{-a})^{\frac{1}{b}} - l_2}{q} \right] =$$

$$= \sum_{\substack{n \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ n \equiv l_1(q)}} \left(\frac{(xn^{-a})^{\frac{1}{b}} - l_2}{q} - \psi\left(\frac{(xn^{-a})^{\frac{1}{b}} - l_2}{q} \right) - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{b}}}{q} \Sigma_1 - N_1 - \left(\frac{l_2}{q} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_1}{q} - \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_1}{q} \right) - \frac{1}{2} \right),$$

$$S_2 = \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ m \equiv l_2(q)}} \sum_{\substack{n \le (xn^{-b})^{\frac{1}{b}} \\ n \equiv l_1(q)}} 1 = \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ m \equiv l_2(q)}} \left[\frac{(xm^{-b})^{\frac{1}{a}} - l_1}{q} \right] =$$

$$= \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ m \equiv l_2(q)}} \left(\frac{(xm^{-b})^{\frac{1}{a}} - l_1}{q} - \psi\left(\frac{(xm^{-b})^{\frac{1}{a}} - l_1}{q} \right) - \frac{1}{2} \right) =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{a}}}{q} \Sigma_2 - N_2 - \left(\frac{l_1}{q} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_2}{q} - \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_2}{q} \right) - \frac{1}{2} \right),$$

де

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{n \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ n \equiv l_1(q)}} n^{\frac{a}{b}}, \quad N_1 = \sum_{\substack{n \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ n \equiv l_1(q)}} \psi\left(\frac{(xn^{-a})^{\frac{1}{b}} - l_2}{q} \right),$$

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ m \equiv l_2(q)}} m^{\frac{b}{a}}, \quad N_2 = \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ m \equiv l_2(q)}} \psi\left(\frac{(xm^{-b})^{\frac{1}{a}} - l_1}{q} \right); \tag{4}$$

$$S_3 = \sum_{\substack{n \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ n \equiv l_1(q)}} \sum_{\substack{m \le x^{\frac{1}{a+b}} \\ m \equiv l_2(q)}} 1 =$$

$$= \left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_1}{q} - \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_1}{q} \right) - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_2}{q} - \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_2}{q} \right) - \frac{1}{2} \right).$$

Таким чином,

$$S(a, b; l_1, l_2, q; x) = S_1 + S_2 - S_3 = \frac{x^{\frac{1}{b}}}{q} \Sigma_1 + \frac{x^{\frac{1}{a}}}{q} \Sigma_2 - N_1 - N_2 +$$

$$+ \left(\frac{l_1}{q} + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{l_2}{q} + \frac{1}{2} \right) - \left(\psi\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_1}{q} \right) - \frac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q} \right) \left(\psi\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_2}{q} \right) - \frac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q} \right). \tag{5}$$

Далі розглядаємо суми Σ_1, Σ_2. Це є суми вигляду

$$\sum_{\substack{n \le y \\ n \equiv l(q)}} n^{-\alpha} = \sum_{0 \le m \le \frac{y-l}{q}} (l + mq)^{-a} = l^{-\alpha} + q^{-\alpha} \sum_{0 < m \le \frac{y-l}{q}} \left(\frac{l}{q} + m \right)^{-\alpha}.$$

Позначимо

$$\Sigma^* = \sum_{0 < m \le \frac{y-l}{q}} \left(\frac{l}{q} + m\right)^{-\alpha}, \quad \alpha > 0, \quad \alpha \ne 1.$$

Для подальшої оцінки використовуємо таку лему.

Лема 1. *Для* $\alpha > 0$, $\alpha \ne 1$ *і* $0 < \beta \le 1$

$$\sum_{1 \le n \le z} (n+\beta)^{-\alpha} = \zeta(\alpha, \beta) + \frac{(z+\beta)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \beta^{-\alpha} - \psi(z)(z+\beta)^{-\alpha} + O\left((z+\beta)^{-\alpha-1}\right),$$

де

$$\zeta(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\beta)^{-\alpha}.$$

Доведення для $\beta = 0$ див. у [1]. Для $0 < \beta \le 1$ доведення проводиться аналогічно.

