УДК 517.5

Б. В. Винницький, В. Л. Шаран (Дрогобиц. пед. ун-т)

ПРО НУЛІ АНАЛІТИЧНИХ У ПІВПЛОЩИНІ ФУНКЦІЙ ЗАДАНОГО УТОЧНЕНОГО ФОРМАЛЬНОГО ПОРЯДКУ *

We describe a sequences of zeros of functions $f \not\equiv 0$ which are analytic in the half-plane $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ and satisfy the condition

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c_1 \in (0;+\infty) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}_+: |f(z)| \le c_1 \exp((\sigma+\varepsilon)|z|\eta(|z|)),$$

where $0 \le \sigma < +\infty$ and η is a positive function continuously differentiable on $[0;+\infty)$ such that $x\eta'(x)/\eta(x) \to 0$ as $x \to +\infty$.

Наведено опис послідовностей нулів аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c_1 \in (0;+\infty) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}_+: |f(z)| \le c_1 \exp((\sigma+\varepsilon)|z|\eta(|z|)),$$

де $0 \le \sigma < +\infty$ і η — додатна неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$ функція, для якої $x\eta'(x)/\eta(x) \to 0$, $x \to +\infty$.

Питання про опис послідовностей нулів заданих класів функцій, аналітичних у півплощині, обговорювалось в працях багатьох авторів [1 – 6]. Ще Ф. Карлсон [1] показав, що існування аналітичної в півплощині $\mathbb{C}_+ = \{z: \operatorname{Re} z > 0\}$ функції $f \not\equiv 0$, яка при $z \in \mathbb{C}_+$ задовольняє умову $|f(z)| \le c_1 \exp(\sigma|z|)$, $0 < c_1 < +\infty$, і $f(n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$, можливе тоді і тільки тоді, коли $\sigma > \pi$. В [5] повністю описано послідовності нулів вказаного вище класу.

В [7] одержано повний опис послідовностей нулів аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$ функцій $f \not\equiv 0$, які задовольняють умову $|f(z)| \le c_2 \exp(\sigma|z|\eta(|z|))$, де $0 \le \sigma < +\infty$, $0 < c_2 < +\infty$ і η — функція обмеженої варіації на $[0;+\infty)$, чим повністю розв'язано задачу, розглянуту раніше Ж.-П. Каханом [3]. У даній роботі наведено повний опис послідовностей нулів класу функцій $f \not\equiv 0$, аналітичних у півплощині $\mathbb{C}_+$, які задовольняють умову

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c_3 \in (0;+\infty) \quad \forall\, z \in \mathbb{C}_+:$$

$$|f(z)| \le c_3 \exp((\sigma+\varepsilon)|z|\eta(|z|)), \tag{1}$$

де $0 \le \sigma < +\infty$ — задане число, η — додатна неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$ функція, що задовольняє умову

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t\eta'(t)}{\eta(t)} = 0, \tag{2}$$

тобто класу функцій заданого типу при уточненому формальному порядку, рівному одиниці.

Нехай (λ_n) — довільна послідовність різних комплексних чисел, які лежать у півплощині $\mathbb{C}_+$, а $\psi(t) = \int_1^t \frac{\eta(x)}{x}\,dx$. Через c_0, c_1, $c_1(\varepsilon)$, ... позначаємо додатні сталі. Метою статті є доведення наступного твердження, яке у випадку $\eta(t) \equiv 1$ доведено в [5].

* Ця работа частково підтримана Міжнародною Соросівською програмою підтримки освіти в галузі точних наук (ISSEP), грант № APU 071012.

Теорема. *Нехай додатна неперервно диференційовна на* $[0;+\infty)$ *функція* η *задовольняє умову* (2). *Тоді, для того щоб існувала аналітична в* $\mathbb{C}_+$ *функція* $f \not\equiv 0$, *яка має нулі в усіх точках* λ_n *і задовольняє умову* (1), *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови*

$$\sum_{|\lambda_n| \le 1} \operatorname{Re}\lambda_n < +\infty, \tag{3}$$

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, c_0 \in (0;+\infty) \quad \forall\, r \ge 1: \; S(r) \le \frac{\sigma+\varepsilon}{\pi}\psi(r) + c_0, \tag{4}$$

де

$$S(r) = \sum_{1 < |\lambda_n| \le r} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} - \frac{|\lambda_n|}{r^2}\right)\cos\varphi_n, \qquad \varphi_n = \arg\lambda_n, \qquad |\varphi_n| < \frac{\pi}{2}.$$

З доведення теореми буде видно, що справедливе і наступне **твердження**.

