УДК 517.9

Р. З. Жданов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ И СТАЦИОНАРНЫЕ УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИСА

By using the S. Lie infinitesimal method, we establish the correspondence between integrability of a one-parameter family of the Riccati equations and the hierarchy of the higher Korteweg – de Vries equations.

За допомогою інфінітезимального методу С. Лі встановлено відповідність між інтегровністю однопараметричної сім'ї рівнянь Ріккаті та ієрархією вищих рівнянь Кортевега – де Фріса.

В данной работе предложен метод интегрирования однопараметрического семейства уравнений Риккати

$$u_x + u^2 = f(x, \lambda), \tag{1}$$

основанный на их групповых свойствах. Здесь использовано обозначение

$$f(x, \lambda) = \lambda^n + \lambda^{n-1} V_{n-1}(x) + \ldots + \lambda V_1(x) + V_0(x),$$

где λ — произвольный параметр.

Напомним кратко основную идею теоретико-группового подхода к интегрированию уравнений Риккати (1). Предположим, что это уравнение допускает однопараметрическую группу преобразований с инфинитезимальным оператором

$$X = \xi(x, u, \lambda)\frac{\partial}{\partial x} + \eta(x, u, \lambda)\frac{\partial}{\partial u}.$$

При замене переменных $(x, u) \to (\tilde{x}, \tilde{u})$, преобразующей оператор X к виду $\tilde{X} = \dfrac{\partial}{\partial \tilde{x}}$, исследуемое уравнение приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению, не содержащему явно независимой переменной $\tilde{x}$ (более детально см., например, [1, 2]). Полученное уравнение, очевидно, является интегрируемым в квадратурах, что обеспечивает интегрируемость исходного уравнения Риккати. Критерий Ли инвариантности уравнения Риккати относительно однопараметрической группы с инфинитезимальным оператором X приводит к следующему определяющему уравнению для функций ξ, η:

$$\eta_x + (\eta_u - \xi_x)(f - u^2) - \xi_u(f - u^2)^2 + 2u\eta - \xi f_x = 0.$$

Однако проинтегрировать это уравнение ничуть не проще, чем исходное уравнение (1). Поэтому прямое применение инфинитезимального метода Ли неэффективно. Необходимо каким-то образом ограничить класс, в котором ищется оператор X, для того, чтобы упростить определяющее уравнение. Наша идея состоит в использовании следующего анзаца для коэффициентов инфинитезимального оператора

$$\xi = a(x, \lambda), \quad \eta = b(x, \lambda)u + c(x, \lambda),$$

где a, b, c — полиномы по λ.

Подставляя эти выражения в определяющее уравнение и расщепляя по переменной u, получаем

$$b + a' = 0, \tag{2}$$

$$b' + 2c = 0, \tag{3}$$

$$c' + (b - a')f - af' = 0. \tag{4}$$

Из уравнений (2), (3) следует

$$b = -a', \quad c = -\frac{1}{2}a''.$$

Подставляя эти выражения в (4), имеем

$$\frac{1}{2}a''' + 2a'(\lambda^n + \lambda^{n-1}V_{n-1} + \ldots + V_0) + a(\lambda^{n-1}V'_{n-1} + \ldots + V'_0) = 0. \tag{5}$$

Функцию $a(x, \lambda)$ будем искать в виде (см. также [3])

$$a(x, \lambda) = \lambda^N + \lambda^{N-1}A_{N-1}(x) + \ldots + \lambda A_1(x) + A_0(x). \tag{6}$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением следующих двух случаев:
а) n — произвольное натуральное число и $N = 1$;
б) N — произвольное натуральное число и $n = 1$.

Вначале рассмотрим случай $N = 1$. Подставляя выражение $a(x, \lambda) = \lambda + A(x)$ в формулу (5) и расщепляя по степеням λ, приходим к равенствам

$$\begin{gathered}\lambda^n:\ 2A' + V'_{n-1} = 0,\\ \lambda^j:\ 2A'V_j + AV'_j + V'_{j-1} = 0, \quad j = 1, \ldots, n-1,\\ \lambda^0:\ \frac{1}{2}A''' + 2A'V_0 + AV'_0 = 0.\end{gathered} \tag{7}$$

Решая последовательно рекуррентные соотношения (7), получаем следующие выражения для V_j:

$$V_{n-j} = \frac{j+1}{2^j}V^j + \sum_{i=1}^{j-1}\frac{i+1}{2^i}C_{n+i-j}V^i. \tag{8}$$

