УДК 517.5

О. В. Поляков, Е. Г. Литвин (Днепропетров. ун-т)

НЕСИММЕТРИЧНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ $L_{p(t)}$ *

We introduce the notion of (α, β)-norm in the space $L_{p(t)}$ of functions $x(t)$ for which

$$\int_0^1 |x(t)|^{p(t)} < \infty,$$

where $p(t)$ is a positive measurable function. We establish a criterion of element of the best (α, β)-approximant in the space $L_{p(t)}$. We obtain inequalities of duality relations type.

Введено поняття про (α, β)-норму у просторі $L_{p(t)}$ функцій $x(t)$, для яких

$$\int_0^1 |x(t)|^{p(t)} < \infty,$$

де $p(t)$ — додатна вимірна функція. Встановлено критерій елемента найкращого (α, β)-наближення у просторі $L_{p(t)}$. Отримано нерівності типу співвідношень двоїстості.

Пусть $L_p = L_p[0; 1]$ — пространство всех суммируемых в p-й степени $(1 \le p < < \infty)$ и существенно ограниченных $p = \infty$ на $[0; 1]$ вещественнозначных функций f с конечной нормой $\|f\|_p$.

Для $f \in L_p$ и чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ положим $f_{\pm}(x) = \max\{\pm f(x), 0\}$, $\operatorname{sign}_{\alpha,\beta} f = \alpha \operatorname{sign} f_+ - \beta \operatorname{sign} f_-$, $|f(x)|_{\alpha,\beta} = f(x) \operatorname{sign}_{\alpha,\beta} f(x)$ и

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \left\{ \int_0^1 |f(x)|_{\alpha,\beta}^p \, dx \right\}^{1/p}.$$

Если $f \in L_p$ и $H \subset L_p$, то величину

$$E(f; H)_{p;\alpha,\beta} = \inf\{\|f - u\|_{p;\alpha,\beta} : u \in H\}$$

назовем наилучшим (α, β)-приближением функции f множеством H в пространстве L_p. При $\alpha = \beta = 1$ получаем обычное наилучшее L_p-приближение функции f множеством H, которое обозначаем $E(f; H)_p$.

Для $f \in L_1$ положим

$$H^{\pm}(f) = \{u \in H : \pm u(x) \le \pm f(x) \text{ для почти всех } x \in [0; 1]\}.$$

Величина

$$E^{\pm}(f; H)_p = \inf\{\|f - u\|_p : u \in H^{\pm}\}$$

называется наилучшим L_1-приближением снизу $(+)$ или сверху $(-)$ функции f множеством H.

В. Ф. Бабенко [1] (см. также [2]) показал, что если H — конечномерное подпространство пространства L_1, то

$$\lim_{\beta \to \infty} E(f; H)_{p;1,\beta} = E^+(f, H)_p \quad \text{и} \quad \lim_{\alpha \to \infty} E(f; H)_{p;\alpha,1} = E^-(f, H)_p.$$

Свойства наилучших (α, β)-приближений и вопросы несимметричной аппроксимации фукциональных классов подробно изучены В. Ф. Бабенко [1, 3, 4].

* Выполнена при финансовой поддержке Международного научного фонда (грант № U92000) и Министерства Украины по делам науки и технологий.

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение.

Лемма 1 [1]. *Для любых* $x, y \in L_1[0; 1]$ *справедливо следующее неравенство*

$$\int_0^1 x(t)[\alpha \operatorname{sign}(y(t))_+ - \beta \operatorname{sign}(y(t))_-]dt \le \int_0^1 x(t)[\alpha \operatorname{sign}(x(t))_+ - \beta \operatorname{sign}(x(t))_-]dt.$$

Через $L_{p(t)}[0; 1] = L_{p(t)}$ обозначим множество измеримых функций $x(t)$, определенных на $[0; 1]$ и таких, что

$$\int_{[0;1]\setminus B} |x(t)|^{p(t)} dt < \infty, \quad \operatorname{vrai} \sup_{t \in B} |x(t)| < \infty,$$

где $p(t)$ — положительная функция, заданная на $[0; 1]$ и не обращающаяся в ∞ вне B.