Нехай додатна неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$ *функція* η *задовольняє умову* (2). *Тоді, для того щоб послідовність* (λ_n) *була послідовністю нулів деякої аналітичної в* $\mathbb{C}_+$ *функції* $f \not\equiv 0$, *яка задовольняє умову* (1), *необхідно і достатньо, щоб виконувались умови* (3) *і* (4).

Для доведення теореми будуть потрібні дві леми.

Лема 1. *Нехай додатна неперервно диференційовна на* $[0;+\infty)$ *функція* η *задовольняє умову* (2) *і виконується умова* (4). *Тоді добуток*

$$G(z) = \prod_{|\lambda_n| > 1} W_n(z), \qquad W_n(z) = \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\bar{\lambda}_n}\exp\left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z}{\bar{\lambda}_n}\right) \tag{5}$$

абсолютно і рівномірно збігається на кожному компакті із $\mathbb{C}_+$ *і для довільного* $\varepsilon > 0$ *виконується*

$$|G(z)| \le \exp\left(\frac{2(\sigma+\varepsilon)}{\pi}x\psi(r) + c_4(\varepsilon)x\right), \qquad z = x + iy = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}_+. \tag{6}$$

Доведення. Із (4) випливає [7]

$$\frac{s(t)}{t} \le c_5\psi(t) + c_6, \qquad t \ge t_0, \qquad s(t) = \sum_{1 < |\lambda_n| \le t} \cos\varphi_n,$$

а із (2) отримуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$ при $r \ge r_0(\varepsilon)$ виконується $\psi(r) \le \le c_7(\varepsilon)r^{\varepsilon}$. Тому для довільного $1 < \rho < +\infty$

$$\sum_{|\lambda_n| \ge 2\rho} \frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|^2} < +\infty. \tag{7}$$

Отже [4], добуток $G(z)$, визначений рівністю (5), збігається абсолютно і рівномірно на кожному компакті із $\mathbb{C}_+$. Тому залишається довести справедливість оцінки (6). Функція S [5, 7] є неперервною на $(1;+\infty)$, зростаючою на $[r_0;+\infty)$, де $r_0 = \max\{r : S(r) = 0\}$ і $\lim\limits_{r \to 1+} S(r) = 0$. Нехай S^{-1} — функція, обернена до звуження S на $[r_0;+\infty)$ і $S_1(r) = S^{-1}\left(\frac{\sigma+\varepsilon}{\pi}\psi(16r) + c_0\right)$, де $\varepsilon > 0$ — довільне число. Із (4) отримуємо

$$S_1(r) \ge 16r, \qquad r \ge r_0. \tag{8}$$

Досить розглянути випадок [5, 7], коли $S(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Тоді $\psi(r) \to \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Як і в [7], при $r \geq r_0$ одержуємо

$$\sum_{1 < |\lambda_n| \leq S_1(r)/2} \ln |W_n(z)| \leq 2xS(S_1(r)) = \frac{2(\sigma+\varepsilon)}{\pi} x\psi(16r) + 2c_0 x, \tag{9}$$

$$\sum_{|\lambda_n| > S_1(r)/2} \ln |W_n(z)| \leq c_8 xr \sum_{|\lambda_n| > S_1(r)/2} \frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|^2} = c_8 xr\tau(S_1(r)), \tag{10}$$

де

$$\tau(t) = \sum_{|\lambda_n| > t/2} \frac{\cos\varphi_n}{|\lambda_n|^2}.$$

Із (7) випливає, що $\tau(t) < +\infty$ при $t > 0$. Далі, враховуючи, що в кожному півкрузі $Q_{2r_0} = \{z : |z| \leq 2r_0,\ \mathrm{Re}\, z > 0\}$ $|G(z)| \leq \exp(c_9 x)$, із (9) і (10) на підставі (2) отримуємо, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$|G(z)| \leq \exp\left(\frac{2(\sigma+\varepsilon)}{\pi} x\psi(r) + c_8 xr\tau(S_1(r)) + c_{10}(\varepsilon)x\right), \qquad z \in \mathbb{C}_+.$$

