УДК 517.938

О. Ю. Романенко, О. М. Шарковський (Ін-т математики НАН України, Київ)

ДИНАМІКА РОЗВ'ЯЗКІВ НАЙПРОСТІШИХ НЕЛІНІЙНИХ ГРАНИЧНИХ ЗАДАЧ *

We investigate two classes of essentially nonlinear boundary-value problems by using methods of the theory of dynamical systems and two special metrics. We show that, for boundary-value problems of both these classes, all the solutions tend (in the first metrics) to upper semicontinuous functions and, under sufficiently general conditions, the asymptotic behavior of almost every solution can be described (by using the second metrics) by a certain stochastic process.

Методами теорії динамічних систем досліджуються два класи істотно нелінійних граничних задач. При цьому використовуються дві спеціальні метрики. Показано, що для граничних задач з обох цих класів всі розв'язки прямують (у першій метриці) до напівнеперервних зверху функцій, а при досить загальних умовах асимптотична поведінка майже кожного розв'язку описується (за допомогою другої метрики) деяким стохастичним процесом.

В цій роботі ми формулюємо ряд тверджень для нелінійної граничної задачі, що складається з лінійного рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial x} + bu, \quad x \in [0,1], \quad t \in R^+, \quad a > 0, \tag{1}$$

і нелокальних нелінійних граничних умов

$$u\big|_{x=1} = f(u)\big|_{x=0}, \tag{2}$$

або

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=1} = h(u)\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x=0}, \tag{3}$$

де $f \in C^1(R, R)$, $h \in C^0(R, R)$ — задані функції і $u \in C^1([0, 1] \times R^+, R)$ — невідома функція.

Через нелінійність граничних умов ці, на перший погляд, зовсім прості, одновимірні задачі демонструють розв'язки з складною динамікою. В цьому зв'язку відмітимо роботи $[1-11]$, в яких розглянуто близькі одно- та двовимірні граничні задачі. Відмітною і давно відомою особливістю всіх цих задач є можливість їх редукції до різницевих або близьких до різницевих рівнянь (див. [1]), ефективне дослідження яких стало можливим лише останнім часом завдяки розвитку теорії одновимірних динамічних систем.

Параметр a в (1) завжди можна заміною змінних зробити рівним 1: поклавши $v(x, \theta) = u(x, \theta/a)$, $\theta = at$, одержимо для $v(x, \theta)$ граничні задачі вигляду (1), (2) та (1), (3) з тією лише різницею, що коефіцієнт при $\partial v/\partial x$ дорівнюватиме 1, а при v — b/a. Таким чином, в (1) суттєвим залишається тільки параметр b. Тому в подальшому вважатимемо a фіксованим і розглянемо поведінку розв'язків задач (1), (2) і (1), (3) в залежності від параметра b та початкової умови

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in [0, 1], \quad \varphi \in C^1([0, 1], R). \tag{4}$$

Серед розв'язків обох цих задач одразу ж виділимо ті, що не залежать від t — це функції вигляду $u(x, t) = \gamma e^{-bx/a}$ (γ — стала). Будемо називати ці розв'язки та відповідні їм початкові функції *тривіальними*. Для задачі (1), (2) допустимі значення γ знаходяться як корені рівняння $\gamma = e^{b/a} f(\gamma)$; у загальному випадку ця задача може мати лише скінченну кількість тривіальних розв'язків. Задача (1), (3), на відміну від задачі (1), (2), завжди має однопараметричну сім'ю таких розв'язків: γ може набувати будь-якого значення з R.

Розв'язок $u(x, t)$ будемо називати *асимптотично тривіальним*, якщо при

*Частково підтримана INTAS (проект 96-0700).

$t \to \infty$ він прямує до деякого тривіального розв'язку.

I. Задача (1), (2). 1. ***Редукція до різницевого рівняння.*** Розглянемо спочатку задачу (1), (2). Кожна початкова умова (4), як свідчить метод характеристик, визначає єдиний розв'язок (який позначимо u_φ) тоді і тільки тоді, коли

$$\varphi(1) = f(\varphi(0)) \quad \text{і} \quad \varphi'(1) = f'(\varphi(0))\,\varphi'(0). \tag{5}$$

Позначимо через Φ множину початкових функцій $\varphi \in C^1([0,1], R)$, що задовольняють умови (5).

З'ясуємо, яким чином u_φ залежить від φ. В класі C^1 загальний розв'язок рівняння (1) має вигляд

$$u(x,t) = e^{-\frac{b}{a}x} w(x + at), \tag{6}$$

де w — довільна C^1-функція. З граничної умови (2) випливає

$$w(\tau + 1) = \lambda f(w(\tau)), \quad \tau \in R^+, \quad \lambda = e^{b/a}. \tag{7}$$

Тоді з (6), (7) і (4) одержуємо

$$u_\varphi(x,t) = e^{-\frac{b}{a}x} w_\varphi(x + at), \tag{8}$$

де w_φ — розв'язок різницевого рівняння (7), що задовольняє (початкову) умову

$$w_\varphi(\tau) = \tilde{\varphi}(\tau) \ \text{ при } \tau \in [0,1], \quad \text{де } \tilde{\varphi}(\tau) = \lambda^\tau \varphi(\tau). \tag{9}$$

Таким чином, поведінка розв'язків задачі (1), (2) визначається одновимірним відображенням

$$f_b\colon w \mapsto \lambda(b) f(w), \quad \lambda(b) = e^{b/a}, \tag{10}$$

яке природно назвати *резольвентним відображенням* для задачі (1), (2). Зокрема:

а) розв'язок u_φ можна записати у вигляді

$$u_\varphi(x,t) = e^{-\frac{b}{a}x} (f_b^n \circ \tilde{\varphi})(x + at - n) \ \text{ при } \ n \le x + at < n+1, \ n = 0, 1, \ldots, \tag{11}$$

де через f^n позначено n-ту ітерацію функції f (тобто $f^0(w) = w$, $f^n = f \circ f^{n-1}$, $n = 1, 2, \ldots$);

б) задача (1), (2) має обмежені розв'язки, відмінні від тривіальних, тоді і тільки тоді, коли відображення f_b має обмежені інваріантні інтервали: якщо при всіх $\tau \in [0,1]$ функція $\tilde{\varphi}(\tau)$ набуває значень, що належать одному з таких інваріантних інтервалів, то відповідний розв'язок u_φ є обмеженим, а саме, значення u_φ належать цьому інтервалу; якщо ж при деякому $\tau' \in [0,1]$ значення $\tilde{\varphi}(\tau')$ не належить жодному з обмежених інваріантних інтервалів, то розв'язок u_φ є необмеженим.

2. ***Властивості резольвентного відображення. Первинний аналіз розв'язків.*** Заради спрощення формулювань накладемо на функцію f такі обмеження:

$$f \in C^3\text{-}\textit{функцією з } f'' < 0 \textit{ і від'ємним шварціаном } S_f = f'''/f' - 3/2(f''/f')^2, \tag{12}$$

$$f(0) = f(1) = 0. \tag{13}$$

З цього випливає, що, по-перше, f є унімодальною функцією, тобто існує лише одна точка, наприклад w_*, в якій f має скінченний екстремум, і, по-друге, $w_* \in (0,1)$ і функція f в точці w_* досягає максимуму.

Оскільки резольвентне відображення (10), яке визначає поведінку розв'язків задачі (1), (2), залежить (мультиплікативно) від параметра $\lambda(b)$, нам будуть потрібні деякі факти щодо одновимірних динамічних систем, що задаються відображенням

$$f_{(\lambda)}:\ w \mapsto \lambda f(w), \quad \lambda > 0. \tag{14}$$

За умов (12), (13) типовим представником класу (14) є сім'я квадратичних відображень $w \mapsto \lambda w(1-w)$. При зміні параметра λ від 0 до ∞ відображення $f_{(\lambda)}$ „перебігає" всі типи динамічної поведінки, що тільки можливі для квадратичних відображень (а ці останні, як відомо, можуть бути як зовсім простими — подібними до лінійних, так і у певному сенсі такими ж складними, якими можуть бути динамічні системи на довільних локально компактних просторах). Зокрема, існують біфуркаційні значення $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_\infty < \lambda_*$, які є, відповідно,

найбільшим λ, при якому (14) ще не має нерухомих точок на $(0, 1]$;

найбільшим λ, при якому (14) ще не має циклів періоду 2;

найменьшим λ, при якому (14) має цикли як завгодно великого періоду (в цьому випадку (14) має цикли періодів 2^i, $i = 0, 1, \ldots$, і тільки);

найбільшим λ, при якому (14) відображає $[0, 1]$ в себе.

Неважко бачити, що:

λ_1 знаходиться з умови $f'_{(\lambda_1)}(0) = 1$ (мультиплікатор відображення $f_{(\lambda_1)}$ у нерухомій точці $w = 0$ дорівнює 1), тобто $\lambda_1 = 1/f'(0)$;

λ_2 знаходиться з умов $f'_{(\lambda_2)}(w) = -1$, $f_{(\lambda_2)}(w) = w$ (мультиплікатор відображення $f_{(\lambda_2)}$ у ненульовій нерухомій точці дорівнює -1);

λ_∞ знаходиться наближено чисельним способом, виходячи з умови: $f_{(\lambda_\infty)}$ має лише цикли періодів 2^i, $i = 0, 1, \ldots$;

λ_* визначається умовою $f_{(\lambda_*)}(w_*) = 1$, тобто $\lambda_* = 1/f(w_*)$.