Пространство $L_{p(t)}$ было введено в работе И. В. Ценова [5], который рассмотрел случай непрерывных функций $p(t)$ и $x(t)$ и установил критерий для полинома $P_n^*(t)$, минимизирующего интеграл

$$\int_0^1 |x(t) - a_0\varphi_0(t) - \ldots - a_n\varphi_n(t)|^{p(t)} dt$$

среди всех полиномов $P_n(t) = a_0\varphi_0(t) + \ldots + a_n\varphi_n(t)$, где $\varphi_0(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — линейно независимая система непрерывных функций.

В работе [6] И. И. Шарапудиновым изучался случай, когда $p(t)$ — произвольная измеримая функция. В частности, он доказал, что если $p(t)$ — существенно ограниченная, измеримая функция, определенная на $[0, 1]$, и $p(t) \ge 1$, то пространство $L_{p(t)}$ нормировано.

Положим

$$\underline{\phi} = \operatorname{vrai} \inf_{t \in [0,1]} |\phi(t)|, \quad \overline{\phi} = \operatorname{vrai} \sup_{t \in [0,1]} |\phi(t)|.$$

В дальнейшем будем считать, что $p(t)$ — измеримая, существенно ограниченная функция такая, что $1 < \underline{p}$, $\overline{p} < \infty$. Как показано в [6], в этом случае пространство $L_{p(t)}$ рефлексивно.

Обозначим через $\mathcal{L}L_{p(t)}$ линейную оболочку пространства $L_{p(t)}$.

Имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* $x(t) \in \mathcal{L}L_{p(t)}$, $y(t) \in \mathcal{L}L_{p(t)}$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\int_0^1 |x(t)||y(t)|dt \le r\|x\|_{p(t)}\|y\|_{q(t)},$$

где $\dfrac{1}{p(t)} + \dfrac{1}{q(t)} = 1$ *и* $r \le \dfrac{1}{\underline{p}} + \dfrac{1}{\underline{q}}$.

(Определение нормы $\|\cdot\|_{p(t)}$ см. в [6].)

В данной работе мы изучим вопросы наилучшего несимметричного приближения в пространстве $L_{p(t)}$.

Пусть $p(t)$ — существенно ограниченная измеримая функция, определенная на $[0, 1]$, такая, что $1 < \underline{p}$, $\overline{p} < \infty$ и α, β — положительные числа.

Для каждой функции $x(t) \in L_{p(t)}$ введем (α, β)-норму следующим образом:

$$\|x\|_{p(t);\alpha,\beta} := \|\alpha x_+ + \beta x_-\|_{p(t)} =$$

$$= \inf\left\{\gamma\colon \gamma > 0, \quad \int_0^1 \left|\frac{x(t)(\alpha \operatorname{sign}(x(t))_+ + \beta \operatorname{sign}(x(t))_-)}{\gamma}\right|^{p(t)} dt \le 1\right\},$$

т. е. такое число, что

$$\int_0^1 \left| \frac{x(t)}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta}} \right|_{\alpha,\beta}^{p(t)} = 1.$$

Утверждение 1. *Для всех* $x \in L_{p(t)}$ *и* $y \in L_{p(t)}$ *справедливо неравенство*

$$\|x+y\|_{p(t);\alpha,\beta} \leq \|x\|_{p(t);\alpha,\beta} + \|y\|_{p(t);\alpha,\beta} \tag{1}$$

(*неравенство* (1) *является аналогом неравенства Минковского*).

Доказательство. Из определения (α, β)-нормы следует

$$\int_0^1 \left| \frac{x(t)(\alpha \operatorname{sign}(x(t))_+ + \beta \operatorname{sign}(x(t))_-)}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta}} \right|^{p(t)} dt = 1. \tag{2}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^1 \left| \frac{(x(t)+y(t))(\alpha \operatorname{sign}(x(t)+y(t))_+ + \beta \operatorname{sign}(x(t)+y(t))_-)}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta} + \|y\|_{p(t);\alpha,\beta}} \right|^{p(t)} dt =$$

$$= \int_0^1 \left| \frac{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta} \dfrac{x(t)}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta}} + \|y\|_{p(t);\alpha,\beta} \dfrac{y(t)}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta}}}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta} + \|y\|_{p(t);\alpha,\beta}} \times \right.$$