Сума Σ^* задовольняє умови леми 1, отже,

$$\Sigma^* = \sum_{0 < m \le \frac{y-l}{q}} \left(\frac{l}{q} + m\right)^{-\alpha} = \zeta\left(\alpha, \frac{l}{q}\right) - \left(\frac{l}{q}\right)^{-\alpha} +$$

$$+ \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{y}{q}\right)^{1-\alpha} - \psi\left(\frac{y-l}{q}\right)\left(\frac{y}{q}\right)^{-\alpha} + O\left(\left(\frac{y}{q}\right)^{-\alpha-1}\right).$$

Таким чином,

$$\sum_{\substack{n \le y \\ n \equiv l(q)}} n^{-\alpha} = l^{-\alpha} + q^{-\alpha}\Sigma^* =$$

$$= q^{-\alpha}\zeta\left(\alpha, \frac{l}{q}\right) - \frac{1}{1-\alpha}\frac{y^{1-\alpha}}{q} - y^{-\alpha}\psi\left(\frac{y-l}{q}\right) + O(qy^{-\alpha-1}).$$

Тоді для сум Σ_1 та Σ_2 з (4) відповідно маємо

$$\frac{x^{\frac{1}{b}}}{q}\Sigma_1 = \frac{x^{\frac{1}{b}}}{q^{1+\frac{a}{b}}}\zeta\left(\frac{a}{b}, \frac{l_1}{q}\right) + \frac{b}{b-a}\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right)^2 - \frac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\psi\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_1}{q}\right) + O(1),$$

$$\frac{x^{\frac{1}{a}}}{q}\Sigma_2 = \frac{x^{\frac{1}{a}}}{q^{1+\frac{b}{a}}}\zeta\left(\frac{b}{a}, \frac{l_2}{q}\right) + \frac{a}{a-b}\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right)^2 - \frac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\psi\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_2}{q}\right) + O(1).$$

Враховуючи, що $|\psi(y)| \le \frac{1}{2}$ $\forall y \in \mathbf{R}$, з (5) для $S(a, b; l_1, l_2, q; x)$ одержуємо

$$S(a, b; l_1, l_2, q; x) = \frac{x^{\frac{1}{b}}}{q^{1+\frac{a}{b}}}\zeta\left(\frac{a}{b}, \frac{l_1}{q}\right) + \frac{x^{\frac{1}{a}}}{q^{1+\frac{b}{a}}}\zeta\left(\frac{b}{a}, \frac{l_2}{q}\right) - N_1 - N_2 + O(1). \tag{6}$$

З перших двох доданків цієї формули згодом одержимо головний член асимптотичної формули, а з інших — залишок.

3. Оцінка залишкового члену. Будемо розглядати суми N_1 і N_2 з (4). Запишемо їх у вигляді

$$N_1 = \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{a}}}{q l_1^{\frac{a}{b}}} - \frac{l_1}{q}\right) + \sum_{1 \le n \le \frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_1}{q}} \psi\left(\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right)^{\frac{a+b}{b}} \left(\frac{l_1}{q} + n\right)^{-\frac{a}{b}} - \frac{l_2}{q}\right),$$

$$N_2 = \psi\left(\frac{x^{\frac{1}{a}}}{q l_2^{\frac{b}{a}}} - \frac{l_1}{q}\right) + \sum_{1 \le m \le \frac{x^{\frac{1}{a+b}} - l_2}{q}} \psi\left(\left(\frac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right)^{\frac{a+b}{a}} \left(\frac{l_2}{q} + m\right)^{-\frac{b}{a}} - \frac{l_1}{q}\right).$$

Оскільки $|\psi(y)| \le \frac{1}{2}$ $\forall\, y \in \mathbf{R}$, то $N_1 = O(1)$, $N_2 = O(1)$. Отже, будемо розглядати суми вигляду

$$\sum_{m \le y - r_1} \psi\left(y^{1+\alpha}(r_1 + m)^{-\alpha} - r_2\right).$$

Тому що тут $0 \le r_1$, $r_2 < 1$, $\alpha > 0$, внутрішня функція $g(x) = x^{1+\alpha}(r_1 + m)^{-\alpha} - r_2$ є монотонно спадною, обмеженою знизу $g(x) > -r_2$ $\forall\, x \in \mathbf{R}^+$, а $|\psi(y)| \le \frac{1}{2}$ $\forall\, y \in \mathbf{R}$, маємо

$$\sum_{m \le y - r_1} \psi\left(y^{1+\alpha}(r_1 + m)^{-\alpha} - r_2\right) \sim \sum_{t \le y} \psi\left(\frac{y^{1+\alpha}}{t^{\alpha}}\right).$$

Для оцінки подібної суми використовуємо метод Ван дер Корпута (метод експонентних пар).