Динамічна система, що задається відображенням (14), має, зокрема, такі властивості:

при будь-якому $\lambda \neq \lambda_1$ відображення $f_{(\lambda)}$ має дві нерухомі точки, одна з яких $w = 0$, а друга — ненульовий розв'язок рівняння $\lambda f(w) = w$; при $\lambda = \lambda_1$ $f_{(\lambda)}$ має лише одну (напівпритягуючу) нерухому точку $w = 0$;

при $\lambda > \lambda_*$ відображення $f_{(\lambda)}$ не має обмежених інваріантних інтервалів і траєкторії $f^n_{(\lambda)}(w)$ всіх точок $w \in R$, за винятком деякої канторової множини $\mathcal{K}(\lambda)$ міри нуль (що належить $[0, 1]$), прямують до $-\infty$;

при $\lambda \leq \lambda_*$ відображення $f_{(\lambda)}$ має обмежений інваріантний інтервал $I_{(\lambda)}$, кінцями якого є відштовхуюча нерухома точка та її прообраз (при $\lambda_1 \leq \lambda < \lambda_*$ $I_{(\lambda)} = [0, 1]$); довжина $I_{(\lambda)}$ прямує до ∞ при $\lambda \to 0$;

при $\lambda \leq \lambda_2$ поведінка траєкторій зовсім проста, а саме: $f^n_{(\lambda)}(w)$ прямує до притягуючої нерухомої точки, коли $w \in \operatorname{int} I_{(\lambda)}$, і прямує до $-\infty$, коли $w \notin I_{(\lambda)}$.

Отже, усі складності у динаміці траєкторій $f^n_{(\lambda)}(w)$ зустрічаються лише при $\lambda \in (\lambda_2, \lambda_*]$ і лише на інтервалі $[0, 1]$.

Повертаючись до задачі (1), (2), можемо констатувати, що за обмеженість розв'язків головним чином „відповідає" параметр b. Покладемо $I_b = I_{(\lambda(b))}$.

При будь-якому b задача (1), (2) має (взагалі кажучи, два) тривіальні розв'язки $u^0(x,t) = 0$ і $\hat{u}(x,t) = \gamma e^{-bx/a}$, що відповідають нерухомим точкам $w = 0$ і $w = \gamma$ відображення I_b.

При $b \leq a \ln \lambda_2$ розв'язок u_φ граничної задачі (1), (2) є обмеженим, якщо і тільки якщо $\tilde{\varphi}(x) \in I_b$ при $x \in [0, 1]$. При цьому якщо $\tilde{\varphi}(x) \in \operatorname{int} I_b$, то u_φ є асимптотично тривіальним: $u_\varphi(x,t)$ рівномірно прямує при $t\to\infty$ до одного з тривіальних розв'язків (а саме, до $u^0(x,t)=0$, коли $b\le a\ln\lambda_1$, і до $\hat{u}(x,t)$, коли $b\in(a\ln\lambda_1, a\ln\lambda_2])$ і, таким чином, $u_\varphi(x,t)$ є асимптотично стійким.

Оскільки розв'язки задачі (1), (2) є неперервними функціями, при $b>a\ln\lambda_*$ обмеженими будуть тільки (два) тривіальні розв'язки.

Отже, одержуємо критерій обмеженості розв'язків задачі (1), (2). Нехай

$$\mathcal{B}(f)=(a\ln\lambda_2, a\ln\lambda_*] \quad \text{і} \quad \Phi(b)=\left\{\varphi\in\Phi:\ 0\le\varphi(x)\le e^{-bx/a} \ \text{при}\ x\in[0,1]\right\}.$$

Теорема 1 *(про обмеженість розв'язків).*

1. *Гранична задача* (1), (2) *має обмежені розв'язки, відмінні від тривіальних, тоді і тільки тоді, коли* $b\le a\ln\lambda_*$.

2. *При* $b\in\mathcal{B}(f)$ *розв'язок* u_φ *є обмеженим тоді і тільки тоді, коли* $\varphi\in\in\Phi(b)$.

Таким чином, якщо $b\in\mathcal{B}(f)$, то

$$\operatorname{diam}\Phi(b)=\sup_{\varphi_1,\varphi_2\in\Phi(b)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{C^0}=L_b=\begin{cases}1 & \text{при}\ b\ge0;\\ e^{-b/a} & \text{при}\ b<0,\end{cases}$$

а розв'язки u_φ з $\varphi\in\Phi(b)$ обмежені у сукупності константою L_b, а саме,

$$0\le u_\varphi(x,t)\le L_b \ \text{при всіх}\ (x,t)\in[0,1]\times R^+ \ \text{для будь-якого}\ \varphi\in\Phi(b).$$

Зауваження. **1.** Теорема 1 залишається вірною, якщо в (5) відмовитись від другої умови (тобто не вимагати від розв'язків C^1-гладкості всюди в $[0,1]\times\times R^+$).

2. Якщо ж відмовитись від першої з умов (5) (тобто не вимагати від розв'язків неперервності всюди в $[0,1]\times R^+$), то задача (1), (2) матиме обмежені нетривіальні розв'язки і при $b>a\ln\lambda_*$; це будуть розв'язки, що породжуються початковими функціями $\varphi(x)=ce^{-bx/a}$, де $c\in\mathcal{K}(\lambda)$, $\lambda=e^{b/a}$.

В подальшому розглянемо асимптотичну поведінку обмежених розв'язків задачі (1), (2) при $b\in\mathcal{B}(f)$. Для цього спочатку опишемо поведінку траєкторій відображення $f_{(\lambda)}$ при $\lambda\in(\lambda_2,\lambda_*]$. Покладемо

$$\Lambda(f)=(\lambda_2,\lambda_*] \quad \text{і} \quad \Lambda_\infty(f)=(\lambda_\infty,\lambda_*].$$

В інтервалі $\Lambda(f)$ існує відкрита щільна підмножина Λ_{atr} ($\Lambda_{atr}\supset(\lambda_2,\lambda_\infty)$) така, що при $\lambda\in\Lambda_{atr}$ відображення $f_{(\lambda)}$ має притягуючий цикл періоду ≥2, в результаті чого

при $\lambda\in\Lambda_{atr}$ майже кожна обмежена траєкторія $f^n_{(\lambda)}(w)$ є асимптотично періодичною (з періодом ≥2).

В інтервалі $\Lambda_\infty(f)$ існують підмножини Λ_{itc} та $\Lambda_{acim}\subset\Lambda_{itc}$ додатної міри, першу з яких складають значення λ, за яких $f_{(\lambda)}$ має цикл інтервалів (тобто існують, наприклад, p інтервалів $J_1, J_2, \ldots, J_p$, що не мають спільних внутрішніх точок і під дією $f_{(\lambda)}$ переходять один у другий), на якому є всюди щільна траєкторія, а другу — ті значення λ, за яких $f_{(\lambda)}$ має гладку (тобто абсолютно неперервну відносно міри Лебега) інваріантну міру [12]. Як наслідок,

при $\lambda\in\Lambda_{itc}$ майже кожна обмежена траєкторія є всюди щільною на деякому циклі інтервалів; коли, до того ж, $\lambda\in\Lambda_{acim}$, то її асимптотичну поведінку можна охарактеризувати за допомогою ймовірнісного підходу завдяки існуванню гладкої інваріантної міри;

топологічна ентропія динамічної системи, що задається відображенням $f_{(\lambda)}$, є додатною тоді і тільки тоді, коли $\lambda \in \Lambda_\infty$; так само фрактальний вимір замикання множини точок, траєкторії яких нестійкі за Ляпуновим, є додатним тоді і тільки тоді, коли $\lambda \in \Lambda_\infty$ (під фрактальним тут і надалі розуміється так званий box counting вимір (див., наприклад, [13])).

Використання цих властивостей відображення (14) дозволяє досить повно дослідити асимптотичну поведінку обмежених розв'язків задачі (1), (2), зокрема найпростіші висновки можемо зробити вже зараз.

Якщо $b \in \mathcal{B}(f)$ (тобто $\lambda(b) \in \Lambda(f)$), то всі обмежені нетривіальні розв'язки (їх початкові функції належать $\Phi(b)$) коливаються при $t \to \infty$ з неспадаючою до нуля амплітудою; при цьому всі ці розв'язки, а також обидва тривіальні розв'язки є нестійкими за Ляпуновим як в C^1-, так і в C^0-метриках (разом з тим у метриках ρ^Δ і $\rho^\#$, які ми будемо використовувати нижче, майже всі обмежені розв'язки будуть стійкими, а тривіальні розв'язки залишаються нестійкими).

3. ***Динамічні системи, що породжуються граничними задачами. Метрики.*** Один з методів дослідження граничних задач полягає в переході до динамічних систем, які породжуються цими задачами на просторі початкових функцій. Цей метод виявляється дуже ефективним для задач, що зводяться до різницевих та близьких до них рівнянь (див. огляд [9]).

Задача (1), (2) індукує нескінченновимірну динамічну систему

$$\left\{\Phi(b),\ R^+,\ S^t\right\}, \tag{15}$$

де S^t — оператор зсуву вздовж розв'язків, тобто $S^t[\varphi](x) = u_\varphi(x, t)$.

Оскільки $u_\varphi(x, t)$ можна записати у формі (11), то $S^t[\varphi](x)$ має вигляд

$$S^t[\varphi](x) = e^{-\frac{b}{a}x}\left(f_b^{[x+at]} \circ \tilde{\varphi}\right)(\{x + at\}), \tag{16}$$

де $[\cdot]$ і $\{\cdot\}$ у правій частині (16) позначають відповідно цілу та дробову частини числа.

Відповідність між розв'язками задачі (1), (2) і траєкторіями системи (15) цілком очевидна: нехай $b \in \mathcal{B}(f)$, тоді

кожному розв'язку $u(x, t)$ граничної задачі (1), (2) такому, що $u(x, 0)$ належить $\Phi(b)$, відповідає траєкторія $S^t[\varphi]$ динамічної системи (15), що починається у „точці" $\varphi(x) = u(x, 0)$;

кожній траєкторії $S^t[\varphi]$ динамічної системи (15) відповідає розв'язок граничної задачі (1), (2), який задовольняє початкову умову $u(x, 0) = \varphi(x)$.