$$\left. \times \ (\alpha \operatorname{sign}(x(t)+y(t))_+ + \beta \operatorname{sign}(x(t)+y(t))_-) \right|^{p(t)} dt \leq$$

$$\leq \frac{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta}}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta} + \|y\|_{p(t);\alpha,\beta}} \int_0^1 \left| \frac{x(t)(\alpha \operatorname{sign}(x(t))_+ + \beta \operatorname{sign}(x(t))_-)}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta}} \right|^{p(t)} dt +$$

$$+ \frac{\|y\|_{p(t);\alpha,\beta}}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta} + \|y\|_{p(t);\alpha,\beta}} \int_0^1 \left| \frac{y(t)(\alpha \operatorname{sign}(y(t))_+ + \beta \operatorname{sign}(y(t))_-)}{\|y\|_{p(t);\alpha,\beta}} \right|^{p(t)} dt =$$

$$= \frac{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta}}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta} + \|y\|_{p(t);\alpha,\beta}} + \frac{\|y\|_{p(t);\alpha,\beta}}{\|x\|_{p(t);\alpha,\beta} + \|y\|_{p(t);\alpha,\beta}} = 1.$$

Отсюда и вытекает неравенство (1).

Утверждение 2. *Пусть функции* $p(t)$ *и* $q(t)$ *такие, что* $\dfrac{1}{p(t)} + \dfrac{1}{q(t)} = 1$. *Тогда для всех* $x(t) \in \mathcal{L}L_{p(t)}$ *и* $y(t) \in \mathcal{L}L_{p(t)}$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt \leq r\,\|x\|_{p(t);\alpha,\beta}\,\|y\|_{q(t);\alpha^{-1},\beta^{-1}}, \tag{3}$$

где число r *определено в лемме* 2.

(*Неравенство* (3) *является аналогом неравенства Гельдера.*)

Доказательство. С учетом лемм 1 и 2 имеем

$$\int_0^1 x(t)\,y(t)\,dt =$$

$$= \int_0^1 x(t)(\alpha \operatorname{sign}(x(t))_+ - \beta \operatorname{sign}(x(t))_-)\, y(t)\left(\alpha^{-1} \operatorname{sign}(x(t))_+ - \beta^{-1} \operatorname{sign}(x(t))_-\right) dt \leq$$

$$\leq r\,\|x(\alpha \operatorname{sign} x_+ - \beta \operatorname{sign} x_-)\|_{p(t)} \left\|y\left(\alpha^{-1} \operatorname{sign} y_+ - \beta^{-1} \operatorname{sign} y_-\right)\right\|_{q(t)} =$$

$$= r\,\|x\|_{p(t);\,\alpha,\beta}\,\|y\|_{q(t);\,\alpha^{-1},\,\beta^{-1}}.$$

Пусть H — конечномерное подпространство пространства $L_{p(t)}$. Зафиксируем функцию $x(t) \in L_{p(t)}$ и рассмотрим следующие задачи.

***Задача* 1.** Найти

$$\inf_{u \in H} I(x; u),$$

где

$$I(x; u) = \int_0^1 |x(t) - u(t)|^{p(t)} \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t) - u(t))_+ + \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t) - u(t))_- \right] dt.$$

***Задача* 2.** Найти

$$\inf_{u \in H} E(x; u),$$

где $E(x; u) = \|x - u\|_{p(t); \alpha, \beta}$.

Функцию $u_1(t) \in H$, реализующую inf в задаче 1, будем называть элементом наилучшего (α, β)-приближения функции $x(t) \in L_{p(t)}$ в смысле задачи 1, а функцию $u_2(t) \in H$, реализующую inf в задаче 2, — элементом наилучшего (α, β)-приближения функции $x(t) \in L_{p(t)}$ в смысле задачи 2.

В дальнейшем покажем, что если функция $p(t)$ отлична от константы, то задачи 1 и 2 в общем случае различны.