Здесь $C_0, \ldots, C_{n-2}$ — произвольные действительные постоянные, $C_{n-1} = 0$ и $V = V(x)$ — решение нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка

$$\frac{1}{4}V''' + \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+1}}V^nV' + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{(i+1)(i+2)}{2^{i+1}}C_iV^iV' + C_0V' = 0. \tag{9}$$

Это уравнение очевидным образом интегрируется в квадратурах, что означает интегрируемость исходного уравнения Риккати (1) при выполнении условий (8), (9). Заметим, что уравнение (9) при $C_1 = \ldots = C_{n-2} = 0$, $n = 1$ совпадает со стационарным уравнением Кортевега – де Фриса (КдФ)

$$\frac{1}{4}V''' + \frac{3}{2}VV' + C_0V' = 0. \tag{10}$$

Если же положить $C_1 = \ldots = C_{n-2} = 0$, $n = 2$, то в результате получим стационарное модифицированное уравнение КдФ

$$\frac{1}{4}V''' + \frac{3}{2}V^2V' + C_0V' = 0. \tag{11}$$

Теперь обратимся к случаю произвольного N при $n = 1$. Полагая в (5) $n = 1$, получаем

$$\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{N}A'''_j\lambda^j + 2\sum_{j=0}^{N}A'_j\lambda^j(\lambda + V_0) + \sum_{j=0}^{N}A_j\lambda^jV'_0 = 0,$$

где, по определению, $A_N = 1$. Расщепляя это равенство по степеням λ, получаем систему рекуррентных соотношений для A_j:

$$\frac{1}{2}A_j''' + 2V_0 A_j' + A_j V_0' + 2A_{j-1}' = 0, \quad j = 0, \dots, N, \tag{12}$$

где, по определению, $A_{-1} = 0$.

Первые N соотношений из (12) решаются последовательным интегрированием. В результате получаем явный вид функций $A_0(x), \dots, A_{N-1}(x)$, выражающихся через функцию $V_0(x)$ и ее производные. Подставляя эти результаты в последнее уравнение $(j = 0)$, приходим к нелинейному обыкновенному дифференциальному уравнению для определения функции $V_0(x)$. Для того чтобы изучить структуру этого уравнения, определим новые функции $\mathcal{U}_0(x)$, $\mathcal{U}_1(x), \dots$ с помощью следующих рекуррентных соотношений:

$$\mathcal{U}_j(x) = \left(\underbrace{-\frac{1}{4}\frac{d^2}{dx^2} - V_0(x) + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1} V_0'(x)}_{\mathcal{R}}\right)\mathcal{U}_{j-1}, \tag{13}$$

где $\mathcal{U}_{-1}(x) \stackrel{\text{def}}{=} 0$, $j = 0, 1, \dots$.

Нетрудно убедиться, что функции $\mathcal{U}_j(x)$ – это не что иное, как плотности законов сохранения для уравнения КдФ. Далее, интегро-дифференциальный оператор $\mathcal{R}$ – это оператор рекурсии для уравнения КдФ, который при последовательном действии на некоторую начальную плотность дает бесконечный набор плотностей законов сохранения (более подробно об этом см., например, [1, 4, 5]).

Теперь можно решить первые N соотношений из (12) в терминах функции $\mathcal{U}_j(x)$:

$$A_{N-j}(x) = \mathcal{U}_{j-1} + \sum_{k=1}^{j-1} C_{N-k}\,\mathcal{U}_{j-k-1}(x) + C_{N-j}, \qquad j = 1, \dots, N, \tag{14}$$

где $C_0, \dots, C_{N-1}$ — постоянные интегрирования.

Поскольку $A_{-1} = 0$, последнее уравнение из (12) можно записать в виде

$$\mathcal{D}_x \mathcal{R} A_0 = 0,$$

или, что то же самое,

$$\mathcal{D}_x\left(\sum_{j=0}^{N-1} C_j \mathcal{R}^j + \mathcal{R}^N\right)\mathcal{U}_0 = 0, \tag{15}$$

где $\mathcal{U}_0 = -\frac{1}{2}V$. Покажем, что это уравнение — не что иное, как высшее стационарное уравнение КдФ. Для этого нам понадобится операторное тождество

$$\mathcal{D}_x\left(\mathcal{R}^j\right) \equiv \left(\mathcal{D}_x \mathcal{R} \mathcal{D}_x^{-1}\right)^j \mathcal{D}_x .$$