Таким чином, питання про асимптотичну поведінку обмежених розв'язків граничної задачі (1), (2) зводиться до питання, якими є ω-граничні множини траєкторій динамічної системи (15). Простір $\Phi(b)$, наділений *a priori* C^1-метрикою, не є компактним. Тому можливо, що для деяких або навіть для майже всіх $\varphi \in \Phi(b)$ відповідні траєкторії $S^t[\varphi]$ також не будуть компактними. Як наслідок, їх ω-граничні множини будуть або порожніми, або ж не повністю характеризуватимуть асимптотичну поведінку $S^t[\varphi]$. Саме таку ситуацію ми і маємо для динамічної системи (15). Тому виникає необхідність поповнити фазовий простір $\Phi(b)$ за допомогою такої метрики, щоб у новому просторі траєкторії системи (15) були компактними.

Для реалізації цього підходу ми використаємо дві метрики [1–3], які позначимо через ρ^Δ і $\rho^\#$. Перша з них дозволяє поповнити $\Phi(b)$ напівнеперервними зверху, а друга — випадковими функціями.

Метрика ρ^Δ визначається на просторі напівнеперервних зверху (взагалі ка жучи, багатозначних) функцій $\zeta : [0, 1] \to 2^I$ (I — обмежений замкнений інтервал) таким чином:

$$\rho^{\Delta}(\zeta_1, \zeta_2) = \Delta(\operatorname{gr}\zeta_1, \operatorname{gr}\zeta_2), \tag{17}$$

де через $\operatorname{gr}\zeta$ позначено графік функції ζ, а через $\Delta(\cdot, \cdot)$ — хаусдорфову відстань між множинами.

Метрика $\rho^{\#}$ задається формулою

$$\rho^{\#}(\xi_1, \xi_2) =$$

$$= \sup_{\varepsilon>0} \min\left\{\varepsilon, \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2\operatorname{mes} I)^r} \sup_{(x_1,\ldots,x_r)\in[0,1]^r} \int_{I^r} \left|F^{\varepsilon}_{\xi_1}(x_1,\ldots,z_r) - F^{\varepsilon}_{\xi_2}(x_1,\ldots,z_r)\right| dz_1\ldots dz_r\right\}, \tag{18}$$

де

$$F^{\varepsilon}_{\xi}(x_1,\ldots,x_r; z_1,\ldots,z_r) = \frac{1}{\operatorname{mes} V_{\varepsilon}(x_1,\ldots,x_r)} \int_{V_{\varepsilon}(x_1,\ldots,x_r)} F_{\xi}(y_1,\ldots,y_r; z_1,\ldots,z_r)\, dy_1\ldots dy_r,$$

$V_{\varepsilon}(x_1,\ldots,x_r)$ — ε-окіл точки $(x_1, \ldots, x_r) \in [0, 1]^r$, $r = 1, 2, \ldots$, $F_{\xi}(x_1, \ldots, x_r; z_1, \ldots, z_r)$ — r-вимірний розподіл функції $\xi : [0, 1] \to I$.

Метрику $\rho^{\#}$ сконструйовано таким чином, що вона оцінює відстань між двома функціями через різницю між усіма їх скінченновимірними розподілами, локально усередненими. Це дозволяє застосовувати $\rho^{\#}$ як до детермінованих, так і до випадкових функцій. Метрика $\rho^{\#}$ коректно визначена на множині функцій ξ, для яких

$$F^{\varepsilon}_{\xi}(x_1,\ldots,x_r; z_1,\ldots,z_r) \to F_{\xi}(x_1, \ldots, x_r; z_1, \ldots, z_r) \quad \text{при } \varepsilon \to 0 \tag{19}$$

для всіх $(x_1, \ldots, x_r, z_1, \ldots, z_r) \in [0, 1]^r \times I^r$, за винятком множини міри нуль.

4. ***Типова асимптотична поведінка обмежених розв'язків.*** Дослідимо ω-граничні множини $\omega_b[\varphi]$ траєкторій динамічної системи (15) у просторах, одержаних поповненням $\Phi(b)$ за допомогою метрик ρ^{Δ} і $\rho^{\#}$.

Заради спрощення викладу обмежимося початковими функціями $\varphi \in \Phi(b)$ такими, що

$$\textit{функція } \tilde{\varphi}(x) = e^{\frac{b}{a}x}\varphi(x) \textit{ тотожно відмінна від константи на будь-якому відкритому підінтервалі з } [0, 1]. \tag{20}$$

Множину цих функцій позначимо через $\Phi_*(b)$. Зрозуміло, що $\Phi_*(b)$ є всюди щільною (в C^1-топології) у $\Phi(b)$. Нам будуть також потрібні такі множини:

$$\mathcal{B}'_d(f) = \{b : \lambda(b) \in \Lambda_{atr}\}, \quad \mathcal{B}''_d(f) = \{b : \lambda(b) \in \Lambda_{itc}\}, \quad \mathcal{B}_d(f) = \mathcal{B}'_d(f) \cup \mathcal{B}''_d(f),$$
$$\mathcal{B}_r(f) = \{b : \lambda(b) \in \Lambda_{acim}\}.$$

Зауважимо, що всі ці можини мають додатну міру, причому $\mathcal{B}_d(f)$ є в $\mathcal{B}(f)$ множиною повної міри зі щільною серединою, $\mathcal{B}_r(f) \subset \mathcal{B}''_d(f)$ і $\operatorname{int} \mathcal{B}''_d(f) = \varnothing$.

Спочатку розглянемо, що дає поповнення в метриці ρ^{Δ}. Простір $\Phi^{\Delta}(b)$, одержаний поповненням простору $\Phi(b)$ напівнеперервними зверху функціями з $[0, 1]$ в $2^{[0, L_b]}$ за допомогою метрики ρ^{Δ}, є компактним і, отже, кожна траєкторія системи (15) має непорожню компактну ω-граничну множину в $\Phi^{\Delta}(b)$. Динамічна система (15) індукує на $\Phi^{\Delta}(b)$ за неперервністю динамічну систему

$\left\{\Phi^{\Delta}(b),\ R^{+},\ S^{t}\right\}$, де $S^{t}[\zeta](x) = e^{-\frac{b}{a}x}\left(f_b^{[x+at]} \circ \tilde{\zeta}\right)(\{x + at\})$ і $\tilde{\zeta}(\tau) = e^{\frac{b}{a}\tau}\zeta(\tau)$, (21)

яка задає рух на ω-граничних множинах вихідної системи (15).

Теорема 2 ***(про асимптотичну періодичність і стійкість розв'язків).*** *Нехай $b \in \mathcal{B}_d(f)$ і $\varphi \in \Phi_*(b)$. Тоді існує ціле $p = p(b) \geq 1$ таке, що ω-гранична множина $\omega_b[\varphi]$ траєкторії $S^t[\varphi]$ динамічної системи (15) складається з напівнеперервних зверху функцій, що утворюють у $\Phi^{\Delta}(b)$ цикл періоду p / a розширеної системи* (21); *для майже кожної (в C^1-топології) $\varphi \in \Phi_*(b)$ цей цикл є стійким (в ρ^{Δ}-метриці).*

Зауважимо, що при $p = 1$ ω-гранична множина $\omega_b[\varphi]$, як цикл розширеної системи (21), вироджується у нерухому точку (спільну для всіх $\varphi \in \Phi_*(b)$), якщо тільки $\varphi(x)$ відмінна від 0 і 1 при всіх $x \in [0, 1]$.

Теорема 3 ***(про асимптотичну поведінку розв'язків).*** *Нехай $b \in \mathcal{B}_d(f)$ і $\varphi \in \Phi_*(b)$. Напівнеперервні зверху функції $\zeta_t(x)$, $t \in [0, p / a)$, що складають множину $\omega_b[\varphi]$ у просторі $\Phi^{\Delta}(b)$ (якщо $p = 1$, то всі $\zeta_t(x)$ можуть співпадати), мають такі властивості:*

1) *при $b \in \mathcal{B}_d'$ кожна функція $\zeta_t \in \omega[\varphi]$ є однозначною (а отже, і неперервною) на відкритій щільній в $[0, 1]$ множині*

$$D_t(\varphi) = \{x \in [0, 1] : \text{точка } w = \tilde{\varphi}(\{x + at\}) \text{ є стійкою при відображенні } f_b\},$$

і на кожному підінтервалі з $D_t(\varphi)$ функція $\zeta_t(x)$ дорівнює одній із функцій $\gamma_i e^{-bx/a}$, $i = 1, 2, \ldots, p$, де $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p\}$ — притягуючий цикл відображення f_b (при цьому $p \geq 2$);

2) *при $b \in \mathcal{B}_d''$ значення кожної функції $\zeta_t \in \omega[\varphi]$ в кожній точці $x \in [0, 1]$ є нетривіальним замкненим інтервалом; при цьому $[0, 1]$ розпадається на ніде не щільну множину і зчисленну кількість інтервалів, у будь-якій точці кожного з яких значення $\zeta_t(x)$ збігається з одним із інтервалів $[\gamma_i' e^{-bx/a}, \gamma_i'' e^{-bx/a}]$, $i = 1, 2, \ldots, p$, де $[\gamma_i', \gamma_i'']$, $i = 1, 2, \ldots, p$, в сукупності складають цикл інтервалів відображення f_b (при цьому $p \geq 1$).*

Таким чином, майже всі нетривіальні обмежені розв'язки u_φ майже кожної граничної задачі (1), (2) з $b \in \mathcal{B}(f)$ є асимптотично періодичними по t (з одним і тим же періодом), а саме,

$$\rho^{\Delta}\left(u_\varphi(x, T),\ P_\varphi(x, T)\right) \to 0 \quad \text{при} \quad T \to \infty, \tag{22}$$