Следующая теорема дает критерий элемента наилучшего (α, β)-приближения в смысле задачи 1.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $u_0(t) \in H$ была элементом наилучшего (α, β)-приближения в смысле задачи* 1 *функции $x(t)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой $u(t) \in H$ имело место равенство*

$$\int_0^1 |x(t) - u_0(t)|^{p(t)-1} p(t) u(t) \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t) - u_0(t))_+ - \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t) - u_0(t))_- \right] dt = 0.$$

Доказательство. *Необходимость.* Представим $u \in H$ в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t),$$

где $\{\varphi_i(t)\}_{i=1}^{n} \subset L_{p(t)}$ — линейно независимая система функций.

Введем обозначения

$$I(a_1, a_2, \ldots, a_n) = I\Big(x; \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(t)\Big), \qquad \omega(t) = x(t) - u(t),$$

и рассмотрим разность

$$\Delta I_k = I(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \ldots, a_n) - I(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots, a_n) =$$

$$= \int_0^1 |\omega(t) - h\varphi_k(t)|^{p(t)} \times$$

$$\times \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(\omega(t) - h\varphi_k(t))_+ + \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(\omega(t) - h\varphi_k(t))_- \right] dt -$$

$$- \int_0^1 |\omega(t)|^{p(t)} \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(\omega(t))_+ + \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(\omega(t))_- \right] dt.$$

Используя теорему о конечных приращениях, получаем

$$\Delta I_k = h \int_0^1 p(t) |\omega(t) - \theta h \varphi_k(t)|_{\alpha,\beta}^{p(t)-1} \operatorname{sign}_{\alpha,\beta}(\omega(t) - \theta h \varphi_k(t)) (-\varphi_k(t))\, dt =$$

$$= h\int_0^1 p(t)\,(-\,\varphi_k(t))\,|\omega(t)-\,\theta h\varphi_k(t)|^{p(t)-1}\;\times$$

$$\times\,\left[\alpha^{p(t)}\operatorname{sign}(\omega(t)-\theta h\varphi_k(t))_+-\beta^{p(t)}\operatorname{sign}(\omega(t)-\theta h\varphi_k(t))_-\right]dt,\quad 0<\theta<1.$$

Оценим отношение

$$\left|\frac{\Delta I_k}{h}\right| \le \|p\|_\infty\left|\int_0^1|\varphi_k(t)||\omega(t)-\theta h\varphi_k(t)|^{p(t)-1}\times\right.$$

$$\left.\times\,\left[\alpha^{p(t)}\operatorname{sign}(\omega(t)-\theta h\varphi_k(t))_+-\beta^{p(t)}\operatorname{sign}(\omega(t)-\theta h\varphi_k(t))_-\right]dt\right|.$$

Пусть $f(t)=\omega(t)-\theta\,h\,\varphi_k(t)$. Обозначим

$$A = \left\||f(t)|^{p(t)-1}\left[\alpha^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_+-\beta^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_-\right]\right\|_{q(t);\,\alpha^{-1},\,\beta^{-1}},$$

где $\dfrac{1}{p(t)}+\dfrac{1}{q(t)}=1$. Тогда из определения (α,β)-нормы следует

$$\int_0^1\left|\frac{|f(t)|^{p(t)-1}\left[\alpha^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_+-\beta^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_-\right]}{A}\right|^{q(t)}_{\alpha^{-1},\,\beta^{-1}}dt = 1.$$

Пусть $F(t)=\left[\alpha^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_+-\beta^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_-\right]$. Тогда получим

$$\int_0^1\left(\frac{|f(t)|^{p(t)-1}\left[\alpha^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_+-\beta^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_-\right]\operatorname{sign}_{\alpha^{-1},\beta^{-1}}F(t)}{A}\right)^{q(t)}dt =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{|f(t)|^{p(t)-1}\left[\alpha^{p(t)-1}\operatorname{sign}(f(t))_+-\beta^{p(t)-1}\operatorname{sign}(f(t))_-\right]}{A}\right)^{\frac{p(t)}{p(t)-1}}dt =$$

$$= \int_0^1\left(\frac{|f(t)|\left[\alpha\operatorname{sign}(f(t))_+-\beta\operatorname{sign}(f(t))_-\right]}{A}\right)^{p(t)}dt = 1,$$

т. е.