Означення 1. *Говорять, що дійснозначна функція $g(x)$ r-апроксимує функцію $f(x)$ на відрізку $[a, b]$, якщо $f(x)$ та $g(x)$ мають похідні r-го порядку та існує константа c, $0 \le c \le \frac{1}{2}$, така, що для всіх $x \in [a, b]$*

$$\left|f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)\right| < c\left|g^{(k)}(x)\right|,\ k = 0, 1, 2, \ldots, r \text{ (позначають } f \underset{[a,b]}{\overset{r}{\sim}} g).$$

Означення 2. *Говорять, що пара дійсних чисел (k, l), $0 \le k \le \frac{1}{2} \le l \le 1$, є експонентною парою, якщо для кожного відрізку $[a, b]$, $a < b \le 2a$, $a > 1$, та кожної функції $f(x)$ такої, що $f(x) \underset{[a,b]}{\overset{r}{\sim}} A x^s$, $r \ge 5$, $s \ne 0, -1$, вірне співвідношення*

$$\sum_{a < n \le b} e^{2\pi i f(n)} = O(z^k a^l),$$

де $z = |As| a^{-s} >> 1$ (константи в символах O і $>>$, можливо, залежать тільки від s).

Філліпс [7] вказав два процеси **A** та **B**, що породжують з даної експонентної пари (k, l) нову експонентну пару (χ, λ), а саме

$$(\chi, \lambda) = \mathbf{A}(k, l) = \left(\frac{k}{2(k+1)}, \frac{1}{2} + \frac{l}{2(k+1)}\right),$$

або

$$(\chi, \lambda) = \mathbf{A}(k, l) = \left(l - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right).$$

Оскільки пара $(0, 1)$ є експонентною, з неї можна одержати інші.

Лема 2. *Нехай* $\alpha > 0$, $x > 1$, $z > 1$ *та* (k, l) *— будь-яка експонентна пара. Тоді*

$$\sum_{n \le z} \psi\left(\frac{x}{n^{\alpha}}\right) = O\left(x^{-\frac{1}{2}} z^{1+\frac{\alpha}{2}}\right) + \begin{cases} O\left(x^{\frac{k}{k+1}} z^{\frac{l-\alpha k}{k+1}}\right), & l > \alpha k; \\ O\left(x^{\frac{k}{k+1}} \log z\right), & l = \alpha k; \\ O\left(x^{\frac{k}{1+(1+\alpha)k-l}}\right), & l < \alpha k. \end{cases}$$

Доведення див. у роботі [1].

Використовуючи цю лему у нашому випадку, маємо

$$\sum_{t \le y} \psi\left(\frac{y^{1+\alpha}}{t^{\alpha}}\right) = O\left(y^{\frac{1}{2}}\right) + \begin{cases} O\left(y^{\frac{k+l}{k+1}}\right), & l > \alpha k; \\ O\left(y^{\frac{(1+\alpha)k}{k+1}} \log y\right), & l = \alpha k; \\ O\left(y^{\frac{(1+\alpha)k}{1+(1+\alpha)k-l}}\right), & l < \alpha k. \end{cases} \tag{7}$$

Для таких сум відомі Ω-результати

$$\sum_{t \le y} \psi\left(\frac{y^{1+\alpha}}{t^{\alpha}}\right) = \Omega\left(y^{\frac{1}{2}}\right) \tag{8}$$

(див. [1, 8]). Тому для кожної експонентної пари виконується умова

$$\frac{k+l}{k+1} > \frac{1}{2}$$

і перший O-член покривається іншими.

Оскільки $a < b$ та $k \le l$, то в N_1 нерівність $ak < bl$ виконується завжди, а випадки $ak = bl$ та $ak > bl$ неможливі. Таким чином, в залишковому члені вирішальну роль відіграє тільки N_2.

Для оцінки використовуємо експонентну пару

$$\left(\frac{1}{19}, \frac{10}{19}\right) = \mathbf{B}\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A}^2\mathbf{B}\mathbf{A}^2\mathbf{B}(0, 1).$$

Таким чином, із (7), враховуючи (8), отримуємо

$$\Delta_s = N_1 + N_2 = \begin{cases} O\left(\left(\dfrac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right)^{\frac{11}{20}}\right), & 10a > b; \\ O\left(\left(\dfrac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right)^{\frac{11}{20}} \log \dfrac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right), & 10a = b; \\ O\left(\left(\dfrac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right)^{\frac{a+b}{10a+b}}\right), & 10a < b. \end{cases} \qquad (9)$$

Тут $\dfrac{k+l}{k+1} = \dfrac{11}{20}$ (в Ω-результаті показник степеня дорівнює $\dfrac{1}{2}$).