де $P_\varphi(x, t)$ — p / a-періодична по t функція, що задається формулою

$$P_\varphi(x, t) = \xi_{t \bmod (p/a)}(x) \quad \text{і} \quad \zeta_t \in \omega_b[\varphi], \quad \text{коли} \quad t \in [0, p / a). \tag{23}$$

При цьому з розв'язком раніше чи пізніше відбувається *градієнтна катастрофа*: для будь-якого $K > 0$ існує $t_* = t_*(\varphi, K) > 0$ таке, що при $t > t_*$ в області $[0, 1] \times [t, t + p / a]$ знайдуться характеристики — прямі вигляду $x + at = \text{const}$, вздовж яких модуль градієнта розв'язку u_φ стає більшим за K. До того ж для кожного (нетривіального) розв'язку u_φ кількість таких характеристик необмежено зростає при $t \to \infty$ і, отже, поведінка цього C^1-гладкого розв'язку набуває з часом хаотичного характеру. Зокрема, якщо для деякого $\varphi \in \Phi$ значення функції $\zeta_t \in \omega_b[\varphi]$ є нетривіальним інтервалом у кожній точці $x \in [0, 1]$, то відповідний розв'язок u_φ веде себе вкрай нерегулярно і його значення неможливо достовірно обчислити при великих t. Для опису таких розв'язків доцільно використати метрику $\rho^\#$.

Нехай $\Phi^\#(b)$ є поповненням фазового простору $\Phi(b)$ за допомогою метрики $\rho^\#$ детермінованими та випадковими функціями з $[0, 1]$ в $[0, L_b]$. Простір $\Phi^\#$ є некомпактним. Проте виявляється, що за деяких відносно загальних умов для динамічної системи (15) існує досить масивна підмножина функцій $\varphi \in \in \Phi(b)$ така, що, по-перше, траєкторії $S^t[\varphi]$, некомпактні у $\Phi(b)$, є компактними у $\Phi^\#(b)$ і, отже, мають в $\Phi^\#(b)$ непорожні компактні ω-граничні множини і, по-друге, ці ω-граничні множини складаються з випадкових функцій.

Динамічна система (15), оскільки вона є рівномірно неперервною в метриці $\rho^\#$, індукує динамічну систему на $\Phi^\#(b)$, а саме,

$$\left\{\Phi^\#(b),\ R^+,\ S^t\right\},\ \text{де}\ S^t[\xi](x) = e^{-\frac{b}{a}x}\left(f_b^{[x+at]}\circ\tilde{\xi}\right)(\{x+at\})\ \text{ і }\ \tilde{\xi}(\tau) = e^{\frac{b}{a}\tau}\xi(\tau). \quad (24)$$

Для детермінованої функції g та випадкової функції ξ під суперпозиціями $g\circ\xi$ та $\xi\circ g$ ми розуміємо випадкові функції, що задаються, відповідно, усіма своїми скінченновимірними розподілами

$$F_{g\circ\xi}(x_1,\ldots,x_r; z_1,\ldots,z_r) = \int\limits_{g^{-1}((-\infty,\, z_1))}\cdots\int\limits_{g^{-1}((-\infty,\, z_r))}\frac{\partial^r F_\xi(x_1,\ldots,x_r; y_1,\ldots,y_r)}{\partial y_1\ldots\partial y_r}dy_1\ldots dy_r$$

та

$$F_{\xi\circ g}(x_1,\ldots,x_r; z_1,\ldots,z_r) = F_\xi(g(x_1),\ldots,g(x_r);\, z_1,\ldots,z_r), \quad r = 1, 2, \ldots .$$

Теорема 4 (***про ймовірнісний опис розв'язків***). *Нехай $b \in \mathcal{B}_r(f)$ і $\varphi \in \in \Phi_*(b)$ є несингулярною (відносно міри Лебега) функцією. Тоді:*

1) *існує ціле $p = p(b) \ge 1$ таке, що ω-гранична множина $\omega_b[\varphi]$ траєкторії $S^t[\varphi]$ динамічної системи* (15) *складається з випадкових функцій, що утворюють у $\Phi^\#(b)$ цикл періоду p/a розширеної системи* (24); *для майже кожної (в C^1-топології) $\varphi \in \Phi_*(b)$ цей цикл є стійким (в $\rho^\#$-метриці);*

2) *множина $\omega_b[\varphi]$ складається з випадкових функцій $\zeta_t(x) = S^t[\zeta_0](x)$, $t \in \in [0, p/a)$ (якщо $p = 1$, то всі ζ_t можуть збігатися), де*

$$\xi_0(x) = e^{-\frac{b}{a}x} f_b^\#\left(e^{\frac{b}{a}x}\varphi(x)\right), \quad (25)$$

$f_b^\#$ — чисто випадковий процес з функцією розподілу

$$F_{f_b^\#}(w; z) = p\cdot \mathrm{ms}(J_i \cap (-\infty, z)) \ \text{ при } \ w \in \bigcup_{j\ge 0}\operatorname{int} f_b^{-jp}(J_i),\ 1 \le i \le p, \quad (26)$$

ms — (гладка) інваріантна міра відображення f_b, а $\{J_1, J_2, \ldots, J_p\}$ — цикл інтервалів відображення f_b (який є носієм міри ms).

Як і у просторі $\Phi^\Delta(b)$, при $p = 1$ множина $\omega_b[\varphi]$, як цикл розширеної системи (24), вироджується у нерухому точку (спільну для всіх $\varphi \in \Phi_*(b)$), якщо $\varphi(x) \in (0, 1)$ при всіх x.

Ситуація, коли детермінована динамічна система має траєкторії, ω-граничні множини яких складаються з випадкових функцій, одержала назву *автостохастичності* [2, 3], а самі такі траєкторії — автостохастичних траєкторій. З теореми 4 випливає, що якщо для системи (15) має місце автостохастичність, то майже всі її траєкторії є автостохастичними. Для задачі (1), (3), як ми побачимо (див. теорему 11), ситуація дещо інша.

З теорем 2 і 3 випливає, що геометрія графіків функцій, які утворюють ω-граничні множини траєкторій системи (15), може бути дуже складною. Позначимо через $\mathcal{M}_b$ множину точок Місюревича відображення f_b, тобто множину точок w, кожна з яких під дією f_b за скінченне число ітерацій потрапляє в який-небудь з відштовхуючих циклів. Покладемо $b_\infty = a \ln \lambda_\infty$.

Теорема 5 (***про самоподібність та фрактальність***). *Нехай $b \in \mathcal{B}_d(f)$ і $\varphi \in \Phi_*(b)$. Тоді:*

1) *графік кожної з (напівнеперервних зверху) функцій $\zeta_t \in \omega_b[\varphi] \subset \Phi^\Delta(b)$ є самоподібним у кожній точці $x = x_*$, для якої $\tilde{\varphi}(x_*) \in \mathcal{M}_b$, точніше:*

існують окіл U точки x_* і зберігаючий орієнтацію близький до лінійного дифеоморфізм $\sigma: U \to U$ з нерухомою точкою x_* такі, що графік функції $\zeta_t(x)|_U$ (як множина у площині (x, ζ)) є інваріантним при відображенні $(x, \zeta) \mapsto$ $\mapsto (\sigma(x), \zeta\, e^{-\frac{b}{a}(\sigma(x)-x)})$;

при цьому коефіцієнт самоподібності графіка функції $\zeta_t \in \omega_b[\varphi]$ у точці $x = x_*$, тобто $\sigma'(x_*)$, дорівнює мультиплікатору (відштовхуючого) цикла, у який під дією відображення f_b потрапляє точка $w = \tilde{\varphi}(x_*)$;

2) *фрактальний вимір графіка функції $\zeta_t \in \omega_b[\varphi]$ є більшим за 1 тоді і тільки тоді, коли $b > b_\infty$.*

Теорема 6 (***про топологічну ентропію***). *Топологічна ентропія динамічної системи* (15) *(як у метриці ρ^Δ, так і у метриці $\rho^\#$) дорівнює нескінченності, якщо $b > b_\infty$, і нулю — у противному разі.*

Зауважимо, що дослідження випадку $b = b_\infty$ належить С. Ф. Коляді.

Теорема 7 (***про залежність від параметра b***). *Для будь-якого цілого $p \geq 1$ існують множини додатної міри $B_d^{(p)} \subset \mathcal{B}_d(f)$ та $B_r^{(p)} \subset \mathcal{B}_r(f)$ такі, що*

1) *при кожному $b \in B_d^{(p)}$ і будь-якому $\varphi \in \Phi_*(b)$ ω-гранична множина $\omega_b[\varphi]$ у просторі $\Phi^\Delta(b)$ є циклом періоду p/a (який може вироджуватись у нерухому точку, коли $p = 1$); при цьому на підмножині точок $x \in [0, 1]$ повної міри амплітуда коливань кожної з (напівнеперервних зверху) функцій, що належать цій ω-граничній множині, спадає до нуля із зростанням p;*

2) *при кожному $b \in B_d^{(p)}$ і будь-якому $\varphi \in \Phi_*(b)$ ω-гранична множина $\omega_b[\varphi]$ у просторі $\Phi^\#(b)$ є циклом періоду p/a (який може вироджуватись у нерухому точку, коли $p = 1$); при цьому на підмножині точок $x \in [0, 1]$ повної міри дисперсія кожної з (випадкових) функцій, що належать цій ω-граничній множині, спадає до нуля із зростанням p.*

Зауважимо, що $B_r^{(p)} \subset B_d^{(p)}$ для будь-якого цілого $p \geq 1$.