$$\left\||f(t)|^{p(t)-1}\left[\alpha^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_+-\beta^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_-\right]\right\|_{q(t);\,\alpha^{-1},\,\beta^{-1}} = \|f\|_{p(t);\alpha,\beta}.$$

Из соотношений (1) и (2) получаем оценку

$$\left|\frac{\Delta I_k}{h}\right| \le 2\|p\|_\infty\left\||f(t)|^{p(t)-1}\left[\alpha^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_+-\beta^{p(t)}\operatorname{sign}(f(t))_-\right]\right\|_{q(t);\,\alpha^{-1},\,\beta^{-1}}\times$$

$$\times\,\|\varphi_k(t)\|_{p(t);\alpha,\beta} =$$

$$= 2\|p\|_\infty\|f\|_{p(t);\,\alpha,\,\beta}\|\varphi_k(t)\|_{p(t);\alpha,\beta} = 2\|p\|_\infty\|\omega-\theta h\varphi_k\|_{p(t);\,\alpha,\,\beta}\|\varphi_k(t)\|_{p(t);\alpha,\beta} \le$$

$$\le 2\|p\|_\infty\left(\|\omega\|_{p(t);\,\alpha,\,\beta}+\theta h\|\varphi_k\|_{p(t);\,\alpha,\,\beta}\right)\|\varphi_k(t)\|_{p(t);\alpha,\beta}.$$

Из теоремы Лебега о предельном переходе получаем, что существует частная производная

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = -\int_0^1 p(t)\,|x(t)-\,u_0(t)|^{p(t)-1}\varphi_k(t)\;\times$$

$$\times\,\left[\alpha^{p(t)}\operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_+-\beta^{p(t)}\operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_-\right]dt.$$

Поскольку $u_0\in H$ минимизирует интеграл $I(a_1,a_2,\ldots,a_n)$, то $\dfrac{\partial I}{\partial a_k}=0$.

Необходимость доказана.

Достаточность. Положим $\Phi(y) = y^{p(t)}$, $y \in L_{p(t)}$,

$$\Phi'(y) = p(t) y^{p(t)-1}, \quad \Phi'(0) = 0.$$

Обозначим через $\varphi(y)$ следующую функцию:

$$\varphi(y) = \Phi(|y+a|_{\alpha,\beta}) - \Phi(|a|_{\alpha,\beta}) - y\Phi'(|a|_{\alpha,\beta}) \operatorname{sign}_{\alpha,\beta} a.$$

Если $y = 0$, то $\varphi(0) = 0$.

Поскольку $p(t) > 1$, функция $\Phi'(y)$ не убывает.

Рассматривая случаи $y + a \geq 0$ и $y + a < 0$ при всех возможных соотношениях между y и a, нетрудно доказать, что при $y > 0$ $\varphi'(y) \geq 0$. а при $y < 0$ $\varphi'(y) < 0$. Следовательно, для всех y $\varphi(y) \geq 0$.

Значит, справедливо неравенство

$$\Phi(|a+b|_{\alpha,\beta}) \geq \Phi(|a|_{\alpha,\beta}) + b\Phi'(|a|_{\alpha,\beta}) \operatorname{sign}_{\alpha,\beta} a.$$

Учитывая полученное неравенство, имеем

$$\int_0^1 |x(t) - u(t)|_{\alpha,\beta}^{p(t)} dt = \int_0^1 |x(t) - u_0(t) + u_0(t) - u(t)|_{\alpha,\beta}^{p(t)} dt \geq \int_0^1 |x(t) - u_0(t)|_{\alpha,\beta}^{p(t)} dt +$$

$$+ \int_0^1 (u_0(t) - u(t))\, p(t)\, |x(t) - u_0(t)|_{\alpha,\beta}^{p(t)-1} \operatorname{sign}_{\alpha,\beta}(x(t) - u_0(t))\, dt =$$

$$= \int_0^1 |x(t) - u_0(t)|_{\alpha,\beta}^{p(t)} dt + \int_0^1 (u_0(t) - u(t))\, p(t)\, |x(t) - u_0(t)|_{\alpha,\beta}^{p(t)-1} \times$$

$$\times \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t) - u_0(t))_+ - \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t) - u_0(t))_-\right] dt =$$

$$= \int_0^1 |x(t) - u_0(t)|_{\alpha,\beta}^{p(t)} dt.$$

Следующие неравенства являются некоторыми аналогами соотношений двойственности [2, с. 32].