Якщо використовувати раніше отримані експонентні пари

$$\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right) = \mathbf{B}\mathbf{A}^2\mathbf{B}(0, 1), \qquad \left(\frac{11}{30}, \frac{16}{30}\right) = \mathbf{B}\mathbf{A}^3\mathbf{B}(0, 1)$$

(див. [1, 9]), то тут показник степеня дорівнює $\dfrac{2}{3}$ та $\dfrac{27}{41}$ відповідно, що значно гірше ніж $\dfrac{11}{20}$.

У підсумку для $S(a, b; l_1, l_2, q; x)$ маємо

$$S(a, b; l_1, l_2, q; x) = \frac{x^{\frac{1}{b}}}{q^{1+\frac{a}{b}}} \zeta\left(\frac{a}{b}, \frac{l_1}{q}\right) + \frac{x^{\frac{1}{a}}}{q^{1+\frac{b}{a}}} \zeta\left(\frac{b}{a}, \frac{l_2}{q}\right) + \Delta_s + O(1). \qquad (10)$$

4. Підсумки. Мета роботи — побудова асимптотичної формули для $D(a, b; l, q; x)$. На підставі формули (2) маємо

$$D(a, b; l, q; x) = H(a, b; l, q; x) + \Delta(a, b; l, q; x), \qquad (11)$$

де

$$H(a, b; l, q; x) = \frac{x^{\frac{1}{b}}}{q^{1+\frac{a}{b}}} \sum_{\substack{l_1, l_2 \,(\mathrm{mod}\, q) \\ l_1^a l_2^b \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q)}} \zeta\left(\frac{a}{b}, \frac{l_1}{q}\right) + \frac{x^{\frac{1}{a}}}{q^{1+\frac{b}{a}}} \sum_{\substack{l_1, l_2 \,(\mathrm{mod}\, q) \\ l_1^a l_2^b \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q)}} \zeta\left(\frac{b}{a}, \frac{l_2}{q}\right), \qquad (12)$$

$$\Delta(a, b; l, q; x) = \sum_{\substack{l_1, l_2 \,(\mathrm{mod}\, q) \\ l_1^a l_2^b \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q)}} (\Delta_s + O(1)). \qquad (13)$$

Оскільки оцінка Δ_s не залежить від l_1 та l_2, то очевидно, що

$$\Delta(a, b; l, q; x) \ll \varphi(q)(\Delta_s + O(1)), \qquad (14)$$

тобто, враховуючи (9), записуємо

$$\Delta(a,b;l,q;x) \ll \varphi(q) + \begin{cases} \varphi(q)\left(\dfrac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right)^{\frac{11}{20}}, & 10a>b; \\ \varphi(q)\left(\dfrac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right)^{\frac{11}{20}} \log \dfrac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}, & 10a=b; \\ \varphi(q)\left(\dfrac{x^{\frac{1}{a+b}}}{q}\right)^{\frac{a+b}{10a+b}}, & 10a<b. \end{cases}$$

Залишилось з'ясувати як q залежить від x.

Оскільки $\dfrac{a}{b}$ та $\dfrac{b}{a}$ більші за нуль та не дорівнюють 1, то з леми 1 маємо, що функції $\zeta\left(\dfrac{a}{b},\dfrac{l_1}{q}\right)$ та $\zeta\left(\dfrac{b}{a},\dfrac{l_2}{q}\right)$ під знаком суми у головному члені можна апроксимувати як $\left(\dfrac{l_1}{q}\right)^{-\frac{a}{b}}$ та $\left(\dfrac{l_2}{q}\right)^{-\frac{b}{a}}$ відповідно. Тоді перший доданок у головному члені має вигляд

$$\frac{x^{\frac{1}{b}}}{q^{1+\frac{a}{b}}} \sum_{\substack{l_1,\, l_2 \,(\mathrm{mod}\, q) \\ l_1^a\, l_2^b \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q)}} \zeta\left(\frac{a}{b},\frac{l_1}{q}\right) \ll \frac{x^{\frac{1}{b}}}{q^{1+\frac{a}{b}}} \sum_{\substack{l_1,\, l_2 \,(\mathrm{mod}\, q) \\ l_1^a\, l_2^b \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q)}} \left(\frac{l_1}{q}\right)^{-\frac{a}{b}} =$$

$$= \frac{x^{\frac{1}{b}}}{q} \sum_{\substack{l_1,\, l_2 \,(\mathrm{mod}\, q) \\ l_1^a\, l_2^b \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q)}} l_1^{-\frac{a}{b}} \ll \frac{x^{\frac{1}{b}}}{q} q^{-\frac{a}{b}+1} = \frac{x^{\frac{1}{b}}}{q^{\frac{a}{b}}},$$