Всі наведені теореми, завдяки редукції граничної задачі (1), (2) до різницевого рівняння (7), випливають безпосередньо із властивостей динамічних систем, що індукуються різницевими рівняннями вигляду $w(t+1) = g(w(t))$, $t \in R^+$, [1, 9, 14, 15], властивості яких, у свою чергу, визначаються динамікою відповідного одновимірного відображення g.

5. ***Універсальні властивості розв'язків.*** Деякі з теорем, наведених вище, можна суттєво уточнити, якщо використати властивості одновимірних динамічних систем, які часто називають універсальними (у тому сенсі, що вони мають місце для багатьох класів динамічних систем). Йдеться, зокрема, про так звані константи Фейгенбаума $\delta = 4{,}6992\ldots$ та $\alpha = 2{,}5029\ldots$ [16, 17]. Перша з них відповідає за швидкість, з якою відбуваються біфуркації подвоєння періоду циклів в однопараметричних сім'ях гладких відображень, а друга показує у скільки разів при подвоєннях періоду зменшується амплітуда коливань ітерацій відображення.

Послідовність, в якій з'являються цикли тих чи інших періодів, визначається таким „універсальним" порядком [7, 18]:

$$1 \prec 2 \prec 2^2 \prec 2^3 \prec \ldots \prec 5\cdot 2^2 \prec 3\cdot 2^2 \prec \ldots \prec 5\cdot 2 \prec 3\cdot 2 \prec \ldots \prec 9 \prec 7 \prec 5 \prec 3, \qquad (27)$$

а саме, якщо маємо сім'ю неперервних відображень $f_{(\lambda)}: R \to R$, що задається, наприклад, формулою (14), і через $\lambda(m)$ позначено нижню границю значень параметра λ, при яких відображення $f_{(\lambda)}$ має цикл періоду m, то $\lambda(m_1) \le \lambda(m_2)$, якщо $m_1 \prec m_2$. Для сім'ї (14) $\lambda(m_1) \ne \lambda(m_2)$, якщо $m_1 \ne m_2$, $\lambda(2^i) < \lambda_\infty$ при всіх $i \ge 0$ та $\lambda(m) < \lambda_*$ при всіх m.

Позначимо через $r(m)$ нижню границю значень параметра λ, для яких $f_{(\lambda)}$ має гладку інваріантну міру з носієм, що складається з m інтервалів (і, отже, є циклом інтервалів періоду m). Для $m \ne 2^k$ $\lambda(m) < r(m) < \lambda(m')$ при будь-якому m', якщо $m \prec m'$, а при $m = 2^k$ $\lambda(6m) < r(m) < \lambda((2l+1)m)$ для будь-якого $l > 0$ (і отже, для $r(m)$ мають місце ті ж кількісні співвідношення, що й для $\lambda(m)$). Якщо $\lambda \in (\lambda(2^n), r(2^{n-1})]$, $n \ge 1$, то відображення $f_{(\lambda)}$ має „поглинаючий" цикл інтервалів періоду 2^n, який „затягує в себе" усі траєкторії, за винятком зчисленної кількості їх (що „приклеюються" до відштовхуючих циклів періодів $1, 2, \ldots, 2^{n-1}$). При $\lambda = r(2^{n-1})$ цей цикл інтервалів якраз і є носієм гладкої міри. Позначимо його через $J(f_{(\lambda)})$. Нехай $d_n = \sup_{\lambda \in (\lambda(2^n),\, r(2^{n-1})]} d(\lambda)$, де через $d(\lambda)$ позначено довжину найдовшого з 2^n інтервалів, що складають $J(f_{(\lambda)})$. Тоді $\lim_{n\to\infty} d_n / d_{n+1} = \alpha$. Це, зокрема, означає, що кожну траєкторію відображення $f_{(\lambda)}$ (за винятком згаданих вище) можна, починаючи з деякого моменту, наблизити періодичною траєкторією періоду 2^n з точністю порядку α^{-n}.

Природно поставити питання про те, як буде змінюватись поведінка розв'язку u_φ задачі (1), (2), якщо зафіксувати початкову функцію φ і змінювати лише параметр b.

З теореми 1 випливає, що при $b \in \mathcal{B}_+(f) = [a \ln \lambda_1, a \ln \lambda_*]$ початкова функція φ може породжувати обмежений розв'язок тільки при умові, що $\varphi \in \Phi_+$, де

$$\Phi_+ = \{\varphi \in \Phi\colon \varphi(x) \ge 0 \text{ при } x \in [0,1] \text{ і } \varphi(0) \le 1\}.$$

Для кожної функції $\varphi \in \Phi_+$ існує $b_*[\varphi] = \max\{b \in R : e^{bx/a}\varphi(x) \le 1 \text{ при } x \in [0, 1]\}$. При будь-якому

$$b \in \mathcal{B}_\varphi := \mathcal{B}_+(f) \cap \{b \le b_*[\varphi]\}$$

функція φ породжує обмежений розв'язок (тобто $\varphi \in \Phi(b)$ для кожного з цих b), а при $b \in \mathcal{B}_+(f) \setminus \mathcal{B}_\varphi$ (звичайно, коли $\mathcal{B}_+(f) \setminus \mathcal{B}_\varphi \ne \varnothing$) породжує необмежений розв'язок (оскільки $\varphi \notin \Phi(b)$ при цих b).

Асимптотична поведінка розв'язків визначається резольвентним відображенням, яке залежить від параметра b (і не залежить від φ на противагу до задачі (1), (3), коли це відображення вже залежатиме від φ (див. нижче п. II)). Отже, при фіксованій функції $\varphi \in \Phi_+$ діапазон можливої поведінки розв'язку

u_φ при зміні параметра $b \in \mathcal{B}_\varphi$ визначається величиною $\lambda_*[\varphi] = e^{b_*[\varphi]/a}$, а саме тим, де на півосі $\lambda > 0$ знаходиться $\lambda_*[\varphi]$.

Нижче нам будуть потрібні такі підмножини множини натуральних чисел:

$\Xi[\varphi] = \{m:$ існує $b \in \mathcal{B}_\varphi$ таке, що f_b має притягуючий цикл періоду $m\}$;

$\Xi^\#[\varphi] = \{m:$ існує $b \in \mathcal{B}_\varphi$ таке, що f_b має гладку інваріантну міру, носієм якої є цикл інтервалів періоду $m\}$.

Відмітимо, що $\Xi[\varphi]$ дорівнює $\{m : m \prec m_*[\varphi]$, де $m_*[\varphi]$ — найбільший у сенсі впорядкування (27) з періодів циклів відображення $f_{b_*[\varphi]}\}$, якщо $\lambda_*[\varphi] \neq \lambda_\infty$, а при $\lambda_*[\varphi] = \lambda_\infty$ $\Xi[\varphi] = \{m = 2^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$; $\Xi^\#[\varphi] = \varnothing$, якщо $\lambda_*[\varphi] \leq \lambda_\infty$, а коли $\lambda_*[\varphi] \in (\lambda_\infty, \lambda_*)$ і, отже, $m_*[\varphi] = 2^{k_*}(2l_* + 1)$ з деякими цілими $k_* \geq 0$, $l_* > 0$, то $\Xi^\#[\varphi] \supset \Xi[\varphi] \setminus \{m = 2^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, k_*\} \setminus \{m = m_*\}$.

Розглянемо тепер динамічну систему (15). Нехай

$$\Phi_* = \{\varphi \in \Phi_+ : b_*[\varphi] \in \mathcal{B}_\varphi \text{ } i \text{ } \varphi(x) \not\equiv \gamma e^{\beta x/a} \text{ \textit{на будь-якому відкритому інтервалі з} } [0, 1] \text{ \textit{з будь-якими} } \gamma \in [0, 1] \text{ і } \beta \in \mathcal{B}_\varphi\}$$

(тобто φ задовольняє модифіковану умову (20)). Для кожної функції $\varphi \in \Phi_*$ позначимо через $b_m(\varphi)$ нижню границю значень параметра b, при яких ω-гранична множина $\omega_b[\varphi]$ є циклом періоду m/a у просторі $\Phi^\Delta(b)$. Відповідно, через $b_m^\#(\varphi)$ позначимо нижню границю значень параметра b, при яких ω-гранична множина $\omega_b[\varphi]$ є циклом періоду m/a у просторі $\Phi^\#(b)$ і до того ж кожна „точка" $\xi_t \in \omega_b[\varphi]$, $t \in [0, m/a)$, є чисто випадковим процесом.

З теорем 2–4 випливає, що $b_m(\varphi)$ існує, якщо $m \in \Xi[\varphi]$, і $b_m^\#(\varphi)$ існує, якщо $m \in \Xi^\#[\varphi]$ (зокрема, коли $\mathcal{B}_\varphi = \mathcal{B}_+(f)$, тобто $\varphi \in \bigcap_{b \in \mathcal{B}_+(f)} \Phi_*(b)$, обидві множини $\Xi[\varphi]$ і $\Xi^\#[\varphi]$ співпадають з множиною натуральних чисел і, отже, $b_m(\varphi)$ і $b_m^\#(\varphi)$ існують для всіх цілих $m > 0$), і тоді $b_m(\varphi)$, $b_m^\#(\varphi)$ не залежать від φ (на множині Φ_*, але не на Φ!), а саме,

$$b_m(\varphi) = a \ln \lambda(m), \quad m \in \Xi[\varphi], \quad \text{і} \quad b_m^\#(\varphi) = a \ln r(m), \quad m \in \Xi^\#[\varphi].$$

Отже, для величин $b_m(\varphi)$ та $b_m^\#(\varphi)$, які надалі позначатимемо просто b_m та $b_m^\#$, мають місце такі ж самі нерівності, що і для $\lambda(m)$ та $r(m)$ відповідно.