Теорема 2. *Для любой функции $x(t) \in L_{p(t)}$ существует постоянная C, зависящая от функции $x(t)$, такая, что справедливы неравенства*

$$\inf_{u \in H} \int_0^1 |x(t) - u(t)|^{p(t)} \times$$

$$\times \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t) - u(t))_+ + \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t) - u(t))_-\right] dt \leq$$

$$\leq C \sup \left\{ \int_0^1 x(t) y(t)\, dt : \ y \perp H, \quad \|y\|_{q(t);\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leq 1 \right\}, \tag{4}$$

$$\sup \left\{ \int_0^1 x(t) y(t)\, dt : \ y \perp H, \quad \|y\|_{q(t);\alpha^{-1},\beta^{-1}} \leq 1 \right\} \leq r \|x - u\|_{p(t);\alpha,\beta}, \tag{5}$$

где число r определено в лемме 2, $\dfrac{1}{p(t)} + \dfrac{1}{q(t)} = 1$.

Доказательство. Докажем неравенство (4). Пусть $u_0 \in H$ — элемент наилучшего (α, β)-приближения в смысле задачи 1 функции x в пространстве $L_{p(t)}$, т. е.

$$\int_0^1 |x(t)-u_0(t)|^{p(t)} \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_+ + \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_-\right] dt =$$

$$= \inf_{u\in H} \int_0^1 |x(t)-u(t)|^{p(t)} \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u(t))_+ + \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u(t))_-\right] dt.$$

Выберем $\hat{y}(t)$ следующим образом:

$$\hat{y}(t) = p(t)|x(t)-u_0(t)|^{p(t)-1} \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_+ - \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_-\right].$$

Из теоремы 1 следует, что $\hat{y} \perp H$. Константу C выберем из условия

$$\left\| \frac{\hat{y}}{C} \right\|_{q(t);\alpha^{-1},\beta^{-1}} = 1.$$

Тогда имеем

$$\sup\left\{ \int_0^1 x(t)y(t)\,dt : \ y\perp H, \quad \|y\|_{q(t);\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1 \right\} \ge \frac{1}{C}\int_0^1 x(t)\hat{y}(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{C}\Bigg(\int_0^1 x(t)p(t)|x(t)-u_0(t)|^{p(t)-1} \times$$

$$\times \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_+ - \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_-\right] dt -$$

$$- \int_0^1 u_0(t)p(t)|x(t)-u_0(t)|^{p(t)-1} \times$$

$$\times \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_+ - \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_-\right] dt \Bigg) =$$

$$= \frac{1}{C}\Bigg(\int_0^1 p(t)|x(t)-u_0(t)|^{p(t)} \times$$

$$\times \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_+ + \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u_0(t))_-\right] dt \Bigg) \ge$$

$$\ge \inf_{u\in H} \frac{1}{C}\Bigg(\int_0^1 p(t)|x(t)-u(t)|^{p(t)} \times$$

$$\times \left[\alpha^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u(t))_+ + \beta^{p(t)} \operatorname{sign}(x(t)-u(t))_-\right] dt \Bigg).$$

Неравенство (4) доказано.

Докажем теперь неравенство (5). Учитывая утверждение 2, получаем

$$\sup\left\{ \int_0^1 x(t)y(t)\,dt : \ y\perp H, \quad \|y\|_{q(t);\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1 \right\} =$$

$$= \inf_{u\in H} \sup\left\{ \int_0^1 (x(t)-u(t))y(t)\,dt : \ y\perp H, \quad \|y\|_{q(t);\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1 \right\} \le$$

$$\le r \inf_{u\in H} \sup\left\{ \|x-u\|_{p(t);\alpha,\beta} \|y\|_{q(t);\alpha^{-1},\beta^{-1}} : \ y\perp H, \quad \|y\|_{q(t);\alpha^{-1},\beta^{-1}} \le 1 \right\} \le$$

$$\le r \inf_{u\in H} \|x-u\|_{p(t);\alpha,\beta},$$

что и требовалось доказать.