Отметим, что интегро-дифференциальный оператор

$$\mathcal{P} = \mathcal{D}_x \mathcal{R} \mathcal{D}_x^{-1} = -\frac{1}{4}\mathcal{D}_x^2 - V_0 - \frac{1}{2}V_0' \mathcal{D}_x^{-1}$$

является вторым рекурсивным оператором для уравнения КдФ. Действуя последовательно оператором $\mathcal{P}$ на некоторую исходную симметрию (например, на $\mathcal{F}_0 = -\frac{1}{2}V_x$), получаем всю иерархию высших симметрий уравнения КдФ $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2, \ldots,$ где

$$\mathcal{F}_j = \mathcal{P}^j \mathcal{F}_0, \qquad j \geq 1.$$

Ввиду изложенного выше, уравнение (15) может быть представлено в следующем виде:

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1} C_j \mathcal{P}^j + \mathcal{P}^N\right) \mathcal{D}_x \mathcal{U}_0 = 0. \tag{16}$$

С учетом того, что $\mathcal{D}_x \mathcal{U}_0 = -\frac{1}{2}V_0 = \mathcal{F}_0$, получаем уравнение

$$\sum_{j=0}^{N-1} C_j \mathcal{F}_j + \mathcal{F}_N = 0, \tag{17}$$

которое является стандартным высшим стационарным уравнением КдФ. При условии $N = 1$ оно совпадает со стационарным уравнением КдФ.

Поскольку высшие стационарные уравнения КдФ интегрируемы в квадратурах [6], то исходное уравнение Риккати (1) при $n = 1$ также интегрируемо в квадратурах при условии, что $V(x)$ является решением одного из высших стационарных уравнений КдФ.

Существует тесная связь полученных результатов по интегрированию уравнений Риккати вида (1) при $n = 1$ с классической работой С. П. Новикова [7], в которой исследуется в числе прочих задача интегрируемости одномерного стационарного уравнения Шредингера

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\,\psi = 0. \tag{18}$$

Эта связь устанавливается с использованием представления Лакса для высших уравнений КдФ. Поскольку рассматриваются стационарные уравнения КдФ, представление Лакса сводится к условию, что существует дифференциальный оператор N-го порядка

$$Q = \sum_{i=0}^{N} q_i(x) \frac{d^i}{dx^i},$$

коммутирующий с оператором Шредингера $\frac{d^2}{dx^2} + V(x)$, при условии, что $V(x)$ — решение соответствующего высшего стационарного уравнения КдФ. Следовательно, оператор Q является высшей симметрией в смысле [8].

На множестве решений уравнения (18) можно свести оператор Q к симметрии Ли первого порядка

$$\tilde{Q} = \xi(x, \lambda) \frac{d}{dx} + \eta(x, \lambda),$$

где ξ, η — полиномы по λ. Это и дает анзац для оператора симметрии, используемый в данной работе. Отметим, что существует альтернативный подход к интегрированию уравнения Риккати (1) при $n = 1$, предложенный в работе [9].

Он основан на представлении Лакса для одного уравнения в частных производных, связанного с уравнением Риккати.

1. *Olver P.J.* Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1986. – 490 p.
2. *Ovsjannikov L.V.* Group analysis of differential equations. – New York: Acad. Press, 1982. – 400 p.
3. *Zhdanov R.Z.* Conditional symmetry and spectrum of the one-dimensional stationary Schrödinger equation // J. Math. Phys. – 1996. – **37**, № 1. – P. 3198–3217.
4. *Ibragimov N.Kh.* Transformation groups applied to mathematical physics. – Dordrecht: Reidel, 1985. – 350 p.
5 *Ablowitz M.J., Segur H.* Solitons and the inverse scattering transform. – Philadelphia: SIAM, 1981. – 325 p.
6. *Дубровин Б.А., Матвеев В.Б., Новиков С.П.* Нелинейные уравнения типа Кортевега – де Фриса, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 1. – С. 55–136.
7. *Новиков С.П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега – де Фриса // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – **8**, № 3. – С. 54–56.
8. *Фущич В.И., Никитин А.Г.* Симметрия уравнений квантовой механики. – М.: Наука, 1991. – 400 с.
9. *Прикарпатский А.К.* Об уравнениях Риккати, интегрируемых в квадратурах // Докл. АН СССР. – 1980. – **251**, № 5. – С. 1072–1077.

Получено 16.05.97