Теорема 8 (*a la універсальний порядок*).

i) $b_{m'} < b_{m''}$ *тоді і тільки тоді, коли* $m' \prec m''$;

ii) $b_m < b_m^\# < b_{m'}$, *якщо* $m \prec m'$ *і* $m \neq 2^k$, *та* $b_{6\cdot 2^k} < b_{2^k}^\# < b_{(2l+1)2^k}$ *при будь-якому* $l > 0$, $k = 0, 1, \ldots$.

Окрім того, для b_m та $b_m^\#$ мають місце граничні співвідношення, які є наслідком відповідних універсальних співвідношень для значень $\lambda(m)$ параметра λ відображення $f_{(\lambda)}$, що виконуються за умов (12) і (13) [16, 17, 19].

Теорема 9 (*a la Фейгенбаум*).

i) $$\lim_{n\to\infty} \frac{b_{2^n} - b_{2^{n-1}}}{b_{2^{n+1}} - b_{2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{2^n k} - b_{2^{n-1} k}}{b_{2^{n+1} k} - b_{2^n k}} = \delta \quad \textit{для будь-якого непарного } k > 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{l\to\infty} \frac{b_{2^n(2l+1)} - b_{2^n(2l+3)}}{b_{2^n(2l+3)} - b_{2^n(2l+5)}} = \delta^*, \quad \textit{де } \delta^* = 2{,}948\ldots;$$

ii) *для* $b_m^{\#}$ *мають місце такі ж самі граничні властивості, що і для* b_m.

Розривну T-періодичну по t функцію $P(x, t)$ будемо називати β-*кусково-експоненціальною*, якщо множина $[0, 1] \times [0, T]$ розпадається на скінченне число підмножин A_i, на кожній з яких $P(x, t)$ дорівнює $\gamma_i e^{\beta x}$ з деякою (своєю) константою γ_i.

Можна показати, що для кожного $\varphi \in \bigcap_{b \in \mathcal{B}(f)} \Phi_*(b)$ існує $(-b/a)$-кусково-експоненціальна функція (для якої період T та множини A_i залежать від параметра b) така, що з наближенням значень параметра b до $b_\infty = a \ln \lambda_\infty$ точність апроксимації розв'язку u_φ цією функцією зростає, а саме, при зменшенні відстані b від b_∞ у δ $(= 4{,}699\ldots)$ разів точність апроксимації збільшується у α $(= 2{,}502\ldots)$ разів (при цьому період апроксимуючої кусково-експоненціальної функції подвоюється).

II. Задача (1), (3). Розглянемо тепер задачу (1), (3). Як і у попередньому випадку, кожна початкова умова (4) визначає єдиний розв'язок u_φ задачі (1), (3). Пересвідчитись у цьому можна, застосувавши, наприклад, метод характеристик. Ми зробимо це дещо інакше — методом редукції до різницевого рівняння. Інтегруючи (3), одержуємо

$$u\big|_{x=1} = \left(f(u) + \mu\right)\big|_{x=0}, \tag{28}$$

де f — первісна функції h, а μ — константа інтегрування. З огляду на неперервність розв'язку, початковій умові (4) відповідає лише одне із співвідношень (28) — те, для якого

$$\mu = \eta[\varphi], \quad \text{де} \quad \eta[\varphi] = \varphi(1) - f(\varphi(0)). \tag{29}$$

Використовуючи зображення загального розв'язку (6) рівняння (1), одержуємо для u_φ таку ж саму формулу, що і у випадку задачі (1), (2), тобто

$$u_\varphi(x, t) = e^{-\frac{b}{a}x} w_\varphi(x + at), \tag{30}$$

де функція w_φ задовольняє початкову умову (9), але тепер, на відміну від задачі (1), (2), є розв'язком різницевого рівняння, яке залежить від φ, а саме,

$$w(\tau + 1) = \lambda\left(f(w(\tau)) + \eta[\varphi]\right), \quad \tau \in R^+, \quad \lambda = e^{b/a}. \tag{31}$$

Таким чином, кожному розв'язку u_φ відповідає „своє" резольвентне відображення

$$f_{b,\varphi} : w \mapsto \lambda\left(f(w) + \eta[\varphi]\right), \quad \text{де} \quad \lambda = \lambda(b) = e^{b/a}, \tag{32}$$

в той час, коли у попередній задачі резольвентне відображення було одне для всіх розв'язків.

З (30), (32) випливає, що

умова (4) визначає єдиний розв'язок задачі (1), (3), який можна записати у вигляді

$$u_\varphi(x, t) = e^{-\frac{b}{a}x}\left(f^n_{b,\varphi} \circ \tilde{\varphi}\right)(x + at - n) \;\text{ при }\; n \le x + at < n + 1,\; n = 0, 1, \ldots; \tag{33}$$

при цьому u_φ є C^1-гладким всюди, якщо $\varphi'(1) + \varphi(1) = \left(\varphi'(0) + \varphi(0)\right) \times \times h(\varphi(0))$, у противному разі C^1-гладкість u_φ порушується лише на зчисленній множині характеристик $x + at = m$, $m = 1, 2, \ldots$;

для обмеженості розв'язку u_φ необхідно і достатньо, щоб резольвентне відображення $f_{b,\varphi}$ мало обмежені інваріантні інтервали (можливо, і тривіальні (тобто нерухомі точки)) і область значень функції $\tilde{\varphi}(x)$ належала деякому з них (якщо цей інтервал тривіальний, то і розв'язок u_φ тривіальний).

Розглянемо асимптотичну поведінку обмежених нетривіальних розв'язків, від яких будемо вимагати C^1-гладкості всюди, за винятком, можливо, характеристик $x + at = m$, $m = 1, 2, \dots$. Заради простоти приймемо, що

$$h \in C^2\text{-}\textit{функцією з } h'(w) < 0 \textit{ та } (w - \overline{w})\, h''(w) \geq 0$$
$$\textit{для всіх } w \in R \textit{ і деякого } \overline{w} \in R. \tag{34}$$

Тоді f, первісна від h, є унімодальною функцією з від'ємним шварціаном, яка має максимум $f_{\max}$, що досягається у точці $w = w_*$, де $h(w_*) = 0$. Завжди можна прийняти $f_{\max} = 0$ (оскільки первісна визначається з точністю до константи); заради визначеності будемо також вважати $w_* > 0$.

Згідно з (33), поведінка розв'язків задачі (1), (3) визначається резольвентним відображенням (32), яке залежить від двох параметрів: $\lambda(b)$ (задається граничною задачею) та $\eta[\varphi]$ (визначається початковою умовою). Наведемо необхідні нам властивості одновимірних відображень вигляду

$$f_{(\lambda,\mu)} : w \mapsto \lambda(f(w) + \mu), \tag{35}$$

які залежать від параметрів $\lambda > 0$ і μ (до них, зокрема, належать квадратичні відображення).

Тепер „головним відповідальним" за динамічну поведінку відображення (35) доцільно вважати параметр μ. Для кожного фіксованого $\lambda > 0$ при зміні μ від $-\infty$ до $+\infty$ відображення $f_{(\lambda,\mu)}$ має властивості, аналогічні наведеним вище властивостям відображення (14). Позначимо через $\mu_1(\lambda)$, $\mu_2(\lambda)$, $\mu_\infty(\lambda)$, $\mu_*(\lambda)$, відповідно

найменше μ, при якому (35) має нерухому точку;
найбільше μ, при якому (35) не має циклів періоду 2;
найменше μ, при якому (35) має цикли як завгодно великого періоду;
найбільше μ, при якому (35) має обмежений нетривіальний інтервал.

Відомо, що

$$-\infty < \mu_1(\lambda) < \mu_2(\lambda) < \mu_\infty(\lambda) < \mu_*(\lambda) < \infty,$$
$$\lambda\mu_1(\lambda),\ \lambda\mu_2(\lambda),\ \lambda\mu_\infty(\lambda),\ \lambda\mu_*(\lambda) \to w_* \quad \text{при } \lambda \to \infty,$$
$$\mu_1(\lambda) \to -\infty, \text{ а } \mu_2(\lambda),\ \mu_\infty(\lambda),\ \mu_*(\lambda) \to +\infty \quad \text{при} \quad \lambda \to 0.$$

Неважко бачити, що при будь-якому $\mu \in [\mu_1(\lambda), \mu_*(\lambda)]$ відображення (35) має обмежений інваріантний інтервал, а саме, цим інтервалом є $I_{(\lambda,\mu)} = [\gamma_{\lambda,\mu}, \gamma'_{\lambda,\mu}]$, де $\gamma_{\lambda,\mu}$ — відштовхуюча нерухома точка відображення (35), а $\gamma'_{\lambda,\mu}$ — її прообраз (тобто відмінний від $\gamma_{\lambda,\mu}$ корінь рівняння $f_{(\lambda,\mu)}(w) = \gamma_{\lambda,\mu}$).

Зокрема, якщо h — лінійна функція, наприклад, $h(w) = -2q(w - w_*)$, $q > 0$, то

$$\mu_1(\lambda) = v - d/4, \quad \mu_2(\lambda) = v + 3d/4, \quad \mu_\infty(\lambda) = v + \beta d, \quad \mu_*(\lambda) = v + 2d,$$

де $v = w_*/\lambda$, $d = 1/\lambda^2 q$, $\beta \approx 1{,}401$, і

$$I_{(\lambda,\mu)} = [w_* - s,\ w_* + s], \quad \text{де} \quad s = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\lambda q(\lambda\mu - w_*)}}{2\lambda q}.$$

Оскільки

$$-1/4\lambda q < \lambda\mu - w_*(\lambda) < 2/\lambda q \quad \text{при} \quad \mu \in [\mu_1(\lambda), \mu_*(\lambda)],$$

то $1/2\lambda q < s < 2/\lambda q$, тобто довжина інваріантного інтервалу $I_{(\lambda,\mu)}$ знаходиться у межах від $(q\lambda)^{-1}$ до $4(q\lambda)^{-1}$, зокрема, зростає до нескінченності як

λ^{-1} при $\lambda \to 0$ і спадає до нуля як λ^{-1} при $\lambda \to \infty$.