Положим $\gamma = \beta^2/(\alpha+\beta^2)$ и пусть

$$x(t) = \begin{cases} 2, & t\in(0;\gamma), \\ 1, & t\in(\gamma;1); \end{cases} \qquad p(t) = \begin{cases} 1, & t\in(0;\gamma), \\ 2, & t\in(\gamma;1). \end{cases}$$

Функцию $x(t)$ будем приближать константами в смысле задач 1 и 2. Имеем

$$I(x, c) = \int_0^\gamma |2-c|_{\alpha,\beta}\, dt + \int_\gamma^1 |1-c|^2_{\alpha,\beta}\, dt = \frac{1}{\alpha+\beta^2}\left(|2-c|_{\alpha,\beta}\beta^2 + |1-c|^2_{\alpha,\beta}\alpha\right).$$

Нетрудно показать, что

$$\min_c I(x, c) = \frac{3}{4}\frac{\alpha\beta^2}{\alpha+\beta^2},$$

а константа, реализующая минимум, есть $c_0 = 3/2$.

Положим $\|x-c\|_{p(t);\alpha,\beta} = \lambda$. В силу определения (α, β)-нормы будем иметь

$$1 = \int_0^1 \left|\frac{x(t)-c}{\lambda}\right|^{p(t)}_{\alpha,\beta} dt = \int_0^\gamma \left|\frac{2-c}{\lambda}\right|_{\alpha,\beta} dt + \int_\gamma^1 \left|\frac{1-c}{\lambda}\right|^2_{\alpha,\beta} dt =$$

$$= \frac{1}{\alpha+\beta^2}\left(\beta^2\left|\frac{2-c}{\lambda}\right|_{\alpha,\beta} + \alpha\left|\frac{1-c}{\lambda}\right|^2_{\alpha,\beta}\right).$$

Полагая $1 < c < 2$, находим

$$\frac{\alpha\beta^2}{\alpha+\beta^2}\left(\frac{2-c}{\lambda} + \frac{(1-c)^2}{\lambda^2}\right) = 1$$

или

$$\lambda^2 - \frac{\alpha\beta^2}{\alpha+\beta^2}(2-c)\lambda - \frac{\alpha\beta^2}{\alpha+\beta^2}(1-c)^2 = 0.$$

Отсюда, учитывая, что $\lambda \geq 0$, получаем

$$\|x-c\|_{p(t);\alpha,\beta} = \lambda = \frac{\alpha\beta^2(2-c)}{2(\alpha+\beta^2)} + \sqrt{\left(\frac{\alpha\beta^2(2-c)}{2(\alpha+\beta^2)}\right)^2 + \frac{\alpha\beta^2}{\alpha+\beta^2}(1-c)^2}.$$

Нетрудно проверить, что константа, минимизирующая $\|x-c\|_{p(t);\alpha,\beta}$, будет

$$c = \frac{3\left(\alpha\beta^2/\left(\alpha+\beta^2\right)\right)+4}{\left(\alpha\beta^2/\left(\alpha+\beta^2\right)\right)+4},$$

и легко показать, что константа $c = 3/2$ не является точкой экстремума функции $\lambda(c)$. Отсюда и вытекает, что в случае, когда функция $p(t)$ отлична от константы, задачи 1 и 2 в общем случае различны.

1. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные приближения в пространствах суммируемых функций // Укр. мат. журн. – 1982. – **34**, № 4. – С. 409 – 416.
2. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
3. *Бабенко В. Ф.* Несимметричные экстремальные задачи теории приближения // Докл. АН СССР. – 1983. – **269**, № 3. – С. 521 – 524.
4. *Бабенко В. Ф.* Приближение классов сверток // Сиб. мат. журн. – 1987. – **28**, № 5. – С. 6 – 21.
5. *Ценов И. В.* Обобщение задачи о наилучшем приближении функции в пространстве $\mathcal{L}^s$ // Уч. зап. Дагестан. ун-та. – 1961. – **7**. – С. 25 – 37.
6. *Шарапудинов И. И.* О топологии пространства $\mathcal{L}^{p(t)}([0; 1])$ // Мат. заметки. – 1979. – **26**, № 4. – С. 613 – 632.

Получено 03.04.97,
после доработки — 10.09.97