Лему 1 буде доведено, якщо покажемо, що $r\tau(S_1(r)) = o(\psi(r))$ при $r \to +\infty$. Нехай $R_k = 2^k$, $x_k = \tau(R_k)$, $y_k = \Phi\left(\frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}(S(R_{k+1}) - c_0)\right)$, де $\Phi(t) = = t/\psi^{-1}(t)$, ψ^{-1} — функція, обернена до функції ψ. Тоді для кожного $r \geq r_0$ знайдеться $k = k(r)$ таке, що $R_k \leq S_1(r) < R_{k+1}$. Тому

$$\psi^{-1}\left(\frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}(S(R_k) - c_0)\right) \leq 16r < \psi^{-1}\left(\frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}(S(R_{k+1}) - c_0)\right),$$

$$\tau(S_1(r)) \leq \tau(R_k).$$

Таким чином,

$$\frac{r\tau(S_1(r))}{\psi(r)} \leq c_{11} \frac{\psi^{-1}\left(\frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}(S(R_{k+1}) - c_0)\right)}{\frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}(S(R_{k+1}) - c_0)} \tau(R_k) = c_{11} \frac{x_k}{y_k},$$

тому що функція $r/\psi(r)$ є зростаючою на $[r_0; +\infty)$. Очевидно, що $x_k \to 0$ і $y_k \to 0$ при $k \to +\infty$. Крім цього [7],

$$x_k - x_{k+1} \leq \frac{c_{12}}{R_{k+2}^3} \sum_{|\lambda_n| < R_k} |\lambda_n| \cos\varphi_n,$$

$$S(R_{k+2}) - S(R_{k+1}) \geq \frac{c_{13}}{R_{k+2}^2} \sum_{|\lambda_n| < R_k} |\lambda_n| \cos\varphi_n.$$

Далі, враховуючи, що $\Phi'(t) = -\frac{t}{\psi^{-1}(t)\,\eta(\psi^{-1}(t))}(1 + o(1))$ при $t \to +\infty$, за теоремою Лагранжа при деякому a_k, $\frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}(S(R_{k+1}) - c_0) < a_k < < \frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}(S(R_{k+2}) - c_0)$, одержуємо

$$y_k - y_{k+1} = \Phi\left(\frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}(S(R_{k+1}) - c_0)\right) - \Phi\left(\frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}(S(R_{k+2}) - c_0)\right) =$$

$$= \frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}\Phi'(a_k)(S(R_{k+1}) - S(R_{k+2})) =$$

$$= \frac{\pi a_k(1+o(1))}{(\sigma+\varepsilon)\psi^{-1}(a_k)\eta(\psi^{-1}(a_k))}(S(R_{k+2}) - S(R_{k+1})) \geq$$

$$\geq \frac{c_{14}(\varepsilon)a_k(1+o(1))}{\psi^{-1}(a_k)\eta(\psi^{-1}(a_k))}\sum_{|\lambda_n|<R_k}|\lambda_n|\cos\varphi_n, \qquad k\to+\infty.$$

Таким чином, враховуючи (2) та (4), маємо

$$\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{x_k - x_{k+1}}{y_k - y_{k+1}} \leq c_{15}(\varepsilon)\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\psi^{-1}(a_k)\eta(\psi^{-1}(a_k))}{a_k R_k} \leq$$

$$\leq c_{16}(\varepsilon)\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\psi^{-1}\left(\frac{\pi}{\sigma+\varepsilon}(S(R_{k+1}) - c_0)\right)}{R_{k+1}}\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{\eta(t)}{\psi(t)} = 0.$$

Скориставшись, як і в [5, 7], теоремою Штольца, отримаємо, що $r\tau(S_1(r)) = o(\psi(r))$ при $r\to+\infty$, і лему 1 доведено.

Лема 2. *Нехай додатні неперервно диференційовні на* $[0;+\infty)$ *функції* η *і* β *задовольняють умову* (2) *і незростаюча функція* $\beta(r)\to+\infty$ *при* $r\to+\infty$. *Тоді функція*

$$L(z) = \exp\left(\frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{z}{t+z} - \frac{z}{t}\right)(\sigma+\beta(t))\eta(t)\,dt\right) \tag{11}$$

є аналітичною в $\mathbb{C}_+$ *і для довільного* $\varepsilon>0$ *при* $z = x+iy = re^{i\varphi}\in\mathbb{C}_+$

$$|L(z)| \leq c_{17}(\varepsilon)\exp\left(-\frac{2}{\pi}x(\sigma+\beta(r))\psi(r) + (\sigma+\varepsilon)r\eta(r)\right). \tag{12}$$