Нехай

$$M_0(h) = \{(\lambda, \mu) : \mu_1(\lambda) \le \mu \le \mu_*(\lambda)\}, \quad M_1(h) = \{(\lambda, \mu) : \mu_1(\lambda) \le \mu \le \mu_2(\lambda)\}.$$

Динамічна система, яка породжується відображенням (35), залежно від параметрів λ, μ має такі властивості.

Якщо $(\lambda, \mu) \notin M_0(h)$, то при $\mu < \mu_1(\lambda)$ траєкторії всіх точок $w \in R$, а при $\mu > \mu_*(\lambda)$ траєкторії всіх точок $w \in R$, за винятком канторової множини міри нуль (що належить $I_{(\lambda,\mu)}$), прямують до $-\infty$.

Якщо $(\lambda, \mu) \in M_0(h)$, то кожна траєкторія $f^n_{(\lambda,\mu)}(w)$ при $w \notin I_{(\lambda,\mu)}$ прямує до $-\infty$, а при $w \in I_{(\lambda,\mu)}$ залишається на цьому інтервалі.

Якщо $(\lambda, \mu) \in M_1(h)$, то траєкторія кожної точки з $I_{(\lambda,\mu)}$ прямує до однієї з двох нерухомих точок відображення $f_{(\lambda,\mu)}$, причому ті траєкторії, що починаються в $\operatorname{int} I_{(\lambda,\mu)}$, прямують до притягуючої нерухомої точки.

Повертаючись до задачі (1), (2), можемо зробити, виходячи з залежності розв'язків від $f_{b,\varphi}$ і наведених вище властивостей відображення (35), такі висновки. Покладемо $I_{b,\varphi} = I_{(\lambda(b),\, \eta[\varphi])}$ і

$$\Omega_0(h) = \left\{(b, \varphi) \in R \times \Phi :\ (\lambda(b), \eta[\varphi]) \in M_0(h) \text{ і } \tilde{\varphi}(x) \in I_{b,\varphi} \text{ при } x \in [0,1]\right\}.$$

Теорема 1′ (***про обмеженість розв'язків***). *Відмінний від тривіального розв'язок u_φ граничної задачі* (1), (3) *є обмеженим тоді і тільки тоді, коли $(b, \varphi) \in \Omega_0(h)$.*

Якщо $(\lambda(b), \eta[\varphi]) \in M_1(h)$ і $\tilde{\varphi}(x) \in \operatorname{int} I_{b,\varphi}$ при всіх $x \in [0, 1]$, то розв'язок $u_\varphi(x, t)$ є асимптотично тривіальним; при цьому $u_\varphi(x, t)$ рівномірно прямує при $t \to \infty$ до тривіального розв'язку $u(x, t) = \gamma_{[\varphi]}\, e^{-\frac{b}{a}x}$, де $\gamma_{[\varphi]}$ — притягуюча нерухома точка резольвентного відображення $f_{b,\varphi}$, і отже, розв'язок $u_\varphi(x, t)$ є стійким за Ляпуновим (але не є асимптотично стійким).

Таким чином, нетривіальний розв'язок u_φ задачі (1), (3) може бути обмеженим і мати складну поведінку лише тоді, коли $(\lambda(b), \eta(\varphi)) \in M(h)$, де

$$M(h) = \{(\lambda, \mu) :\ \mu_2(\lambda) < \mu \le \mu_*(\lambda)\},$$

і при цьому u_φ є обмеженим тоді і тільки тоді, коли $\tilde{\varphi}(x) \in I_{b,\varphi}$. Зауважимо, що $(\lambda(b), \eta[\varphi]) \notin M(h)$ при будь-якому $\lambda(b)$, якщо $\eta[\varphi] \le 0$ (у цьому випадку множина періодичних точок $f_{b,\varphi}$ або взагалі порожня, або складається лише з (взагалі кажучи, двох) нерухомих точок), і, отже, $\eta[\varphi] > 0$ є необхідною умовою того, щоб пара параметрів $(\lambda(b), \eta[\varphi])$ належала $M(h)$.

Нехай

$$\Omega(h) = \left\{(b, \varphi) \in R \times \Phi :\ (\lambda(b), \eta[\varphi]) \in M(h) \text{ і } \tilde{\varphi}(x) \in I_{b,\varphi} \text{ при } x \in [0,1]\right\}.$$

Коли $(b, \varphi) \in \Omega(h)$ і φ — нетривіальна початкова функція, то розв'язок $u_\varphi(x, t)$ коливається з неспадаючою до нуля амплітудою (яка необмежено зростає при $\eta[\varphi] \to \infty$ і необмежено спадає (як $\sqrt{\eta[\varphi]}$) при $\eta[\varphi] \to 0$); при цьому розв'язок $u_\varphi(x, t)$ є нестійким за Ляпуновим як в C^0-, так і в C^1-метриках.

Як і у випадку першої задачі, для детального дослідження поведінки обмежених розв'язків задачі (1), (3) доцільно перейти до динамічної системи

$$\left\{H(b), R^+, S^t\right\}, \quad \text{де} \quad H(b) = \{\varphi : (b, \varphi) \in \Omega(h)\} \tag{36}$$

(S^t — оператор зсуву вздовж розв'язків).

З властивостей множини $M(h)$ випливає, що $H(b) \neq \varnothing$ при будь-якому $b \in R$. Якщо використати на $C^1([0,1], R)$ міру ν, що індукується співвідношенням (29) у такий спосіб:

$\nu(\mathcal{F}) = \mathrm{mes}\,\{\mu : \mu = \eta[\varphi], \varphi \in \mathcal{F}\}$ *для будь-якої відкритої множини* $\mathcal{F} \subset H(b)$, то множину $H(b)$ (для якої $\eta(H(b)) \subset M(h)$) можна охарактеризувати наступним чином:

$$\nu(H(b)) \to 0 \text{ при } b \to +\infty \quad \text{і} \quad \nu(H(b)) \to \infty \text{ при } b \to -\infty.$$

Простір $H(b)$, як і простір $\Phi(b)$, є некомпактним в C^1-метриці, тому дослідження системи (36) потребує поповнення $H(b)$. Для цього знову використаємо метрики ρ^Δ і $\rho^\#$. В результаті одержимо компактний простір $H^\Delta(b)$, що складається з напівнеперервних зверху функцій, які діють з $[0, 1]$ у $2^{I(b)}$, де $I(b) = I_{(\lambda(b), \mu_*(\lambda(b)))}$, і некомпактний простір $H^\#(b)$, що складається з детермінованих та випадкових функцій, які діють з $[0, 1]$ у $I(b)$ і мають властивість (19). Динамічна система (36) є рівномірно неперервною в обох метриках ρ^Δ і $\rho^\#$ і, отже, індукує на просторах $H^\Delta(b)$ і $H^\#(b)$ динамічні системи — будемо називати їх розширеними системами — які задають рух на ω-граничних множинах траєкторій вихідної системи (36).

Дослідимо ω-граничні множини $\omega_b[\varphi]$ динамічної системи (36) у просторах $H^\Delta(b)$ і $H^\#(b)$. Заради спрощення викладу обмежимося підмножиною

$$H_*(b) = \{\varphi \in H(b) : \varphi \text{ має властивість (20)}\}.$$

Зрозуміло, що множина $H_*(b)$ є всюди щільною в $H(b)$ (у C^1-топології). Нам будуть також потрібні такі підмножини множини $H_*(b)$:

$$H_d(b) = \{\varphi \in H_*(b) : (\lambda(b), \eta[\varphi]) \in M_{atr} \cup M_{itc}\},$$

$$H_r(b) = \{\varphi \in H_*(b) : (\lambda(b), \eta[\varphi]) \in M_{acim} \text{ і } \varphi \text{ є несингулярною функцією}\},$$

де M_{atr}, M_{itc}, M_{acim} — підмножини $M(h)$, на яких відображення (35) має такі ж самі властивості, які має відображення (14) на множинах Λ_{atr}, Λ_{itc}, Λ_{acim} відповідно.

Зауважимо, що $H_r(b) \subset H_d(b)$ для кожного $b \in R$ і обидві ці множини мають додатну ν-міру (при цьому $\mathrm{int}\, H_d(b) \neq \varnothing$, а $\mathrm{int}\, H_r(b) = \varnothing$), до того ж ν-міра кожної з цих множин спадає до 0, коли $b \to \infty$, і прямує до ∞, коли $b \to -\infty$.

За аналогією з попередньою задачею при заданому $b \in R$ для кожної початкової функції $\varphi \in H_*(b)$ можна, виходячи з резольвентного відображення $f_{b,\varphi}$, дослідити ω-граничні множини $\omega_b[\varphi]$ у обох розширених просторах $H^\Delta(b)$ і $H^\#(b)$. Але на відміну від задачі (1), (2) тепер резольвентне відображення (35) залежить не тільки від параметра b, але і від початкової функції φ. Тому *асимптотична поведінка розв'язків задачі* (1), (3) *при фіксованому* b *уже не є однотипною, зокрема, для кожного фіксованого* b *у фазовому просторі* $H(b)$ *динамічної системи* (36) *можна виділити дві підмножини* (*початкових функцій*) *додатної* ν*-міри, а саме,* $H_r(b)$ *і* $H_d(b) \setminus H_r(b)$, *перша з яких породжує автостохастичні траєкторії системи* (36), *а друга — ні.* А це, в свою чергу, спричиняє суттєві відмінності у динаміці відповідних систем (15) і

(36) (зокрема, це стосується топологічної ентропії, різних „універсальних" властивостей). Точні формулювання цих фактів наводяться в наступних теоремах.