а другий —

$$\frac{x^{\frac{1}{a}}}{q^{1+\frac{b}{a}}} \sum_{\substack{l_1,\, l_2 \,(\mathrm{mod}\, q) \\ l_1^a\, l_2^b \equiv l \,(\mathrm{mod}\, q)}} \zeta\left(\frac{b}{a},\frac{l_2}{q}\right) \ll \frac{x^{\frac{1}{a}}}{q^{\frac{b}{a}}}.$$

Порівнюючи доданки у головному члені і враховуючи, що $a<b$, одержуємо

$$x^{\frac{1}{b}} q^{-\frac{a}{b}} \ll x^{\frac{1}{a}} q^{-\frac{b}{a}}, \qquad q^{\frac{b}{a}-\frac{a}{b}} \ll x^{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}},$$

$$q^{\frac{b^2-a^2}{ab}} \ll x^{\frac{b-a}{ab}}, \qquad q^{a+b} \ll x, \qquad q \ll x^{\frac{1}{a+b}}.$$

Тепер порівняємо головний член із залишковим. Для $10a \geq b$

$$x^{\frac{11}{20(a+b)}} q^{\frac{9}{20}} \ll x^{\frac{1}{a}} q^{-\frac{b}{a}}, \qquad q^{\frac{b}{a}+\frac{9}{20}} \ll x^{\frac{1}{a}-\frac{11}{20(a+b)}},$$

$$q^{\frac{20b+9a}{20a}} << x^{\frac{20a+20b-11a}{20a(a+b)}}, \quad q^{\frac{20b+9a}{20a}} << x^{\frac{9a+20b}{20a(a+b)}}, \quad q << x^{\frac{1}{a+b}}.$$

Для $10a < b$

$$x^{\frac{1}{10a+b}} q^{1-\frac{a+b}{10a+b}} << x^{\frac{1}{a}} q^{-\frac{b}{a}}, \quad q^{\frac{b}{a}+\frac{9a}{10a+b}} << x^{\frac{1}{a}-\frac{11}{10a+b}},$$

$$q^{\frac{b^2+10ab+9a^2}{a(10a+b)}} << x^{\frac{9a+b}{a(10a+b)}}, \quad q^{\frac{(9a+b)(a+b)}{a(10a+b)}} << x^{\frac{9a+b}{a(10a+b)}}, \quad q << x^{\frac{1}{a+b}}.$$

Таким чином, асимптотична формула є вірною для $q << x^{\frac{1}{a+b}}$.

1. *Krätzel E.* Teilerprobleme in drei Dimensionen // Math. Nachr. – 1969. – **42**. – S. 275 – 288.
2. *Schierwagen A.* Über ein Teilerprobleme // Ibid. – 1976. – **72**. – S. 151 – 168.
3. *Hooly C.* An asymptotic formula in the theory of numbers // Proc. London Math. Soc. – 1957. – **7**, № 3. – P. 396 – 413.
4. *Heath-Brown D. R.* The fourth power moment of the Riemann zeta-function // Ibid. – 1979. – **38**, № 3. – P. 385 – 422.
5. *Voronoi G.* Sur un probléme du calcul des functions asymptotiques // J. reine und angew. Math. – 1903. – **126**. – S. 241 – 282.
6. *Voronoi G.* Sur une function transendante et ses application á la sommation de quelques séeries // Ann. sci. Ecole norm. supér. – 1904. – **21**, № 3. – P. 207 – 268; 459 – 534.
7. *Phillips E.* The zeta function of Riemann: Further developments of Van der Corput's metod // Quart. J. Math. – 1993. – **4**. – P. 209 – 225.
8. *Hafner J. L.* New omega results in a weighted divisors problem // J. Number Theory. – 1988. – **28**. – P. 240 – 257.
9. *Vogts M.* Teilerprobleme in drei Dimensionen // Math. Nachr. – 1981. – **101**. – P. 243 – 256.

Одержано 24.03.97,
після доопрацювання — 14.07.98