Доведення. Відмітимо, що інтеграл в рівності (11) рівномірно збігається на кожному компакті із півплощини $\operatorname{Re} z > -1$ і обмежений в кожному півкрузі $Q_R = \{z: |z| < R,\ \operatorname{Re} z > 0\}$. Далі при $|z| = r > 1$ маємо

$$|L(z)| = \exp\left(\frac{2}{\pi}\int_1^{+\infty}\left(\frac{tx+r^2}{t^2+2tx+r^2} - \frac{x}{t}\right)(\sigma+\beta(t))\eta(t)\,dt\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{2}{\pi}x\int_1^r\frac{\eta(t)}{t}(\sigma+\beta(t))\,dt\right. -$$

$$-\frac{2}{\pi}(\sigma+\beta(r))r\eta(r)\int_0^1\frac{t\cos\varphi+r}{t^2+2tr\cos\varphi+r^2}\,dt +$$

$$+\frac{2}{\pi}(\sigma+\beta(r))r\eta(r)\int_0^r\frac{t\cos\varphi+r}{t^2+2tr\cos\varphi+r^2}\,dt -$$

$$-\frac{2}{\pi}(\sigma+\beta(r))r^2\eta(r)\int_r^{+\infty}\frac{t\cos2\varphi+r\cos\varphi}{t(t^2+2tr\cos\varphi+r^2)}\,dt +$$

$$+\frac{2}{\pi}r\int_1^r \frac{t\cos\varphi + r}{t^2+2tr\cos\varphi+r^2}((\sigma+\beta(t))\eta(t)-(\sigma+\beta(r))\eta(r))\,dt\ -$$

$$\left.-\frac{2}{\pi}r^2\int_r^{+\infty}\frac{t\cos 2\varphi + r\cos\varphi}{t(t^2+2tr\cos\varphi+r^2)}((\sigma+\beta(t))\eta(t)-(\sigma+\beta(r))\eta(r))\,dt\right) \le$$

$$\le \exp\left(-\frac{2}{\pi}x(\sigma+\beta(r))\,\psi(r)+\frac{2}{\pi}r(\sigma+\beta(r))\,\eta(r)\,\varphi\sin\varphi+\delta(r,\varphi)\right), \qquad (13)$$

де

$$\delta(r,\varphi) = -\frac{2}{\pi}(\sigma+\beta(r))\,r\eta(r)\int_0^1\frac{t\cos\varphi+r}{t^2+2tr\cos\varphi+r^2}\,dt\ +$$

$$+\frac{2}{\pi}r\int_1^r \frac{t\cos\varphi + r}{t^2+2tr\cos\varphi+r^2}((\sigma+\beta(t))\eta(t)-(\sigma+\beta(r))\eta(r))\,dt\ -$$

$$-\frac{2}{\pi}r^2\int_r^{+\infty}\frac{t\cos 2\varphi + r\cos\varphi}{t(t^2+2tr\cos\varphi+r^2)}((\sigma+\beta(t))\eta(t)-(\sigma+\beta(r))\eta(r))\,dt\,.$$

Оскільки функція $\eta_1(t) = (\sigma+\beta(t))\,\eta(t)$ є неперервно диференційовною, то вона має обмежену зміну $V(x)$ на кожному відрізку $[0;x]$, $0<x<+\infty$, і [8, с. 169] $V(x) = \int_0^x |\eta_1'(t)|\,dt$. Крім цього, η_1 можна зобразити [9, 10] у вигляді $\eta_1(x)-\eta_1(0) = \eta_2(x)-\eta_3(x)$, де η_2 і η_3 — додатні неспадні на $[0;+\infty)$ функції, причому $\eta_2(x)+\eta_3(x) = V(x)$. Тому

$$|\delta(r,\varphi)| \le \frac{2}{\pi}\left(\eta_1(r)+\int_1^r|\eta_1(t)-\eta_1(r)|\,dt + r^2\int_r^{+\infty}\frac{|\eta_1(t)-\eta_1(r)|}{t^2}\,dt\right) \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\left(\eta_1(r)+\int_1^r(V(r)-V(t))\,dt + r^2\int_r^{+\infty}\frac{V(t)-V(r)}{t^2}\,dt\right) \le$$

$$\le \frac{2}{\pi}\left(\eta_1(r)+\int_1^r t\,dV(t) + r^2\int_r^{+\infty}\frac{dV(t)}{t}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\eta_1(r)+\int_1^r t|\eta_1'(t)|\,dt + r^2\int_r^{+\infty}\frac{|\eta_1'(t)|}{t}\,dt\right).$$

Оскільки

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\int_1^r t|\eta_1'(t)|\,dt}{r\eta_1(r)} = 0, \qquad \lim_{r\to+\infty}\frac{r^2\int_r^{+\infty}\frac{|\eta_1'(t)|}{t}\,dt}{r\eta_1(r)} = 0,$$

то звідси та із (13) одержуємо (12) і лему 2 доведено.