Теорема 2′ (***про асимптотичну періодичність і стійкість розв'язків***). *Нехай* $b \in R$ *і* $\varphi \in H_*(b)$. *Тоді* ω*-гранична множина* $\omega_b[\varphi]$ *траєкторії* $S^t[\varphi]$ *динамічної системи* (36)

складається з напівнеперервних зверху функцій, що утворюють у $H^\Delta(b)$ *цикл відповідної розширеної системи, якщо* $\varphi \in H_d(b)$; *при цьому для майже кожної* (*в* C^1*-топології*) *функції* $\varphi \in H_d(b)$ *цей цикл є стійким* (в ρ^Δ*-метриці*);

складається з випадкових функцій, що утворюють у $H^\#(b)$ *цикл відповідної розширеної системи, якщо* $\varphi \in H_r(b)$; *при цьому для майже кожної* (*в* C^1*-топології*) *функції* $\varphi \in H_r(b)$ *цей цикл є стійким* (*в* $\rho^\#$*-метриці*).

Теорема 10 (***про залежність від початкових умов***). *Для будь-якого фіксованого* $b \in R$ *і будь-якого цілого* $p \geq 1$ *існують множини додатної* ν*-міри* $H_d^{(p)} \subset H_d(b)$ *і* $H_r^{(p)} \subset H_r(b)$ *такі, що*

1) *при кожному* $\varphi \in H_d^{(p)}$ ω*-гранична множина* $\omega_b[\varphi]$ *у просторі* $H^\Delta(b)$ *є циклом періоду* p/a (*який може вироджуватись у нерухому точку, коли* $p = 1$); *при цьому на підмножині точок* $x \in [0, 1]$ *повної міри амплітуда коливань кожної з* (*напівнеперервних зверху*) *функцій, що належать* $\omega_b[\varphi]$, *спадає до нуля із зростанням* p;

2) *при кожному* $\varphi \in H_r^{(p)}$ ω*-гранична множина* $\omega_b[\varphi]$ *у просторі* $H^\#(b)$ *є циклом періоду* p/a (*який може вироджуватись у нерухому точку, коли* $p = 1$); *при цьому на підмножині точок* $x \in [0, 1]$ *повної міри дисперсія кожної з* (*випадкових*) *функцій, що належать* $\omega_b[\varphi]$, *спадає до нуля із зростанням* p.

Зауважимо, що $H_r^{(p)} \subset H_d^{(p)}$ при будь-якому цілому $p > 0$.

Теорема про залежність $\omega_b[\varphi]$ від параметра b формулюється аналогічно (звичайно, якщо $\eta[\varphi] > 0$).

Теорема 6′ (***про топологічну ентропію***). *Топологічна ентропія динамічної системи* (36) *як у метриці* ρ^Δ, *так і у метриці* $\rho^\#$, *дорівнює нескінченності.*

Позначимо через $\mu_\lambda(m)$ нижню границю значень параметра μ, при яких відображення $f_{(\lambda,\mu)}$ має цикл періоду m, та через $q_\lambda(m)$ нижню границю значень параметра μ, для яких відображення $f_{(\lambda,\mu)}$ має гладку інаріантну міру з носієм, що складається з m інтервалів, і введемо такі множини:

$$\mathcal{P}_n(b) = \left\{\varphi \in H_*(b):\ \mu_{\lambda(b)}(2^n) < \eta[\varphi] < \mu_{\lambda(b)}(2^{n+1})\right\},$$

$$Q_n(b) = \left\{\varphi \in H_*(b):\ \mu_{\lambda(b)}(2^n) < \eta[\varphi] < q_{\lambda(b)}(2^{n-1})\right\},$$

$$\mathcal{R}_n(b) = \{\varphi \in Q_*(b):\ (\lambda(b), \eta[\varphi]) \in M_{acim}(h)\}.$$

Теорема 11 (***про універсальні властивості***). *Нехай* $b \in R$ *і* $\varphi \in H_*(b)$. Для *динамічної системи* (36) ω*-гранична множина* $\omega_b[\varphi]$ *траєкторії* $S^t[\varphi]$

є циклом періоду $2^n/a$ *у просторі* $H^\Delta(b)$ *і складається з детермінованих функцій для майже кожного* $\varphi \in \mathcal{P}_n(b)$;

є циклом періоду кратного $2^n/a$ *у просторі* $H^\Delta(b)$ *і складається з детермінованих функцій для майже кожного* $\varphi \in Q_n(b) \setminus \mathcal{R}_n(b)$;

є циклом періоду кратного $2^n / a$ *у просторі* $H^{\#}(b)$ *і складається з випадкових функцій для майже кожного* $\varphi \in \mathcal{R}_n(b)$.

Окрім того, мають місце такі універсальні співвідношення:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\nu(\mathcal{P}_n(b))}{\nu(\mathcal{P}_{n+1}(b))} = \lim_{n \to \infty} \frac{\nu(Q_n(b))}{\nu(Q_{n+1}(b))} = \lim_{n \to \infty} \frac{\nu(\mathcal{R}_n(b))}{\nu(\mathcal{R}_{n+1}(b))} = \delta = 4{,}699\ldots .$$

Виходячи з резольвентного відображення $f_{b,\varphi}$, як і у випадку задачі (1), (2), можна одержати аналоги теорем 3 – 5. Деяка додаткова інформація стосовно задачі (1), (3) є в [20].

1. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с. (Переклад англ.: Difference Equat. and Their Appl. (Ser. Math. and its Appl., v. 250). – Kluwer Acad. Publ., 1993. – 358 p.)
2. *Sharkovsky A. N., Romanenko E. Yu.* Ideal turbulence: attractors of deterministic systems may lie in the space of random fields // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1992. – **2**, № 1. – P. 31 – 36.
3. *Шарковський О. М., Романенко О. Ю.* Автостохастичність: атрактори детермінованих задач можуть містити випадкові функції // Допов. НАН України. – 1992 – № 10. – С. 33 – 37.
4. *Sharkovsky A. N.* Ideal turbulence in an idealized time-delayed Chua's circuit // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1994. – **4**, № 2. – P. 303 – 309.
5. *Sharkovsky A. N., Sivak A. G.* Universal phenomena in solution bifurcations of some boundary value problems // J. Nonlinear Math. Phys. – 1994. – **1**, № 2. – P. 147 – 157.
6. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N.* Self-stochasticity in dynamical systems as a scenario for deterministic spatio-temporal chaos // Chaos and Nonlinear Mech. Ser. B. – 1995. – **4**. – P. 172 – 181.
7. *Sharkovsky A. N.* Universal phenomena in some infinite-dimensional dynamical systems // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, № 5. – P. 1419 – 1425 та Thirty years after Sharkovskii's theorem: new perspectives (Proc. Conf.). – World Sci., 1995. – P. 157 – 164.
8. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N., Vereikina M. B.* Self-structuring and self-similarity in boundary value problems // Ibid. – P. 1407 – 1418 та P. 145 – 156.
9. *Романенко О. Ю., Шарковський О. М.* Від одновимірних до нескінченновимірних динамічних систем: ідеальна турбулентність // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 12. – С. 1604 – 1627. (Переклад англ.: Ukr. Math. J. – P. 1817 – 1842.)
10. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N., Vereikina M. B.* Structural turbulence in boundary value problems // Control of Oscillations and Chaos (Proc. Int. Conf.). – St.Petersburg, 1997. – P 492 – 497.
11. *Romanenko E. Yu., Sharkovsky A. N., Vereikina M. B.* Self-stochasticity in deterministic boundary value problems // Nonlinear partial differential equations (Proc. Int. Conf.). – Donetsk, 1998 (to appear).
12. *Jakobson M. V.* Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one dimensional maps // Communs Math. Phys. – 1981. – **81**, – P. 39 – 88.
13. *Peitgen H. O., Jürgens H., Saupe D.* Chaos and fractals: new frontiers of science. – New York: Springer-Verlag, 1993. – 984 p.
14. *Romanenko E. Yu.* On chaos in continuous difference equations // World Sci. Ser. in Appl. Analysis. – World Sci., 1995. – **4**. – P. 617 – 630.
15. *Романенко О. Ю.* Про деякі особливості асимптотичної поведінки різницевих рівнянь з неперервним часом та диференціально-різницевих рівнянь нейтрального типу // Крайові задачі для диференціальних рівнянь. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1998. – Вип. 1 (17). – С. 207 – 213.
16. *Feigenbaum M.* Quantitative universality for a class of nonlinear transformations // J. Statist. Phys. – 1978. – **19**. – P. 25 – 52.
17. *Feigenbaum M.* The universal metric properties of nonlinear transformations // Ibid. – 1979. – **21**. – P. 669 – 706.
18. *Шарковский А. Н.* Сосуществование циклов непрерывного преобразования прямой в себя // Укр. мат. журн. – 1964. – **16**, № 1. – С. 61 – 71. (Переклад англ.: Coexistence of cycles of continuous transformation of the straight line into itself // Int. J. Bifurcation and Chaos. – 1995. – **5**, № 5. – P. 1263 – 1273 та Thirty years after Sharkovskii's theorem: new perspectives (Proc. Conf.). – World Sci., 1995. – P. 1 – 11.
19. *Коляда С. Ф., Сивак А. Г.* Универсальные константы для однопараметрических отображений // Осцилляция и устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1982. – С. 53 – 60.
20. *Шарковський О. М., Романенко О. Ю.* Асимптотичні властивості розв'язків одного класу граничних задач // Допов. НАН України. – 1999. – № 3. – С. 43 – 48.

Одержано 28.08.98