Доведення теореми. Необхідність умов (3) і (4) випливає, як і в [5, 7], з узагальненої формули Карлемана [4, с. 26].

Нехай тепер умови (3) і (4) виконуються. Із леми 1 маємо, що існує функція β_1 така, що $\beta_1(r)\to 0$ при $r\to+\infty$ і

$$|G(z)| \le \exp\left(\frac{2}{\pi}(\sigma+\beta_1(r+2))\,x\psi(r)\right), \qquad z\in\mathbb{C}_+. \qquad (14)$$

Далі, існує незростаюча неперервно диференційовна на $[0;+\infty)$ функція $\beta(r)$ така, що $\beta(r)\to 0$, $r\beta'(r)/\beta(r)\to 0$ при $r\to+\infty$ і $\beta_1(r+2)\le\beta(r)$ для всіх $r\in[0;+\infty)$. Справді, нехай

$$\beta_2(t)=\max\left(\sup_{r\ge t}\beta_1(r);\ \frac{1}{\ln(t+2)}\right).$$

Очевидно, β_2 — незростаюча функція, $\beta_2(t)\ge\dfrac{1}{\ln(t+2)}$ і $\beta_2(t)\to 0$ при $t\to\to+\infty$.

Покладемо $\gamma_1(t)=\dfrac{1}{\beta_2(t)}$. Тоді $\gamma_1(t)\le\ln(t+2)$, $\gamma_1(t)\to+\infty$ і $\gamma_1(t)/t\to 0$ при $t\to+\infty$. Крім цього, γ_1 — неспадна функція. Тому можна побудувати [11, с. 27] неспадну неперервно диференційовну функцію γ_2, яка задовольняє умови: $\gamma_2(t)\to+\infty$, $\gamma_2'(t)\to 0$ при $t\to+\infty$ і $\gamma_2(t)<\gamma_1(t)$ для всіх $t\in[0;+\infty)$. Нехай $\gamma(t)=\gamma_2(\ln(t+2))$. Тоді $\gamma(t)\to+\infty$, $t\gamma'(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Таким чином, функція $\beta(t)=\dfrac{1}{\gamma(t)}$ є шуканою, тому що $\beta_1(t+2)\le\beta(t)$, $\beta(t)\to 0$ і $t\beta'(t)/\beta(t)=-t\gamma'(t)/\gamma(t)\to 0$ при $t\to+\infty$. Нехай

$$f(z)=L(z)\,G(z)\,G_1(z),$$

де L — функція із леми 2, G — функція із леми 1, а

$$G_1(z)=\prod_{|\lambda_n|\le 1}\frac{z-\lambda_n}{z+\bar\lambda_n}.$$

Із [4, с. 30] і умови (3) випливає, що добуток G_1 збігається в $\mathbb{C}_+$ і $|G_1(z)|\le 1$ при $z\in\mathbb{C}_+$. Із лем 1 і 2, враховуючи, що $\beta(t)\ge\beta_1(t+2)$ для всіх $t\in\in[0;+\infty)$, отримуємо, що $|f(z)|\le c_{18}(\varepsilon)\exp((\sigma+\varepsilon)r\eta(r))$ при $z=x++iy=re^{i\varphi}\in\mathbb{C}_+$, де $\varepsilon>0$ — довільне число. Теорему доведено.

1. *Carlson F.* Sur une classe des séries de Taylor. Thesis, Upsala. – 1914.
2. *Fuchs W. H. J.* A generalization of Carlson's theorem // J. London Math. Soc. – 1946. – **2**. – P. 106–110.
3. *Kahane J.-P.* Extension du théorème de Carlson et applications // C. r. Acad. sci. Paris. – 1952. – **234**, № 21. – P. 2038–2040.
4. *Говоров Н. В.* Краевая задача Римана с бесконечным индексом. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
5. *Винницкий Б. В.* О нулях функций, аналитических в полуплоскости, и полноте систем экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **45**, № 2. – С. 484–500.
6. *Гришин А. Ф.* Функции первого порядка, субгармонические в полуплоскости, и одна тауберова теорема // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1990. – **53**. – С. 87–94.
7. *Винницький Б. В., Шаран В. Л.* Опис послідовностей нулів одного класу функцій, аналітичних у півплощині // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 9. – С. 1169–1176.
8. *Городецкий В. В. и др.* Методы решения задач по функциональному анализу. – Киев: Выща шк., 1990. – 479 с.
9. *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966. – 320 с.
10. *Титчмарш Е.* Теория функций. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
11. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент. – М.: Наука, 1976. – 536 с.

Одержано 24.06.96,
після доопрацювання – 26.10.98